

Mag. St. Dr.
551
III
Mateu
kat.komp.



INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

CUM EIUS VSU

IN ANALYSI FINITORUM

AC

DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE

LEONHARDO EULERO

ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.





IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.


BIBLIOTH. UNIV.
NICAE



PRAEFATIO.

Quid ſit Calculus Differentialis, atque in genere Analyſis Infinitorum? iis qui nulla adhuc eius cognitione ſunt imbuti, vix explicari poteſt: neque hic, vti in aliis diſciplinis fieri ſolet, exordium tractationis a definitione commode ſumere licet. Non quod huius calculi nulla plane detur definitio; ſed quoniam ad eam intelligendam eiusmodi opus eſt notionibus, non ſolum in vita communi, verum etiam in ipſa Analyſi finitorum minus vſitatis, quae demum in Calculi Differentialis pertractatione euolui atque explicari ſolent: quo fit, vt eius definitio non ante percipi queat, quam eius principia iam ſatis dilucide fuerint perſpecta. Primum igitur hic calculus circa quantitates variabiles verſatur: etſi enim omnis quantitas ſua natura in infinitum augeri & diminui po-

teſt; tamen dum calculus ad certum quoddam inſtitutum dirigitur, aliae quantitates conſtanter eandem magnitudinem retinere concipiuntur, aliae vero per omnes gradus auctionis ac diminutionis variari: ad quam diſtinctionem notandam illae quantitates conſtantes, hae vero variabiles vocari ſolent; ita vt hoc diſcrimen non tam in rei natura, quam in quaeſtionis, ad quam calculus refertur, indole ſit poſitum. Quoniam haec differentia inter quantitates conſtantes & variabiles exemplo maxime illuſtrabitur, conſideremus iactum globi ex tormento bellico vi pulveris pyrii exploſi; ſiquidem hoc exemplum ad rem dilucidandam imprimis idoneum videtur. Plures igitur hic occurrunt quantitates, quarum ratio in iſta inueſtigatione eſt habenda: primo ſcilicet quantitas pulueris pyrii; tum eleuatio tormenti ſupra horizontem; tertio longitudo iactus ſuper plano horizontali; quarto tempus, quo globus exploſus in aere verſatur: ac niſi experimenta eodem tormento inſtituantur, inſuper eius longitudo cum pondere globi in computum trahi deberet. Verum hic a varietate tormenti & globi animum remoueamus, ne in quaeſtiones nimium implicatas incidamus. Quodſi ergo ſeruata perpetuo eadem

pul-

pulueris pyrii quantitate, eleuatio tormenti continuo immutetur, iactusque longitudo cum tempore transitus globi per aerem requiratur; in hac quaestione copia pulueris seu vis impulsus erit quantitas constans, eleuatio autem tormenti cum longitudine iactus eiusque duratione ad quantitates variabiles referri debebunt; siquidem pro omnibus eleuationis gradibus has res definire velimus, vt inde innotescat, quantae mutationes in longitudine ac duratione iactus ab omnibus eleuationis variationibus oriantur. Alia autem erit quaestio, si seruata eadem tormenti eleuatione, quantitas pulueris pyrii continuo mutetur, & mutationes, quae inde in iactum redundant, definiri debeant: hic enim eleuatio tormenti erit quantitas constans, contra vero quantitas pulueris pyrii, & longitudo ac duratio iactus quantitates variabiles. Sic igitur patet, quomodo mutato quaestionis statu eadem quantitas modo inter constantes, modo inter variabiles numerari queat: simul autem hinc intelligitur, ad quod in hoc negotio maxime est attendendum, quomodo quantitates variabiles aliae ab aliis ita pendeant, vt mutata vna reliquae necessario immutationes recipiant. Priori scilicet casu, quo quantitas pulueris

pyrii eadem manebat, mutata tormenti eleuatione etiam longitudo & duratio iactus mutantur; ſuntque ergo longitudo & duratio iactus quantitates variabiles pendentes ab eleuatione tormenti, hacque mutata ſimul certas quasdam mutationes patientes: poſteriori vero caſu pendent a quantitate pulueris pyrii, cuius mutatio in illis certas mutationes producere debet. Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, vt his mutatis etiam ipſae mutationes ſubeant, eae harum functiones appellari ſolent; quae denominatio latiſſime patet, atque omnes modos, quibus vna quantitas per alias determinari poteſt, in ſe complectitur. Si igitur x *denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae vtcunque ab* x *pendent, ſeu per eam determinantur, eius functiones vocantur; cuiusmodi ſunt quadratum eius* xx, *aliaeue potentiae quaecunque, nec non quantitates ex his vtcunque compoſitae; quin etiam transcendentes, & in genere quaecunque ita ab* x *pendent, vt aucta vel diminuta* x *ipſae mutationes recipiant. Hinc iam naſcitur quaeſtio, qua quaeritur, ſi quantitas* x *data quantitate ſiue augeatur ſiue diminuatur, quantum inde quaeuis eius functiones immutentur,*

tur, ſeu quantum incrementum decrementumue accipiant. Caſibus quidem ſimplicioribus haec quaeſtio facile reſoluitur: ſi enim quantitas x *augeatur quantitate* ω, *eius quadratum* xx *hinc incrementum capiet* $2x\omega + \omega\omega$; *ſicque incrementum ipſius* x *ſe habebit ad incrementum ipſius* xx, *vt* ω *ad* $2x\omega + \omega\omega$, *hoc eſt, vt* 1 *ad* $2x + \omega$; *ſimilique modo in aliis caſibus ratio incrementi ipſius* x *ad incrementum, vel decrementum, quod quaeuis eius functio inde adipiſcitur, conſiderari ſolet. Eſt vero inueſtigatio rationis huiusmodi incrementorum ipſa non ſolum maximi momenti, ſed ei etiam vniuerſa Analyſis infinitorum innititur. Quod quo clarius appareat, ſumamus exemplum ſuperius quadrati* xx, *cuius incrementum* $2x\omega + \omega\omega$, *quod capit, dum ipſa quantitas* x *incremento* ω *augetur, vidimus ad hoc rationem tenere, vt* $2x + \omega$ *ad* 1; *vnde perſpicuum eſt, quo minus ſumatur incrementum* ω, *eo propius iſtam rationem accedere ad rationem* 2x *ad* 1; *neque tamen ante prorſus in hanc rationem abit, quam incrementum illud* ω *plane euaneſcat. Hinc intelligimus, ſi quantitatis variabilis* x *incrementum* ω *in nihilum abeat, tum etiam quadrati eius* xx

in-

incrementum inde oriundum quidem euanescere, verumtamen ad id rationem tenere vt 2x *ad* 1; *& quod hic de quadrato est dictum, de omnibus aliis functionibus ipsius* x *est intelligendum; quippe quarum incrementa euanescentia, quae capiunt, dum ipsa quantitas* x *incrementum euanescens sumit, ad hoc ipsum certam & assignabilem rationem tenebunt. Atque hoc modo sumus deducti ad definitionem* Calculi Differentialis, *qui est* methodus determinandi rationem incrementorum euanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt, dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum euanescens tribuitur: *hacque definitione veram indolem calculi differentialis contineri, atque adeo exhauriri, iis, qui in hoc genere non sunt hospites, facile erit perspicuum. Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis euanescentibus, quippe quae sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportione mutua scrutanda occupatur: & cum hae rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamuis enim praecepta, vti vulgo tradi solent, ad ista incrementa euanescentia defi-*

definienda videantur accommodata; nunquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius semper ex eorum ratione conclusiones deducuntur. Simili vero modo calculi integralis ratio est comparata, qui conuenientissime ita definitur, vt dicatur esse methodus ex cognita ratione incrementorum euanescentium ipsas illas functiones, quarum sunt incrementa, inueniendi. *Quo autem facilius hae rationes colligi, atque in calculo repraesentari possint, haec ipsa incrementa euanescentia, etiamsi sint nulla, tamen certis signis denotari solent; quibus adhibitis nihil obstat, quo minus iis certa nomina imponantur. Vocantur itaque differentialia, quae cum quantitate destituantur, infinite parua quoque dicuntur; quae igitur sua natura ita sunt interpretanda, vt omnino nulla seu nihilo aequalia reputentur. Ita si quantitati* x *incrementum tribuatur* ω, *vt abeat in* $x + \omega$, *eius quadratum* xx *abibit in* $xx + 2x\omega + \omega\omega$, *ideoque incrementum capit* $2x\omega + \omega\omega$; *quare incrementum ipsius* x, *quod est* ω, *se habebit ad incrementum quadrati, quod est* $2x\omega + \omega\omega$, *vti* 1 *ad* $2x + \omega$; *quae ratio abit in* 1 *ad* $2x$, *tum demum, cum* ω *euanescit. Fiat igitur*

$\omega = 0$, *& ratio istorum incrementorum euanescentium, quae sola in calculo differentiali spectatur, vtique est vt* 1 *ad* 2 x; *neque vicissim haec ratio veritati esset consentanea, nisi reuera illud incrementum* ω *euanesceret, penitusque nihilo fieret aequale. Quodsi ergo hoc nihilum per* ω *indicatum referat incrementum quantitatis* x, *quia hoc se habet ad incrementum quadrati* xx *vt* 1 *ad* 2x, *erit quadrati* xx *incrementum* $= 2x\omega$, *ideoque etiam nihilo aequale; vnde simul constat annihilationem horum incrementorum non obstare, quominus eorum ratio, quae est vt* 1 *ad* 2 x *sit determinata. Quod nihilum iam hic littera* ω *exhibetur, id in calculo differentiali, quia vt incrementum quantitatis* x *spectatur, signo* dx *repraesentari, eiusque differentiale vocari solet; positoque* dx *loco* ω, *ipsius* xx *differentiale erit* $2xdx$. *Simili modo ostenditur fore cubi* x^3 *differentiale* $= 3xxdx$, *& in genere cuiusque dignitatis* x^n *differentiale fore* $= nx^{n-1}dx$. *Quaecunque autem aliae functiones ipsius* x *proponantur, in calculo differentiali regulae traduntur eorum differentialia inueniendi: verum perpetuo tenendum est, cum haec differentialia absolute sint ni-*

nihila, ex iis nihil aliud concludi, nisi eorum rationes mutuas, quae vtique ad quantitates finitas reducuntur. Cum autem hoc modo, qui solus est rationi consentaneus, principia Calculi differentialis stabiliuntur, omnes obtrectationes, quae contra hunc calculum proferri sunt solitae, sponte corruunt; quae tamen summam vim retinerent, si differentialia seu infinite parua non plane annihilarentur. Pluribus autem, qui Calculi differentialis praecepta tradidere, visum est differentialia a nihilo absoluto secernere, peculiaremque ordinem quantitatum infinite paruarum, quae non penitus euanescant, sed quantitatem quandam, quae quidem esset omni assignabili minor, retineant, constituere: his igitur iure est obiectum, rigorem geometricum negligi, & conclusiones inde deductas, propterea quod huiusmodi infinite parua negligerentur, merito esse suspectas: quantumuis enim exigua haec infinite parua concipiantur, tamen non solum singulis, sed etiam pluribus atque adeo innumerabilibus simul rejiciendis, errorem tandem inde enormem resultare posse. Quam obiectionem perperam eiusmodi exemplis, quibus per Calculum differentialem eaedem conclusiones ac per Geometriam

elementarem eliciuntur, infringere conantur: nam ſi ea infinite parua, quae in calculo negliguntur, non ſunt nihil, inde neceſſario error, isque eo maior, quo magis ea coacervantur, reſultare debet; hocque ſi minus eueniat, id potius vitio calculi, quo nonnunquam errores per alios errores compenſantur, eſſet tribuendum, quam ipſe calculus ab erroris ſuſpicione liberaretur. Quodſi autem nullo nouo errore huiusmodi compenſatio fiat, talibus exemplis luculenter id ipſum, quod volo, euincitur, ea quae fuerint neglecta, omnino & abſolute pro nihilo eſſe habenda; neque infinite parua, quae in calculo differentiali tractantur, a nihilo abſoluto diſcrepare. Minime etiam negotium conficitur, quando a nonnullis infinite parua ita deſcribuntur, vt inſtar puluisculorum reſpectu vaſti montis vel etiam totius globi terreſtris ſpectari debeant: etſi enim qui magnitudinem totius globi terreſtris calculo determinare ſuſceperit, ei error non vnius ſed plurium millium puluisculorum facile condonari ſoleat; tamen rigor geometricus etiam a tantillo errore abhorret, nimisque grauis eſſet haec obiectio, ſi vllam vim retineret. Deinde etiam difficile dictu eſt, quid lucri inde ſperent, qui in-

infinite parua a nihilo diſtingui volunt: metuunt autem, ne, ſi plane euaneſcant, etiam comparatio eorum, ad quam totum negotium perduci ſentiunt, tollatur: quomodo enim abſolute nihila inter ſe comparari queant, nullo modo concipi poſſe profitentur. Neceſſe ergo putant iis aliquam magnitudinem relinquere, quo habeant aliquid, in quo comparationem inſtituant: hanc tamen magnitudinem tam paruam admittere coguntur, vt quaſi eſſet nulla, ſpectari ac ſine errore in calculo negligi poſſit. Neque tamen certam ac definitam ipſi magnitudinem, licet incomprehenſibiliter paruam, aſſignare audent; ſemper enim ſi eam bis terue minorem aſſumerent, eodem modo comparationes ſe eſſent habiturae. Ex quo perſpicuum eſt, nihil plane ipſam magnitudinem ad comparationem inſtituendam conferre, hancque adeo non tolli, etiamſi illa magnitudo penitus euaneſcat. Ex dictis autem ſupra manifeſtum eſt, eam comparationem, quae in calculo differentiali ſpectatur, ne locum quidem habere, niſi illa incrementa prorſus euaneſcant: incrementum enim quantitatis x, *quod in genere indicauimus per* ω, *ad incrementum quadrati* xx, *quod eſt* $2x\omega + \omega\omega$, *rationem ha-*

habet vt 1 *ad* $2x + \omega$; *quae ſemper differt a ratione* 1 *ad* $2x$, *niſi ſit* $\omega = 0$; *at ſi ſtatuamus eſſe* $\omega = 0$, *tum demum vere affirmare poſſumus, hanc rationem fieri exacte vt* 1 *ad* $2x$. *Interim tamen perſpicitur, quo minus illud incrementum* ω *accipiatur, eo propius ad hanc rationem accedi; vnde non ſolum licet, ſed etiam naturae rei conuenit, haec incrementa primum vt finita conſiderare, atque etiam in figuris, ſi quibus opus eſt ad rem illuſtrandam, finite repraeſentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur, ſicque eorum ratio continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, quem autem tum demum attingant, cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quaſi rationem vltimam incrementorum illorum conſtituit, verum eſt objectum Calculi differentialis; cuius igitur prima fundamenta is iecisse exiſtimandus eſt, cui primum in mentem venit, has rationes vltimas, ad quas quantitatum variabilium incrementa, dum continuo magis diminuuntur, appropinquant, & cum euaneſcunt, tum demum attingunt, contemplari. Huius autem ſpeculationis veſtigia deprehendimus apud antiquiſſimos Aucto-*

tores, quibus idcirco idea quaedam leuisque cognitio Analyſis infinitorum abiudicari nequit. Paullatim deinde haec ſcientia maiora accepit incrementa, neque ſubito ad id faſtigium, in quo nunc cernitur, eſt euecta; etiamſi quidem in ea multo plura adhuc ſint occulta, quam in lucem protracta. Cum enim Calculus differentialis ad omnis generis functiones, vtcunque ſint compoſitae, extendatur, non repente methodus innotuit, omnium plane functionum incrementa euaneſcentia inter ſe comparandi; ſed ſenſim haec inuentio ad functiones continuo magis complicatas proceſſit. Quod ſcilicet ad functiones rationales attinet, ratio vltima, quam earum incrementa euaneſcentia inter ſe tenent, multo ante NEUTONI *ac* LEIBNIZII *tempora aſſignari potuit; ita vt Calculus differentialis, quatenus ad ſolas functiones rationales applicatur, diu ante haec tempora inuentus ſit cenſendus. Tum vero nullum eſt dubium, quin* NEUTONO *eam Calculi differentialis partem, quae circa functiones irrationales verſatur, acceptam referre debeamus; ad quam inſigni ſuo Theoremate de euolutione generali poteſtatum binomii feliciter eſt deductus, quo eximio inuento limites calculi*

dif-

differentialis iam mirifice erant amplificati. LEIBNIZIO *autem non minus ſumus obſtricti, quod hunc calculum, antehac tantum velut ſingulare artificium ſpectatum, in formam diſciplinae redegerit, eiusque praecepta tanquam in ſyſtema collegerit, ac dilucide explicauerit. Hinc enim maxima ſubſidia ſuggerebantur, ad hunc calculum vlterius excolendum, & ea, quae adhuc deſiderabantur, ex certis principiis elicienda. Mox igitur ſtudio cum Ipſius* LEIBNIZII, *tum* BERNOUILLIORUM *ad hoc ab eo incitatorum, fines Calculi differentialis etiam ad functiones transcendentes, quae pars adhuc fuerat inculta, ſunt promoti, tum vero etiam ſolidiſſima fundamenta Calculi integralis conſtituta; quibus inſiſtentes, qui deinceps in hoc genere elaborarunt, continuo maiora incrementa addiderunt.* NEUTONUS *vero etiam ampliſſima dederat ſpecimina Calculi integralis, cuius prima inuentio, cum a prima origine calculi differentialis vix ſeparari queat, non ita abſolute conſtitui poteſt; & quoniam maxima eius pars adhuc excolenda reſtat, hic calculus ne nunc quidem pro abſolute inuento haberi poteſt; ſed potius quantum cuique pro viribus ad eius perfectionem conferre*

con-

contigerit, id grata mente agnoſcere debemus. Atque haec de gloria inuentionis huius calculi tenenda eſſe iudico, de qua quidem antehac tantopere eſt diſceptatum. Quod autem ad varia nomina, quae iſti calculo a diuerſarum nationum Mathematicis imponi ſolent, attinet, ea omnia huc redeunt, vt cum data hic definitione egregie conſentiant: ſiue enim incrementa illa euaneſcentia, quorum ratio conſideratur, differentialia vocentur, ſive fluxiones, ea ſemper nihilo aequalia ſunt intelligenda; in quo vera notio infinite paruorum conſtitui debet. Hinc vero etiam omnia, quae de differentialibus ſecundi & altiorum ordinum curioſe magis quam vtiliter ſunt diſputata, reddentur planiſſima, cum omnia per ſe aeque euaneſcant, neque ea vnquam per ſe, ſed potius eorum relatio mutua ſpectari ſoleat. Cum enim ratio, quam duarum functionum incrementa euaneſcentia tenent, iterum per functionem quandam exprimatur, ſi & huius functionis incrementum euaneſcens cum aliis conferatur, res ad differentialia ſecunda referri eſt cenſenda; ſicque porro progreſſio ad differentialia altiorum graduum intelligi debet, ita vt ſemper quantitates finitae reuera animo ob-

versentur, signaque differentialium tantum ad eas commode repraesendandas adhibeantur. Primo quidem intuitu ista Analysis infinitorum descriptio plerisque leuis ac nimis sterilis videatur, etsi species illa arcana infinite paruorum re haud plus polliceatur: verum si rationes, quae inter incrementa euanescentia functionum quarumuis intercedunt, probe cognoscamus, haec cognitio saepenumero per se maximi est momenti; tum vero in plerisque iisque maximi arduis inuestigationibus ita est necessaria, vt sine eius adminiculo nihil plane intelligi possit. Veluti si quaestio sit de motu globi ex tormento explosi, simulque ratio resistentiae aeris haberi debeat, quomodo motus per spatium finitum sit futurus, nullo modo statim definire licet, dum tam directio semitae, in qua globus incedit, quam ipsius celeritas, a qua resistentia pendet, quouis momento immutatur. Quo minus autem spatium, per quod motus fiat, consideremus, eo minor erit illa variabilitas, eoque facilius ad cognitionem veri pertingere licebit; quodsi autem illud spatium plane euanescens reddamus, quia iam omnis inaequalitas tam in directione viae quam in celeritate tollitur, effectum resistentiae per regulas motus accu-

curate definire, motusque mutationem puncto temporis productam assignare licebit. Cognitis autem his mutationibus momentaneis, seu potius cum ipsae sint nullae, earum relatione mutua, iam plurimum sumus lucrati; atque calculi integralis opus est, exinde motum per spatium finitum variatum concludere. Minime autem necesse esse arbitror vsum Calculi differentialis atque Analyseos infinitorum in genere pluribus ostendere; cum nunc quidem satis sit exploratum, si vel leuissimam inuestigationem, in quam motus corporum tam solidorum quam fluidorum ingrediatur, accuratius instituere velimus, id non solum non sine Analysi infinitorum praestari posse, sed hanc ipsam scientiam saepe nondum satis excultam esse, vt rem penitus explicare valeamus. Per omnes scilicet Matheseos partes vsus huius Analyseos sublimioris vsque adeo diffunditur, vt omnia, quae sine eius interuentu adhuc expedire licuit, pro nihilo propemodum sint habenda.

Constitui igitur in hoc libro vniuersum Calculum differentialem ex veris principiis deriuare, atque ita copiose pertractare, vt nihil praetermitterem eorum, quae quidem adhuc eo pertinentia sunt inuenta. In duas opus

diuisi partes, in quarum priori iactis calculi differentialis fundamentis methodum exposui omnis generis functiones differentiandi, neque tantum differentialia primi ordinis, sed etiam superiorum ordinum inueniendi; siue functiones vnicam variabilem siue duas pluresue inuoluant. In altera autem parte amplissimum huius calculi vsum in ipsa Analysi finitorum ac doctrina serierum exposui; vbi etiam imprimis Theoriam maximorum ac minimorum dilucide explicaui. De vsu autem huius calculi in Geometria linearum curuarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus haec pars ita copiose sit pertractata, vt adeo prima calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint petita, ad hancque scientiam, cum vix satis essent euoluta, summa cura applicata. Hic autem omnia ita intra Analyseos purae limites continentur, vt ne vlla quidem figura opus fuerit, ad omnia huius calculi praecepta explicanda.



IN-



INDEX CAPITUM

PARTIS PRIORIS.

PARTIS POSTERIORIS.



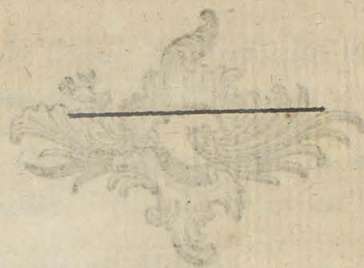
Erro-



Errores Typographici.

pag. 509. lin 3. loco $z = xx$ lege $z = xx + x$

pag. 513. lin. 14. loco $\frac{(z' - z)}{a^x (a-1)^2}$ lege $\frac{(z' - az)}{a^x (a-1)^2}$.



INSTI-

INSTITUTIONUM CALCULI DIFFERENTIALIS

PARS PRIOR

CONTINENS

COMPLETAM HUIUS CALCULI EXPLICATIONEM.



CAPUT I.

DE DIFFERENTIIS FINITIS.



I.

Ex iis, quae in Libro ſuperiori de quantitatibus variabilibus atque functionibus ſunt expoſita, perſpicuum eſt, prout quantitas variabilis actu variatur, ita omnes eius functiones variationem pati. Sic, ſi quantitas variabilis x capiat incrementum ω, ita vt pro x ſcribatur $x + \omega$, omnes functiones ipſius x, cuiusmodi ſunt xx; x^3; $\frac{a + x}{xx + aa}$, alios induent valores: ſcilicet xx abibit in $xx + 2x\omega + \omega\omega$;

 x^3

x^3 abibit in $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$; & $\frac{a+x}{aa+xx}$ transmutabitur in $\frac{a+x+\omega}{aa+xx+2x\omega+\omega\omega}$. Huiusmodi ergo alteratio ſemper orietur, niſi functio ſpeciem tantum quantitatis variabilis mentiatur, reuera autem ſit quantitas conſtans, veluti x^0: quo caſu talis functio inuariata manet, vtcunque quantitas x immutetur.

2. Quae cum ſint ſatis expoſita, propius accedamus ad eas functionum affectiones, quibus vniuerſa analyſis infinitorum innititur. Sit igitur y functio quaecunque quantitatis variabilis x: pro qua ſucceſſiue valores in arithmetica progreſſione procedentes ſubſtituantur, ſcilicet: x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; &c. ac denotet y^{I} valorem quem functio y induit, ſi in ea loco x ſubſtituatur $x+\omega$; ſimili modo ſit y^{II} is ipſius y valor, ſi loco x ſcribatur $x+2\omega$; parique ratione denotent y^{III}; y^{IV}; y^{V}; &c. valores ipſius y, qui emergunt dum loco x ponuntur $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c. ita vt iſti diuerſi valores ipſarum x & y ſequenti modo ſibi reſpondeant:

$$x;\ x+\omega;\ x+2\omega;\ x+3\omega;\ x+4\omega;\ x+5\omega;\ \&c.$$
$$y;\ y^{\mathrm{I}};\ y^{\mathrm{II}};\ y^{\mathrm{III}};\ y^{\mathrm{IV}};\ y^{\mathrm{V}};\ \&c.$$

3. Quemadmodum ſeries arithmetica x; $x+\omega$; $x+2\omega$; &c. in infinitum continuari poteſt, ita ſeries ex functione y orta y; y^{I}; y^{II}; &c. quoque in infinitum progredietur, eiusque natura pendebit ab indole functio-

tionis y. Sic, si fuerit $y = x$; vel $y = ax + b$; series y; y^{I}; y^{II}; &c. quoque erit arithmetica: si fuerit $y = \frac{a}{bx + c}$, series prodibit harmonica: sint autem sit $y = a^{x}$, habebitur series geometrica. Neque vlla excogitari potest series, quae non hoc modo ex certa functione ipsius y oriri queat; vocari autem solet huiusmodi functio ipsius x, ratione seriei, quae ex illa oritur, eius TERMINUS GENERALIS; quare, cum omnis series certa lege formata habeat terminum generalem, ea vicissim ex certa ipsius x functione oritur, vti in doctrina de seriebus fusius explicari solet.

4. Hic autem potissimum ad differentias, quibus termini seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. inter se discrepant, attendimus; quas vt ad differentialium naturam accommodemus, sequentibus signis indicemus, vt sit

$$y^{I} - y = \Delta y;\quad y^{II} - y^{I} = \Delta y^{I};\quad y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II};\ \&c.$$

Exprimet ergo Δy incrementum, quod functio y capit, si in ea loco x ponatur $x + \omega$, denotante ω numerum quemcunque pro lubitu assumtum. In doctrina quidem serierum sumi solet $\omega = 1$; verum hic ad nostrum institutum expedit, valore generali vti, qui pro arbitrio augeri diminuiue queat. Vocari quoque solet hoc incrementum Δy functionis y eius DIFFERENTIA, qua sequens valor y^{I} primum y superat, atque perpetuo tanquam incrementum consideratur; etiamsi saepius re vera decrementum exhibeat, id quod ex eius valore negatiuo agnoscitur.

5. Quoniam y^{II} oritur ex y, ſi loco x ſcribatur $x+2\omega$; manifeſtum eſt eandem quantitatem eſſe orituram, ſi primum pro x ponatur $x+\omega$, tumque denuo $x+\omega$ loco x ſtatuatur. Hinc y^{II} orietur ex y^{I}, ſi in hoc loco x ſcribatur $x+\omega$; eritque ideo Δy^{I} incrementum ipſius y^{I} quod capit poſito $x+\omega$ loco x; ſicque Δy^{I} vocatur ſimili modo *Differentia* ipſius y^{I}. Pari ratione porro erit Δy^{II} differentia ipſius y^{II}, ſeu eius incrementum, quod accipit, ſi loco x ponatur $x+\omega$; atque Δy^{III} erit differentia, ſeu incrementum ipſius y^{III}, & ita porro. Hoc pacto ex ſerie valorum ipſius y, qui ſunt y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. obtinebitur ſeries differentiarum Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; &c. quae inueniuntur, ſi quilibet terminus illius ſeriei a ſequente ſubtrahatur.

6. Inuenta ſerie differentiarum, ſi ex ea denuo differentiae capiantur, quamlibet a ſequente ſubtrahendo, orientur differentiae differentiarum, quae vocantur *Differentiae ſecundae*; hocque modo per characteres conuenientiſſime repraeſentantur, vt ſignificet:

$$\Delta\Delta y = \Delta y^{I} - \Delta y$$
$$\Delta\Delta y^{I} = \Delta y^{II} - \Delta y^{I}$$
$$\Delta\Delta y^{II} = \Delta y^{III} - \Delta y^{II}$$
$$\Delta\Delta y^{III} = \Delta y^{IV} - \Delta y^{III}$$
&c.

Vocatur itaque $\Delta\Delta y$ differentia ſecunda ipſius y; $\Delta\Delta y^{I}$ differentia ſecunda ipſius y^{I}, & ita porro. Simili autem modo ex differentiis ſecundis, ſi denuo earum differentiae

tiae capiantur, prodibunt differentiae tertiae hoc modo ſcribendae $\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^I$; &c. hincque porro differentiae quartae $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^I$; &c. ſicque vltra quousque libuerit.

5. Repraeſentemus ſingulas has differentiarum ſeries ita in ſchemate, quo earum nexus facilius in oculos incidat:

PROGRESSIO ARITHMETICA.

x ; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; &c.

VALORES FUNCTIONIS.

y ; y^I ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; y^V ; &c.

DIFFERENTIAE PRIMAE.

Δy ; Δy^I ; Δy^{II} ; Δy^{III} ; Δy^{IV} ; &c.

DIFFERENTIAE SECUNDAE.

$\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta y^I$; $\Delta\Delta y^{II}$; $\Delta\Delta y^{III}$; &c.

DIFFERENTIAE TERTIAE.

$\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^I$; $\Delta^3 y^{II}$; &c.

DIFFERENTIAE QUARTAE.

$\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^I$; &c.

DIFFERENTIAE QUINTAE.

$\Delta^5 y$; &c.

&c.

quarum quaelibet ex praecedente oritur, quosque terminos a ſequentibus ſubtrahendo. Quacunque ergo functione ipſius x loco y ſubſtituta, quoniam valores

y^I

y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. per notas compoſitiones facile formantur, ex iis ſine labore ſingulae differentiarum ſeries inuenientur.

8. Ponamus eſſe $y = x$; eritque $y^{I} = x^{I} = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$: & ita porro. Vnde differentiis ſumendis erit $\Delta x = \omega$; $\Delta x^{I} = \omega$; $\Delta x^{II} = \omega$; &c. ideoque omnes differentiae primae ipſius x erunt conſtantes, ac proinde differentiae ſecundae omnes euaneſcent; pariterque differentiae tertiae, & ſequentium ordinum omnes. Cum igitur ſit $\Delta x = \omega$, ob analogiam loco litterae ω iſte character Δx commode adhibebitur. Quantitatis ergo variabilis x, cuius valores ſucceſſiui x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, &c. arithmeticam progreſſionem conſtituere aſſumuntur, differentiae Δx, Δx^{I}, Δx^{II}, &c. erunt conſtantes atque inter ſe aequales; ac propterea erit $\Delta\Delta x = 0$, $\Delta^{3} x = 0$, $\Delta^{4} x = 0$, ſicque porro.

9. Pro valoribus ipſius x, qui ipſi ſucceſſiue tribuuntur, progreſſionem arithmeticam hic aſſumſimus, ita vt horum valorum differentiae primae ſint conſtantes, ſecundae ac reliquae omnes euaneſcant. Quod etſi ab arbitrio noſtro pendet, cum aliam quamcunque progreſſionem aeque adhibere potuiſſemus; tamen progreſſio arithmetica prae reliquis omnibus commodiſſime vſurpari ſolet, cum quod ſit ſimpliciſſima atque intellectu facillima, tum vero maxime, quod ad omnes omnino valores, quos quidem x induere poteſt, pateat. Tribuendo enim ipſi ω valores tam negatiuos quam affirmatiuos, in hac ſerie valorum ipſius x omnes omnino continentur quanti-

tita-

titates reales, quae in locum ipſius x ſubſtitui poſſunt: contra autem ſi ſeriem geometricam elegiſſemus, ad valores negatiuos nullus aditus patuiſſet. Hanc ob cauſam variabilitas functionum y ex valoribus ipſius x progreſſionem arithmeticam conſtituentibus aptiſſime diiudicatur.

10. Vti eſt $\Delta y = y^{I} - y$, ita differentiae vlteriores quoque ex terminis primae ſeriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. definiri poſſunt.

Cum enim ſit $\Delta y^{I} = y^{II} - y^{I}$

erit

$$\Delta\Delta y = y^{II} - 2y^{I} + y$$

&

$$\Delta\Delta y^{I} = y^{III} - 2y^{II} + y^{I}$$

ideoque

$$\Delta^3 y = \Delta\Delta y^{I} - \Delta\Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$

ſimili modo erit

$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

&

$$\Delta^5 y = y^{V} - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^{I} - y$$

quarum formularum coefficientes numerici eandem legem tenent, quae in poteſtatibus Binomii obſeruatur. Quemadmodum ergo differentia prima ex duobus terminis ſeriei y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. determinatur, ita differentia ſecunda determinatur ex tribus, tertia ex quatuor, & ita de ceteris. Cognitis autem differentiis cuiusque ordinis ipſius y, ſimili modo differentiae omnium ordinum ipſius y^{I}; y^{II}; &c. definientur.

11. Propoſita ergo quacunque Functione y ſingulae eius differentiae, tam prima quam ſequentes, quae quidem differentiae ω, qua valores ipſius x progrediuntur, reſpondent, poterunt inueniri. Neque vero ad hoc opus eſt, vt ſeries valorum ipſius y vlterius continuetur: quemadmodum enim differentia prima Δy reperitur, ſi in y loco x ſcribatur $x + \omega$, atque a valore orto y^{I} ipſa functio y ſubtrahatur; ita differentia ſecunda $\Delta\Delta y$ obtinebitur ſi in differentia prima Δy loco x ponatur $x + \omega$, vt oriatur Δy^{I}, atque Δy a Δy^{I} ſubtrahatur. Simili modo ſi differentiae ſecundae $\Delta\Delta y$ capiatur Differentia, eam ſubtrahendo a valore, quem induit, ſi loco x ponatur $x + \omega$, proueniet differentia tertia $\Delta^3 y$; hincque porro eodem modo differentia quarta $\Delta^4 y$, &c. Dummodo ergo quis nouerit differentiam primam cuiusque functionis inueſtigare, ſimul poterit differentiam ſecundam, tertiam, omneſque ſequentes inuenire: propterea quod differentia ſecunda ipſius y nil aliud eſt, niſi differentia prima ipſius Δy; & differentia tertia ipſius y nil aliud, niſi differentia prima ipſius $\Delta\Delta y$; ſicque porro de reliquis.

12. Si functio y fuerit ex duabus pluribusue partibus compoſita, vt ſit $y = p + q + r +$ &c.; tum, quia eſt $y^{I} = p^{I} + q^{I} + r^{I} +$ &c., erit differentia $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r +$ &c., ſimilique modo porro $\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r +$ &c., vnde inuentio differentiarum, ſi functio propoſita ex partibus fuerit compoſita, non parum facilior redditur. Quod ſi vero functio y fuerit productum ex duabus functionibus p & q, nempe

$y =$

$y = pq$, quia erit $y^I = p^I q^I$, & $p^I = p + \Delta p$ atque $q^I = q + \Delta q$, fiet $p^I q^I = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$, hincque $\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$. Vnde, ſi ſit p quantitas conſtans $= a$, ob $\Delta a = o$; erit functionis $y = aq$, differentia prima $\Delta y = a\Delta q$, ſimilique modo differentia ſecunda $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$, tertia $\Delta^3 q = a\Delta^3 q$, & ita porro.

13. Quoniam omnis functio rationalis integra eſt aggregatum ex aliquot poteſtatibus ipſius x; omnes differentias functionum rationalium integrarum inuenire poterimus, ſi differentias poteſtatum tantum exhibere nouerimus. Hancobrem ſingularum poteſtatum quantitatis variabilis x differentias inueſtigemus in ſequentibus exemplis.

Cum autem ſit $x^0 = 1$, erit $\Delta x^0 = 0$; propterea quod x^0 non variatur, etiamſi x abeat in $x + \omega$.

Tum vero vidimus eſſe $\Delta x = \omega$; & $\Delta\Delta x = 0$, ſimulque differentiae ſequentium ordinum euaneſcunt. Quae cum ſint manifeſta a Poteſtate ſecunda incipiamus:

EXEMPLUM I.

Inuenire differentias omnium ordinum poteſtatis x^2.

Cum hic ſit $y = x^2$, erit $y^I = (x + \omega)^2$; ideoque $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$; quae eſt differentia prima. Iam ob ω quantitatem conſtantem, erit $\Delta\Delta y = 2\omega\omega$, & $\Delta^3 y = 0$; $\Delta^4 y = 0$; &c.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentias omnium ordinum poteſtatis x^3.

Ponatur $y = x^3$; &, cum ſit $y^I = (x + \omega)^3$,

erit

$$\Delta y = 3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3$$

quae eſt differentia prima. Deinde ob

$$\Delta . xx = 2\omega x + \omega\omega$$

erit

$$\Delta . 3\omega xx = 6\omega\omega x + 3\omega^3$$

&

$$\Delta . 3\omega^2 x = 3\omega^3 \; ; \quad \& \quad \Delta . \omega^3 = 0 :$$

quibus collectis erit

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3 : \quad \text{atque} \quad \Delta^3 y = 6\omega^3 ;$$

Differentiae vero ſequentes euaneſcent.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentias omnium ordinum poteſtatis x^4.

Poſito $y = x^4$; ob $y^{I} = (x + \omega)^4$

erit

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 ;$$

quae eſt differentia prima. Tum ex praecedentibus eſt:

$$\Delta . 4\omega x^3 = 12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x + 4\omega^4$$
$$\Delta . 6\omega^2 x^2 = \ldots \; 12\omega^3 x + 6\omega^4$$
$$\Delta . 4\omega^3 x = \ldots\ldots + 4\omega^4$$
$$\Delta . \omega^4 = \ldots\ldots 0$$

His colligendis erit differentia ſecunda:

$$\Delta\Delta y = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^4 ;$$

Quia deinde porro eſt:

$$\Delta . 12\omega^2 x^2 = 24\omega^3 x + 12\omega^4$$
$$\Delta . 24\omega^3 x = \ldots \; 24\omega^4$$
$$\Delta . 14\omega^4 = \ldots \; 0$$

pro-

prodibit differentia tertia:

$$\Delta^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$$

atque tandem differentia quarta:

$$\Delta^4 y = 24\omega^4$$

quae cum ſit conſtans, differentiae ſequentium ordinum euaneſcent.

EXEMPLUM IV.

Inuenire differentias cuiusuis ordinis poteſtatis x^n.

Ponatur $y = x^n$; &, cum ſit $y^{\mathrm{I}} = (x+\omega)^n$; $y^{\mathrm{II}} = (x+2\omega)^n$; $y^{\mathrm{III}} = (x+3\omega)^n$; &c. Poteſtates euolutae dabunt:

$$y = x^n$$

$$y^{\mathrm{I}} = x^n + \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{\mathrm{II}} = x^n + \frac{n}{1}2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}8\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{\mathrm{III}} = x^n + \frac{n}{1}3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}27\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{\mathrm{IV}} = x^n + \frac{n}{1}4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}64\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

 Hinc,

Hinc, differentiis ſumendis, prodibit:

$$\Delta y = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{I} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}3\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}7\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{II} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}5\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}19\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{III} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}7\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}37\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

ſumantur denuo differentiae, atque obtinebitur:

$$\Delta\Delta y = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3.}\frac{(n-3)}{4}14\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y^{I} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3.}\frac{(n-3)}{4}50\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y^{II} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}18\omega^{3n-3} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3.}\frac{(n-3)}{4}110\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

Ex

Ex his per subtractionem vlterius eruitur:

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} 36\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y^1 = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} 60\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

atque porro:

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

14. Quo lex, secundum quam istae differentiae potestatis x^n progrediuntur, facilius perspiciatur. Ponamus primo breuitatis ergo:

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

&c.

De-

Deinde ſequens formetur Tabula, quae pro ſingulis differentiis inſeruiet:

y	1;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	&c.
Δy	0;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	&c.
$\Delta^2 y$	0;	0;	2;	6;	14;	30;	62;	126;	254;	&c.
$\Delta^3 y$	0;	0;	0;	6;	36;	150;	540;	1806;	5796;	&c.
$\Delta^4 y$	0;	0;	0;	0;	24;	240;	1560;	8400;	40824;	&c.
$\Delta^5 y$	0;	0;	0;	0;	0;	120;	1800;	16800;	126000;	&c.
$\Delta^6 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	720;	15120;	191520;	&c.
$\Delta^7 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	5040;	141120;	&c.

in qua Tabula numerus cuiusuis ſeriei inuenitur, ſi eiusdem ſeriei praecedens ad numerum ſupra poſitum addatur, atque ſumma per indicem characteri Δ infixum multiplicetur. Sic, in ſerie differentiae $\Delta^5 y$ reſpondente, terminus 16800 inuenitur, ſi praecedens 1800 ad ſupra ſcriptum 1560 addatur, atque Summa 3360 per 5 multiplicetur.

15. Tabula ergo hac conſtituta, ſingulae differentiae Poteſtatis $x^n = y$ ſequenti modo ſe habebunt:

$$\Delta y = A\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = 2B\omega^2 x^{n-2} + 6C\omega^3 x^{n-3} + 14D\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = 6C\omega^3 x^{n-3} + 36D\omega^4 x^{n-4} + 150E\omega^5 x^{n-5} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = 24D\omega^4 x^{n-4} + 240E\omega^5 x^{n-5} + 1560F\omega^6 x^{n-6} + \&c.$$

Ge-

Generatim autem poteſtatis x^n differentia ordinis m, ſeu $\Delta^m y$, ſequenti modo exprimetur.

Sit

$$I = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.\;2.\;3\ldots\ldots m};$$

$$K = \frac{n-m}{m+1}\,I;$$

$$L = \frac{n-m-1}{m+2}\,K;$$

$$M = \frac{n-m-2}{m+3}\,L;$$

&c.

Deinde vero ſit:

$$\alpha = (m+1)^m - \frac{m}{1}m^m + \frac{m(m-1)}{1.\;2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\;2.\;3}(m-2)^m + \&c.$$

$$\beta = (m+1)^{m+1} - \frac{m}{1}m^{m+} + \frac{m(m-1)}{1.\;2}(m-1)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\;2.\;3}(m-2)^{m+2} + \&c.$$

$$\gamma = (m+1)^{m+2} - \frac{m}{1}m^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1.\;2}(m-1)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\;2.\;3}(m-2)^{m+2} + \&c.$$

quibus valoribus inuentis erit

$$\Delta^m y = \alpha I \alpha^m x^{n-m} + \beta K \omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma L \omega^{m+2} x^{n-m-2}\ \&c.$$

cuius expreſſionis ratio ex modo, quo ſingulae differentiae ex valoribus y, y', y'', y''', &c. eliciuntur, ſponte ſequitur.

16. Ex his perſpicuum eſt, ſi exponens n fuerit numerus integer affirmatiuus, tandem ad differentias perueniri conſtantes, hisque vlteriores omnes eſſe $= o$. Sic erit

$$\Delta.\ x = \omega$$
$$\Delta^2.\ x^2 = 2\,\omega^2$$
$$\Delta^3.\ x^3 = 6\,\omega^3$$
$$\Delta^4.\ x^4 = 24\omega^4 \qquad \text{\& tandem}$$
$$\Delta^n.\ x^n = 1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ n.\ \omega^n$$

Omnis ergo functio rationalis integra tandem ad differentias conſtantes deducetur. Scilicet, functio ipſius x primi gradus, $ax + b$ differentiam primam iam habet conſtantem $= a\omega$. Functio ſecundi gradus $axx + bx + c$ differentiam ſecundam habebit conſtantem $= 2a\omega\omega$. functionis autem tertii gradus differentia tertia erit conſtans; quarti quarta, & ita porro.

17. Modus autem, quo inuenimus differentias poteſtatis x^n, quoque latius patet, atque ad eas poteſtates, quarum exponens n eſt numerus negatiuus, vel fractus, vel adeo irrationalis, extenditur. Quod quo clarius appareat, differentias tantum primas praecipuarum huiusmodi poteſtatum exhibebimus, quoniam lex differentiarum ſecundarum ac ſequentium non tam facile cernitur: erit ergo,

$$\Delta.\, x = \omega$$
$$\Delta.\, x^2 = 2\omega\, x + \omega$$
$$\Delta.\, x^3 = 3\omega\, x^2 + 3\,\omega^2\, x + \omega^3$$
$$\Delta.\, x^4 = 4\omega\, x^3 + 6\,\omega^2\, x^2 + 4\omega^3\, x + \omega^4 \ \text{\&c.}$$

Si-

Simili modo vero erit

$$\Delta.\, x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \&c.$$

Et inde pro reliquis. Pariter erit

$$\Delta.\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

$$\Delta.\, x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} - \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \&c.$$

 18. Ap-

18. Apparet itaque has differentias, ſi exponens ipſius x non fuerit numerus integer affirmatiuus, in infinitum progredi, ſeu ex terminorum numero infinito conſtare. Interim tamen eaedem differentiae quoque per expreſſionem finitam exhiberi poſſunt. Cum enim, poſito $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, ſit $y^{1} = \frac{1}{x+\omega}$, erit $\Delta. x^{-1} = \Delta. \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$; vnde, ſi fractio $\frac{1}{x+\omega}$ in ſeriem conuertatur, prodit expreſſio ſuperior. Simili modo erit

$$\Delta. x^{-2} = \Delta. \frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

atque pro irrationalibus erit

$$\Delta. \sqrt{x} = \sqrt{(x+\omega)} - \sqrt{x}, \ \& \ \Delta. \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\omega)}} - \frac{1}{\sqrt{x}};$$

quae formulae ſi more ſolito in ſeries explicentur, ſuperiores expreſſiones praebent.

19. Hoc vero modo quoque differentiae functionum, ſiue fractarum ſiue irrationalium, inueniri poſſunt: ſic, ſi quaeratur differentia prima fractionis $\frac{1}{aa+xx}$ ponatur $y = \frac{1}{aa+xx}$; &, quia eſt $y^{1} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega^2}$ erit $\Delta y = \Delta. \frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega} - \frac{1}{aa+xx}$, quae expreſſio quoque in ſeriem infinitam conuerti poteſt.

Pona-

Ponatur $aa + xx = P$ & $2\omega x + \omega\omega = Q$;

erit

$$\frac{1}{P + Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

&

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

Reſtitutis ergo loco P & Q valoribus erit:

$$\Delta y = \Delta.\frac{1}{aa + xx} = -\frac{2\omega x - \omega\omega}{(aa + xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx + 4\omega^3 x + \omega^4}{(aa + xx)^3}$$

$$-\frac{8\omega^3 x^3 - 12\omega^4 x^2 + 6\omega^5 x - \omega^6}{(aa + xx^4} + \&c.$$

qui termini ſi ſecundum poteſtates ipſius ω ordinentur erit:

$$\Delta.\frac{1}{aa + xx} = -\frac{2\omega x}{(aa + xx)^2} + \frac{\omega^2(xx - aa)}{(aa + xx)^3} - \frac{4\omega^3(x^3 - aax)}{(aa + xx^4} + \&c.$$

20. Similibus ſeriebus infinitis differentiae functionum irrationalium quoque exprimi poſſunt.

Sit propoſita iſta functio $y = \surd(aa + xx)$;

&, cum ſit $y^{I} = \surd(aa + xx + 2\omega x + \omega\omega)$,

ponatur $aa + xx = P$ & $2\omega x + \omega\omega = Q$

$$\text{erit } \Delta v = \surd(P + Q) - \surd P = \frac{Q}{2\surd P} - \frac{QQ}{8P\surd P} + \frac{Q^3}{16P^2\surd P} - \&c.$$

 vnde

vnde fiet

$$\Delta y = \Delta.\sqrt{(aa+xx)} = \frac{2\omega x + \omega\omega}{2\sqrt{(aa+xx)}} - \frac{4\omega^2 x^2 - 4\omega^3 x - \omega^4}{8(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}} + \text{\&c.}$$

vel

$$= \frac{\omega x}{\sqrt{(aa+xx)}} + \frac{aa\omega^2}{2(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}} - \frac{aa\omega^3 x}{2(aa+xx)^2\sqrt{(aa+xx)}} \text{\&c.}$$

Hincque adeo colligimus functionis cuiuscunque ipſius x, quae ſit y, differentiam hac forma exprimi poſſe, vt ſit

$$\Delta y = -P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{\&c.}$$

exiſtentibus P, Q, R, S, &c. certis ipſius x functionibus, quae quouis caſu ex functione y definiri poſſunt.

21. Neque etiam ex hac forma differentiae functionum tranſcendentium excluduntur, id quod ex ſequentibus exemplis clarius apparebit.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiam primam logarithmi hyperbolici ipſius x.

Ponatur $y = lx$; & cum ſit $y^I = l(x+\omega)$, erit

$$\Delta y = y^I - y = l(x+\omega) - lx = l\left(1 + \frac{\omega}{x}\right).$$

Huiumsodi autem logarithmum ſupra docuimus per ſeriem infinitam exprimere; qua adhibita, erit

$$\Delta y = \Delta.\, lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2xx} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{\&c.}$$

EX-

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiam primam quantitatis exponentialis a^x.

Posito $y = a^x$ erit $y^I = a^{x+\omega} = a^x . a^\omega$: at supra ostendimus esse

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega l a}{1} + \frac{\omega^2 (la)^3}{1.\ 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.$$

quo valore introducto erit

$$\Delta . a^x = y^I - y = \Delta y = \frac{a^x \omega l a}{1} + \frac{a^x \omega^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{a^x \omega^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.$$

EXEMPLUM III.

In circulo, cuius radius $= 1$, *inuenire differentiam sinus arcus* x.

Sit $\sin x = y$, erit $y^I = \sin (x + \omega)$, vnde $\Delta y = y^I - y = \sin (x + \omega) - \sin x$.

At est $\sin (x + \omega) = \cos \omega . \sin x + \sin \omega . \cos x$, atque per series infinitas ostendimus esse,

$$\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.\ 2} + \frac{\omega^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{\omega^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \&c.$$

&

$$\sin \omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

quibus seriebus substitutus erit:

$$\Delta . \sin x = \omega . \cos x - \frac{\omega^2}{2} \sin x - \frac{\omega^3}{6} \cos x + \frac{\omega^4}{24} \sin x + \frac{\omega^5}{120} \cos x - \&c.$$

EX-

EXEMPLUM IV.

In circulo cuius radius $= 1$ inuenire differentiam cosinus arcus x.

Posito $y = \cos x$, ob $y^{I} = \cos(x+\omega)$

erit $y^{I} = \cos\omega . \cos x - \sin\omega . \sin x$

& $\Delta y = \cos\omega . \cos x - \sin\omega . \sin x - \cos x$

Seriebus ergo ante expositis adhibendis prodibit:

$$\Delta . \cos x = -\omega \sin x - \frac{\omega^2}{2}\cos x + \frac{\omega^3}{6}\sin x + \frac{\omega^4}{24}\cos x - \frac{\omega^5}{120}\sin x - \text{\&c.}$$

22. Cum igitur proposita quacunque functione ipsius x, siue algebraica siue transcendente, quae sit y, eius differentia prima eiusmodi habeat formam vt sit:

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{\&c.}$$

si huius differentia denuo capiatur, patebit differentiam secundam ipsius y huiusmodi formam esse habituram:

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \text{\&c.}$$

similique modo differentia tertia ipsius y, erit huiusmodi

$$\Delta^3 y = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + \text{\&c.}$$

sicque porro.

Vbi notandum est litteras P, Q, R, &c. hic non pro valoribus determinatis adhiberi, neque eadem littera in diuersis differentiis eandem functionem ipsius x denotari: ideo enim tantum iisdem litteris vtor, ne sufficiens diuersarum litterarum numerus deficiat.

Ceterum *istae differentiarum formae* probe sunt *notandae*, cum in Analysi infinitorum maximum vsum offerant.

23. Cum

23. Cum igitur modum expoſuerim, quo cuiusuis functionis differentia prima, ex eaque porro differentiae ſequentium ordinum inueniri queant; quippe quae ex valoribus functionis y ſucceſſiuis y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. reperiuntur: viciſſim ex differentiis ipſius y cuiusque ordinis datis, iſti ipſi variati valores ipſius y elici poterunt. Erit enim

$$y^{I} = y + \Delta y$$

$$y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$

$$y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y$$

$$y^{IV} = y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$

&c.

vbi coefficientes numerici iterum ex euolutione binomii naſcuntur. Quemadmodum ergo y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. ſunt valores ipſius y, qui oriuntur ſi loco x ſucceſſiue ponantur hi valores $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, &c. ſtatim valorem ipſius $y^{(n)}$ aſſignare poterimus, qui prodit ſi loco x ſcribatur $x + n\omega$, erit ſcilicet iſte valor:

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y + \&c.$$

Hincque adeo etiam valores ipſius y praeberi poſſunt ſi n fuerit numerus negatiuus. Sic, ſi loco x ponatur $x - \omega$, functio y abibit in hanc formam:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \&c.$$

ſin autem loco x ponatur $x - 2\omega$, functio y tranſibit in:

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \&c.$$

24. Pauca quaedam addamus de methodo inuerſa, qua, ſi detur differentia, ex ea ipſa illa functio, cuius eſt differentia, inueſtigari debeat. Cum autem hoc ſit difficillimum atque ſaepe numero ipſam analyſin infinitorum requirat, caſus tantum quosdam faciliores euoluamus. Primum igitur, regrediendo, ſi functionis cuiuspiam differentiam inuenerimus, viciſſim hac differentia propoſita, ipſa illa functio, vnde eſt nata, exhiberi poterit. Sic, cum functionis $ax + b$ differentia ſit $a\omega$, ſi quaeratur cuiusnam functionis differentia ſit $a\omega$; reſponſio erit in promtu, eam functionem eſſe $ax + b$. In hac igitur reperitur quantitas conſtans b, quae in differentia non inerat, & quae propterea ab arbitrio noſtro pendet. Perpetuo autem ſi functionis cuiusuis P differentia fuerit Q, quoque functionis P + A, (denotante A quantitatem quamcunque conſtantem,) differentia erit Q. Hinc, ſi iſta differentia Q proponatur, functio, ex qua ea eſt orta, erit P + A, atque idcirco determinatum valorem non habet, cum conſtans A ab arbitrio pendeat.

25. Vocemus eam functionem quaeſitam cuius differentia proponitur, SUMMAM; quod nomen commode adhibetur, cum quod ſumma differentiae opponi ſolet, tum etiam, quod functio quaeſita reuera ſit ſumma omnium valorum praecedentium differentiae. Quemadmodum

dum enim eſt $y^{I} = y + \Delta y$, & $y^{II} = y + \Delta y + \Delta y^{I}$, ſi valores ipſius y retro continuentur; ita, ut is, qui valori $x - \omega$ reſpondet, ſcribatur y_{I}, huncque praedens y_{II}, & qui vltra praecedunt y_{III}, y_{IV}, y_{V}, &c. hincque ſeries formetur retrograda, cum ſuis differentiis:

$$y_{V};\quad y_{IV};\quad y_{III};\quad y_{II};\quad y_{I};\quad y$$

&

$$\Delta y_{V};\quad \Delta y_{IV};\quad \Delta y_{III};\quad \Delta y_{II};\quad \Delta y_{I}$$

erit

$$y = \Delta y_{I} + y_{I}$$

&

ob $y_{I} = \Delta y_{II} + y_{II}$, porroque $y_{II} = \Delta y_{III} + y_{III}$

erit vtique

$$y = \Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_{V}$$

&c.

ſicque erit functio y, cuius differentia eſt Δy, ſumma omnium valorum antecedentium differentiae Δy, qui oriuntur, ſi loco x ſcribantur valores antecedentes $x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; &c.

26. Quemadmodum ad differentiam denotandam vſi ſumus ſigno Δ, ita ſummam indicabimus ſigno Σ: ſcilicet, ſi functionis y differentia fuerit z, erit $z = \Delta y$; vnde, ſi y detur, differentiam z inuenire ante docuimus. Quodſi autem data ſit differentia z, eiusque ſumma y reperiri debeat, fiet $y = \Sigma z$; atque adeo, ex aequatione $z = \Delta y$ regrediendo, formabitur haec aequatio $y = \Sigma z$; vbi conſtans quantitas quaecunque adiici poterit ob ratio-

 nes

nes ſupra datas; ex quo, aequatio $z = \Delta y$, ſi inuertatur, dabit quoque $y = \Sigma z + C$. Deinde, cum quantitatis ay differentia ſit $a\Delta y = az$, erit $\Sigma az = ay$, ſi quidem a ſit quantitas conſtans. Quia ergo eſt $\Delta x = \omega$; erit $\Sigma \omega = x + C$ & $\Sigma a\omega = ax + C$; atque ob ω quantitatem conſtantem, erit $\Sigma \omega^2 = \omega x + C$; $\Sigma \omega^3 = \omega^2 x + C$; & ita porro.

27. Si igitur differentias poteſtatum ipſius x ſupra inuentas inuertamus, erit

$$\Sigma \omega = x; \text{ hincque } \Sigma 1 = \frac{x}{\omega};$$

Deinde habemus

$$\Sigma (2\omega x + \omega^2) = x^2;$$

vnde fit

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma \frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Porro eſt

$$\Sigma (3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

ſeu

$$3\omega \Sigma x^2 + 3\omega^2 \Sigma x + \omega^3 \Sigma 1 = x^3$$

ergo

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega \Sigma x - \frac{\omega^2}{3} \Sigma 1$$

ſeu

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6};$$

ſimili modo erit

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2} \Sigma x^2 - \omega^2 \Sigma x - \frac{\omega^3}{4} \Sigma 1$$

vbi

vbi, si loco Σx^2, Σx & $\Sigma 1$ valores ante inuenti substituantur, reperietur:

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega xx}{4}.$$

Deinde, cum sit

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega\Sigma x^3 - 2\omega^2\Sigma x^2 - \omega^3\Sigma x - \frac{\omega^4}{5}\Sigma 1$$

erit, adhibendis substitutionibus:

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x$$

simili modo vlterius progrediendo reperietur

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}\omega x^4 - \frac{1}{12}\omega^3 x^2$$

&

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}\omega x^5 - \frac{1}{6}\omega^3 x^3 + \frac{1}{42}\omega^5 x$$

quas expressiones infra facilius inuenire docebimus.

28. Si ergo differentia proposita fuerit functio rationalis integra ipsius x, eius summa, (seu ea functio, cuius ea est differentia) ex his formulis facile inuenitur. Quia enim differentia ex aliquot potestatibus ipsius x constabit, quaeratur vniuscuiusque termini summa, omnesque istae summae colligantur.

EXEMPLUM I.

Quaeratur functio, cuius differentia sit $= axx + bx + c$.

Quaerantur singulorum terminorum summae ope formularum ante inuentarum, erit

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

&

$$\Sigma bx = \ldots \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

atque

$$\Sigma c = \ldots\ldots \frac{cx}{\omega}$$

Hinc colligendo has ſummas erit

$$\Sigma(axx+bx+c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{(a\omega-b)}{2\omega}x^2 + \frac{(a\omega^2-3b\omega+6c)}{6\omega}x + C$$

quae eſt functio quaeſita, cuius differentia eſt $axx+bx+c$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur functio, cuius differentia eſt $x^4-2\omega^2xx+\omega^4$.

Operationem ſimili modo inſtituendo habebitur.

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega x^3$$

&

$$-\Sigma 2\omega^2x^2 = \ldots - \frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

atque

$$+\Sigma\omega^4 = \ldots\ldots\ldots + \omega^3 x$$

vnde functio quaeſita erit:

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2x^2 + \frac{19}{30}\omega^3x + C$$

Si enim hic loco x ponatur $x+\omega$, atque a quantitate reſultante ſubtrahatur iſta inuenta, remanebit propoſita differentia $x^4 - 2\omega^2x^2 + \omega^4$.

29. Si

29. Si ſummas, quas pro poteſtatibus ipſius x invenimus, attentius inſpiciamus, in terminis primis, ſecundis, ac tertiis mox quidem legem obſeruabimus, qua illi ſecundum ſingulas poteſtates progrediuntur: reliquorum autem terminorum lex non ita eſt perſpicua, vt ſummam poteſtatis x^n in genere inde colligere liceat. Interim tamen in ſequentibus docebitur eſſe:

$$\Sigma x^n =$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2.3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2.\ 3.\ 4.\ 5}x^{n-3}$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}x^{n-5}$$

$$-\frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-6)\omega^7}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 8.\ 9}x^{n-7}$$

$$+\frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ (n-8)\omega^9}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ 10.\ 11}x^{n-9}$$

$$-\frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ (n-10)\omega^{11}}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ 12.\ 13}x^{n-11}$$

$$+\frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ n-12)\omega^{13}}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ 14.\ 15}x^{n-13}$$

$$-\frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-14)\omega^{15}}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ 16.\ 17}x^{n-15}$$

$$+\frac{43867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-16)\omega^{17}}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 18.\ 19}x^{n-17}$$

$$-\frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ (n-18)\omega^{19}}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ 20.\ 21}x^{n-19}$$

$$+\frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ (n-20)\omega^{21}}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ 22.\ 23}x^{n-21}$$

—

$$- \frac{1181820455}{546} \cdot \frac{n(n-1) \; . \; . \; . \; (n-22)\,\omega^{23}}{2. \; 3 \; . \; . \; . \; . \; 24. \; 25} x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2} \cdot \frac{n(n-1) \; . \; . \; . \; . \; (n-24)\,\omega^{25}}{2. \; 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 26. \; 27} x^{n-25}$$

$$- \frac{23749461029}{30} \cdot \frac{n(n-1) \; . \; . \; . \; (n-26)\,\omega^{27}}{2. \; 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; 28. \; 29} x^{n-27}$$

$$+ \frac{8615841276005}{462} \cdot \frac{n(n-1) \; . \; . \; . \; (n-28)\,\omega^{29}}{2. \; 3 \; . \; . \; . \; . \; 30. \; 31} x^{n-29}$$

&c. $+ C$

cuius progreſſionis praecipuum momentum in coefficientibus mere numericis eſt ſitum, qui quemadmodum formentur, hic locus nondum eſt, vbi exponi queat.

30. Apparet autem niſi n ſit numerus integer affirmatiuus, hanc ſummae expreſſionem in infinitum progredi, neque hoc modo ſummam in forma finita exhiberi poſſe. Ceterum hic notandum eſt, non omnes poteſtates ipſius x propoſita x^n inferiores occurrere; deſunt enim termini x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}, &c. quippe quorum coefficientes ſunt $=0$, etiamſi termini ſecundi x^n coefficiens hanc legem non ſequatur, ſed ſit $= -\frac{1}{2}$. Poterunt ergo huius expreſſionis ope ſummae poteſtatum, quarum exponentes ſunt vel negatiui vel fracti in forma infinita exhiberi ſolo excepto caſu quo $n = -1$, quia tum fit terminus $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ ob $n+1=0$ infinitus. Sic, poſito $n = -2$; erit

$\Sigma \frac{1}{xx}$

$$\Sigma \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \tfrac{1}{2}. \frac{\omega}{3x^3} + \tfrac{1}{6}, \frac{\omega^3}{5x^5}$$
$$- \tfrac{1}{6}. \frac{\omega^5}{7x^7} + \tfrac{3}{10}. \frac{\omega^7}{9x^9} - \tfrac{5}{6}. \frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210}. \frac{\omega^{11}}{13x^{13}}$$
$$- \tfrac{35}{2}. \frac{\omega^{13}}{15x^{15}} + \frac{3617}{30}. \frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \&c.$$

31. Si ergo differentia propoſita fuerit poteſtas ipſius x quaecunque, eius ſumma hinc perpetuo aſſignari, ſeu functio, cuius ea ſit differentia, exhiberi poterit. Sin autem differentia propoſita aliam habeat formam, vt in poteſtates ipſius x, tanquam partes, diſtribui nequeat, tum ſumma difficillime ac ſaepenumero prorſus non inueniri poteſt: niſi forte pateat, eam ex quapiam functione eſſe ortam. Hanc ob cauſam conueniet plurium functionum differentias inueſtigare easque probe notare, vt ſi quando huiusmodi differentia proponatur, eius ſumma, ſeu functio vnde eſt orta, ſtatim exhiberi queat. Interim tamen methodus infinitorum plures regulas ſuppeditabit, quarum ope inuentio ſummarum mirifice ſubleuabitur.

32. Facilius autem ſaepe ſumma quaeſita reperitur, ſi differentia propoſita ex factoribus ſimplicibus conſtet, qui progreſſionem arithmeticam conſtituant, cuius differentia ſit ipſa quantitas ω. Sic, ſi propoſita fuerit functio $(x + \omega)(x + 2\omega)$, cuius differentia quaeratur: quia, poſito $x + \omega$ loco x, haec functio abit in $(x + 2\omega)$

 $(x +$

$(x+3\omega)$, eius differentia erit $2\omega(x+2\omega)$. Quare viciſſim, ſi proponatur differentia $2\omega(x+2\omega)$, eius ſumma erit $(x+\omega)(x+2\omega)$, hinc ergo erit

$$\Sigma(x+2\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+\omega)(x+2\omega).$$

Simili modo, ſi proponatur functio $(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$, cum ſit eius differentia $2\omega(x+(n+1)\omega)$ erit

$$\Sigma(x+(n+1)\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

&

$$\Sigma(x+n\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega).$$

33. Si functio ex pluribus factoribus conſtet, vt ſit $y=(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(n+1)\omega)$, cum ſit

$$y^{1}=(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega),$$

erit

$$\Delta y=3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

ac propterea

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)=\frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

Pari modo reperietur eſſe:

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)=$$

$$\frac{1}{4\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega).$$

vnde lex inueniendi ſummas, ſi differentia ex pluribus huiusmodi factoribus conſtet, ſponte patet. Quamuis au-

autem hae differentiae ſint functiones rationales integrae, tamen earum ſummae hoc modo facilius reperiuntur, quam per methodum praecedentem.

34. Hinc quoque via patet ad differentiarum fractarum ſummas inueniendas. Sit enim propoſita fractio

$$y = \frac{1}{x + n\omega}; \text{ quia erit } y^{I} = \frac{1}{x + (n+1)\omega}$$

erit

$$\Delta y = \frac{1}{x + (n+1)\omega} - \frac{1}{x + n\omega} = \frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

ac propterea

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x + n\omega}$$

Sit porro

$$y = \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)x)}$$

ob $y^{I} = \dfrac{1}{(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}$

erit

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}$$

Hinc ideo fiet

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}$$

$$= \frac{-1}{2\omega} \cdot \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)}.$$

 Simili

Simili modo erit porro

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)(x+(n+3)\omega)}$$

$$= \frac{-1}{3\omega} \cdot \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}.$$

35. Modus iſte ſummandi probe eſt tenendus, quia huiusmodi differentiarum ſummae per praecedentem methodum inueniri non poſſunt. Quodſi autem differentia inſuper habeat numeratorem, vel factores denominatoris non in arithmetica progreſſione procedant, tum tutiſſimus modus inueſtigandi ſummas eſt, vt differentia propoſita in ſuas fractiones ſimplices reſoluatur, quarum ſingulae etſi ſummari nequeunt, tamen binis coniungendis toties ſumma inueniri poteſt, quoties id quidem fieri licet; tantum enim erit diſpiciendum, vtrum ſumma ope huius formulae inueniri queat:

$$\Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+n\omega}$$

etſi enim neutra harum ſummarum per ſe exhiberi poteſt, tamen earum differentia cognoſcitur.

36. His igitur caſibus negotium redit ad reſolutionem cuiusque fractionis in fractiones ſuas ſimplices, quae in ſuperiori libro fuſius eſt oſtenſa. Quemadmodum ergo eius beneficio ſummae inueniri queant, aliquot exemplis docebimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Quaeratur summa, cuius differentia sit

$$\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)}.$$

Resoluatur haec differentia proposita in suas fractiones simplices, quae erunt

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{x+2\omega}.$$

Cum iam sit ex superiori formula:

$$\Sigma\frac{1}{x+n\omega}=\Sigma\frac{1}{x+(n+1)\omega}-\frac{1}{x+n\omega}$$

erit

$$\Sigma\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{1}{x}.$$

Hinc erit summa quaesita

$$\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}=$$

$$\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{\omega x},$$

at est

$$\Sigma\frac{1}{x+\omega}=\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{x+\omega};$$

vnde summa quaesita erit

$$-\frac{1}{\omega x}-\frac{2}{\omega(x+\omega)}=\frac{-3x-\omega}{\omega x(x+\omega)}.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur summa, cuius differentia est

$$\frac{3\omega}{x(x+3\omega)}.$$

Posita hac differentia $= z$, erit $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3\omega}$ ideoque

$$\Sigma z = \Sigma \frac{1}{x} - \Sigma \frac{1}{x+3\omega} = \Sigma \frac{1}{x+\omega} -$$

$$\Sigma \frac{1}{x+3\omega} - \frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{x+2\omega} - \Sigma \frac{1}{x+3\omega} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\omega}$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x+2\omega}.$$

quae est summa quaesita. Quoties ergo hoc modo signa summatoria Σ sese tandem tollunt, toties differentiae propositae summa exhiberi poterit; sin autem haec destructio non succedat, signum hoc est, summam inueniri non posse.

CAPUT

CAPUT II.

DE VSU DIFFERENTIARUM IN DOCTRINA SERIERUM.

37.

Naturam ſerierum per differentias maxime illuſtrari, ex primis rudimentis ſatis eſt notum. Progreſſionis enim arithmeticae, quae primum conſiderari ſolet, praecipua proprietas in hoc verſatur, vt eius differentiae primae ſint inter ſe aequales; hinc differentiae ſecundae ac reliquae omnes erunt cyphrae. Dantur deinde ſeries, quarum differentiae ſecundae demum ſunt aequales, quae hanc ob rem *ſecundi ordinis* commode appellantur, dum progreſſiones arithmeticae ſeries *primi ordinis* vocantur. Porro igitur ſeries *tertii ordinis* erunt, quarum differentiae tertiae ſunt conſtantes; atque ad *quartum ordinem* & ſequentes eae referentur ſeries, quarum differentiae quartae, & vlteriores demum ſunt conſtantes.

38. In hac diuiſione infinita ſerierum genera comprehenduntur, neque tamen omnes ſeries ad haec genera reuocare licet. Occurrunt enim innumerabiles ſeries, quae, differentiis ſumendis, nunquam ad terminos conſtantes deducunt: cuiusmodi, praeter innumeras alias ſunt progreſſiones geometricae, quae nunquam praebent differentias conſtantes, vti ex hoc exemplo videre licet.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, &c.

Cum enim ſeries differentiarum cuiusque ordinis aequalis ſit ipſi ſeriei propoſitae, aequalitas differentiarum prorſus excluditur. Quocirca plures ſerierum claſſes conſtitui debebunt, quarum una tantum in hos ordines, qui tandem ad differentias conſtantes revocantur, ſubdiuiditur; quam claſſem in hoc capite potiſſimum conſiderabimus.

39. Duae autem res ad naturam ſerierum cognoſcendam imprimis requiri ſolent, Terminus generalis atque Summa ſeu Terminus ſummatorius. Terminus generalis eſt expreſſio indefinita, quae vnumquemque ſeriei terminum complectitur, atque eiusmodi propterea eſt functio quantitatis variabilis x, quae, poſito $x = 1$, terminum ſeriei primum exhibet; ſecundum vero poſito $x = 2$; tertium poſito $x = 3$; quartum poſito $x = 4$; & ita porro. Cognito ergo termino generali, quotuscunque ſeriei terminus inuenietur, etiamſi lex, qua ſinguli termini cohaerent, non reſpiciatur. Sic verbi gratia ponendo $x = 1000$, ſtatim terminus milleſimus cognoſcetur. Ita huius ſeriei

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, &c.

Terminus generalis eſt $2xx - x$; poſito enim $x = 1$, haec formula dat terminum primum 1; poſito $x = 2$, oritur terminus ſecundus 6; ſi ponatur $x = 3$, oritur tertius 15; &c. vnde patet huius ſeriei terminum centeſimum, poſito $x = 100$ fore $= 2.10000 - 100 = 19900$.

40. In-

40. Indices seu exponentes in qualibet serie vocantur numeri, qui indicant quotus quisque terminus sit in ordine: sic, termini primi index erit 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro. Hinc indices singulis cuiusque seriei terminis inscribi solent, hoc modo

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

TERMINI.

A, B, C, D, E, F, G, &c.

vnde statim patet G esse seriei propositae terminum septimum, cum eius index sit 7. Hinc terminus generalis nil aliud erit, nisi terminus seriei, cuius index vel exponens est numerus indefinitus x. Quemadmodum ergo in quolibet serierum ordine, quarum differentiae vel primae, vel secundae, vel aliae sequentes sunt constantes, terminum generalem inueniri oporteat, primum docebimus: tum vero ad inuestigationem summae sumus progressuri.

41. Incipiamus ab ordine primo, qui continet progressiones arithmeticas, quarum differentiae primae sunt constantes; sitque a terminus seriei primus, & b terminus primus seriei differentiarum, cui sequentes omnes sunt aequales: vnde series ita erit comparata. Inuestigatio termini generalis

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ a+5b,$ &c.

DIFFERENTIAE.

$b,\ b,\ b,\ b,\ b,$ &c.

Ex qua ſtatim patet, terminum, cuius index ſit $= x$, fore $a + (x - 1)b$, eritque ergo terminus generalis $= bx + a - b$, qui ex terminis primis cum ipſius ſeriei, tum ſeriei differentiarum componitur. Quodſi autem terminus ſecundus ſeriei $a + b$ vocetur a^{I}, ob $b = a^{I} - a$, erit terminus generalis $= (a^{I} - a)x + 2a - a^{I} = a^{I}(x - 1) - a(x - 2)$ vnde, ex cognitis terminis primo & ſecundo progreſſionis arithmeticae, eius terminus generalis formabitur.

42. Sint in ſerie ſecundi ordinis termini primi, ipſius ſeriei $= a$; differentiarum primarum $= b$; differentiarum ſecundarum $= c$; eritque ipſa ſeries cum ſuis differentiis ita comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

TERMINI.

$a; a + b; a + 2b + c; a + 3b + 3c; a + 4b + 6c; a + 5b + 10c; a + 6b + 15c;$ &c.

DIFFER. I.

$b; b + c; b + 2c; b + 3c; b + 4c; b + 5c;$ &c.

DIFFER. II.

$c, c, c, c, c,$

ex cuius inſpectione liquet terminum, cuius index $= x$ fore $= a + (x - 1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}c$; qui ergo eſt terminus generalis ſeriei propoſitae. Ponatur autem ipſius ſeriei terminus ſecundus $= a^{I}$, terminus tertius $= a^{II}$, cum ſit $b = a^{I} - a$; & $c = a^{II} - 2a^{I} + a$; vti ex natura

tura differentiarum (§. 10.) intelligitur, erit terminus generalis

$$a + (x-1)(a^{I} - a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}(a^{II} - 2a^{I} + a)$$

qui reducitur ad hanc formam

$$\frac{a^{II}(x-1)(x-2)}{1.\ 2} - \frac{2a^{I}(x-1)(x-3)}{1.\ 2} + \frac{a(x-2)(x-3)}{1.\ 2}$$

vel etiam ad hanc

$$\frac{a^{II}}{2}(x-1)(x-2) - \frac{2a^{I}}{2}(x-1)(x-3) + \frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

aut denique ad hanc

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{II}}{x-3} - \frac{2a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right);$$

ideoque ex tribus terminis ipsius seriei definitur.

43. Sit series tertii ordinis a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, &c. eius differentiae primae b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, &c. & differentiae secundae c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c. & tertiae d, d, d, &c. quippe quae sunt constantes.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, &c.

DIFFER. I.

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, &c.

DIFFER. II.

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c.

DIFFER. III.

d, d, d, &c.

 Quia

Quia est $a^{\text{I}}=a+b$; $a^{\text{II}}=a+2b+c$; $a^{\text{III}}=a+3b+3c+d$; $a^{\text{IV}}=a+4b+6c+4d$; &c.; erit terminus generalis, seu is cuius index est x,

$$a+\frac{(x-1)}{1}b+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}c+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}d$$

sicque terminus generalis ex differentiis formabitur.

Cum autem porro sit

$$b=a^{\text{I}}-a;\ c=a^{\text{II}}-2a^{\text{I}}+a;\ d=a^{\text{III}}-3a^{\text{II}}+3a^{\text{I}}-a$$

si hi valores substituantur erit terminus generalis

$$a^{\text{III}}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}-3a^{\text{II}}\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1.\ 2.\ 3}$$
$$+3a^{\text{I}}\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3}-a\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3}$$

qui etiam hoc modo exprimetur, vt sit

$$=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{a^{\text{III}}}{x-4}-\frac{3a^{\text{II}}}{x-3}+\frac{3a^{\text{I}}}{x-2}-\frac{a}{x-1}\right).$$

44. Sit nunc series cuiuscunque ordinis proposita:

INDICES

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, &c.

DIFFER. I.

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, &c.

DIFFER. II.

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c.

DIF-

DIFFER. III.

$d, \quad d^{I}, \quad d^{II}, \quad$ &c.

DIFFER. IV.

$e, \quad e^{I}, \quad$ &c.

DIFFER. V.

$f, \quad$ &c.

ex ipſius ſeriei termino primo, atque ex differentiarum terminis primis b, c, d, e, f, &c. terminus generalis ita exprimetur, vt ſit:

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d +$$
$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \&c.$$

donec ad differentias conſtantes perueniatur. Ex quo patet, ſi nunquam prodeant differentiae conſtantes, terminum generalem per expreſſionem infinitam exhiberi.

45. Quia differentiae ex ipſis terminis ſeriei formantur, ſi earum valores ſubſtituantur, prodibit terminus generalis in eiusmodi forma expreſſus, cuiusmodi pro ſeriebus primi, ſecundi, & tertii ordinis exhibuimus. Scilicet, pro ſeriebus ordinis quarti, erit terminus generalis

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times$$
$$\left(\frac{a^{IV}}{x-5} - \frac{4a^{III}}{x-4} + \frac{6a^{II}}{x-3} - \frac{4a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right).$$

vnde lex, qua ſequentium ordinum termini generales componuntur, facile perſpicitur. Ex his autem patet pro quouis ordine terminum generalem fore functionem ipſius x rationalem integram, in qua maxima ipſius x dimenſio congruat cum ordine, ad quem ſeries refertur. Ita ſerierum primi ordinis erit terminus generalis functio primi gradus, ſecundi ordinis ſecundi gradus, & ita porro.

46. Differentiae autem, vti ſupra vidimus, ex ipſis terminis ſeriei ita reſultant, vt ſit

$$b = a^{I} - a$$
$$b^{I} = a^{II} - a^{I}$$
$$b^{II} = a^{III} - a^{II}$$
&c.
$$c = a^{II} - 2a^{I} + a$$
$$c^{I} = a^{III} - 2a^{II} + a^{I}$$
$$c^{II} = a^{IV} - 2a^{III} + a^{II}$$
&c.
$$d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$
$$d^{I} = a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^{I}$$
$$d^{II} = a^{V} - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II}$$
&c.

Quare, cum in ſeriebus primi ordinis ſint omnes valores ipſius $c = 0$; erit

$a^{II} = 2a^{I} - a$; $a^{III} = 2a^{II} - a^{I}$; $a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}$; &c.

vnde patet has ſeries ſimul eſſe recurrentes, & ſcalam relationis eſſe $2, -1$. Deinde, cum in ſeriebus ſecundi ordi-

ordinis ſint omnes valores ipſius $d = 0$, erit

$$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a;\ a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I};\ \&c.$$

ideoque & hae erunt recurrentes ſcala relatione exiſtente

$$3, -3, +1.$$

Simili modo apparebit omnes huius claſſis ſeries, cuiuscunque ſint ordinis, ſimul ad claſſem ſerierum recurrentium pertinere, atque ita quidem, vt ſcala relationis conſtet ex coefficientibus poteſtatis binomii, vno gradu ſuperioris, quam eſt ordo, ad quem ſeries refertur.

47. Quia vero pro ſeriebus primi ordinis quoque omnes valores ipſius d & e, & ſequentium differentiarum omnium ſunt $= 0$, erit quoque in his

$$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$$
$$a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$$
&c.

aut

$$a^{IV} = 4a^{III} - 6a^{II} + 4a^{I} - a$$
$$a^{V} = 4a^{IV} - 6a^{III} + 4a^{II} - a^{I}$$
&c.

Pertinebunt ergo & hinc ad ſeries recurrentes idque infinitis modis, cum ſcalae relationis eſſe queant:

$$3, -3, +1;\ 4, -6, +4, -1;\ 5, -10, +10, -5, +1;$$
&c.

Similique modo intelligitur vnamquamque ſeriem huius, quam tractamus, claſſis ſimul eſſe ſeriem recurrentem innumeris modis: ſcala enim relationis erit

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1.\ 2}, +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4},$$
&c.

dum-

dummodo n ſit numerus integer maior, quam numerus quo ordo indicatur. Orietur ergo haec ſeries quoque ex euolutione fractionis, cuius denominator eſt $(1-y)^n$, prouti in ſuperiori libro de ſeriebus recurrentibus fuſius eſt oſtenſum.

48. Quemadmodum vidimus, omnium huius claſſis ſerierum, cuiuscunque ſint ordinis, terminos generales eſſe functiones ipſius x rationales integras, ita viciſſim apparebit omnes ſeries, quarum termini generales ſint huiusmodi functiones ipſius x, ad hanc claſſem pertinere, atque tandem ad differentias conſtantes perduci. Et quidem, ſi terminus generalis fuerit functio primi gradus $ax+b$, dum ſeries inde orta erit primi ordinis ſeu arithmetica, differentias primas habebit conſtantes. Sin autem terminus generalis fuerit functio ſecundi gradus in hac forma $axx+bx+c$ contenta, tum ſeries ex eo oriunda, dum loco x ſucceſſiue numeri 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſubſtituuntur, erit ordinis ſecundi, atque differentias ſecundas habebit conſtantes: ſimili modo, terminus generalis tertii gradus ax^3+bx^2+cx+d dabit ſeriem tertii ordinis atque ita porro.

49. Ex termino enim generali non ſolum omnes ſeriei termini inueniuntur, ſed etiam ſeries differentiarum tam primarum quam ſequentium deduci poſſunt. Cum enim, ſi ſeriei terminus primus ſubtrahatur a ſecundo, prodeat ſeriei differentiarum terminus primus: ſecundus autem, ſi ipſius ſeriei terminus ſecundus a tertio auferatur, ita ſeriei differentiarum in obtinebitur terminus,

minus, cuius index eſt x; ſi ipſius ſeriei terminus, cuius index eſt x, ſubtrahatur a ſequente cuius index eſt $x+1$. Quare ſi in termino ſeriei generali loco x ponatur $x+1$, ab hocque valore terminus generalis ſubtrahatur, remanebit terminus generalis ſeriei differentiarum: ſi igitur X fuerit ſeriei terminus generalis, erit eius differentia ΔX, (quae modo in praecedente capite oſtenſo inuenietur, ſi ſtatuatur ibi $\omega = 1$,) terminus generalis ſeriei differentiarum primarum. Simili igitur modo erit $\Delta\Delta X$ terminus generalis ſeriei differentiarum ſecundarum; $\Delta^3 X$ tertiarum, ſicque deinceps.

50. Quodſi autem terminus generalis X fuerit functio rationalis integra, in qua maximus exponens poteſtatis ipſius x ſit n; ex capite praecedente colligitur, eius differentiam ΔX fore functionem vno gradu inferiorem, nempe gradus $n-1$. Hincque porro $\Delta\Delta X$ erit functio gradus $n-2$, & $\Delta^3 X$ functio gradus $n-3$, & ita porro. Quare, ſi X fuerit functio primi gradus, vti $ax+b$, tum eius differentia ΔX erit conſtans $= a$; quae cum ſit terminus generalis ſeriei primarum differentiarum, perſpicitur ſeriem, cuius terminus generalis X ſit functio primi gradus, fore arithmeticam ſeu primi ordinis. Simili modo ſi terminus generalis X fuerit functio ſecundi gradus ob $\Delta\Delta X$ conſtantem, ſeries inde orta differentias ſecundas habebit conſtantes, eritque propterea ordinis ſecundi; ſicque perpetuo, cuius gradus fuerit functio X terminum generalem conſtituens, eiusdem ordinis erit ſeries ex eo nata.

51. Hanc ob rem series poteſtatum numerorum naturalium ad differentias conſtantes perueniunt, vti ex ſequenti ſchemate fit manifeſtum.

POTEST. I.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

DIFFER. I.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

POTEST. II.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, &c.

DIFFER. I.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.

DIFFER. II.

2, 2, 2, 2, 2, 2, &c.

POTEST. III.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, &c.

DIFFER. I.

7, 19, 37, 61, 91, 127, &c.

DIFFER. II.

12, 18, 24, 30, 36, &c.

DIFFER. III.

6, 6, 6, 6, &c.

POTEST. IV.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, &c.

DIFFER. I.

15, 65, 175, 369, 671, 1105, &c.

DIFFER. II.

50, 110, 194, 302, 434, &c.

DIFFER. III.

60, 84, 108, 132, &c.

DIFFER. IV.

24, 24, 24, &c.

Quae

Quae igitur in capite praecedente de differentiis cuiusque ordinis inueniendis ſunt praecepta, ea hic inſeruient ad terminos generales differentiarum quarumuis, quae ex ſeriebus naſcuntur, inueniendos.

52. Si terminus generalis cuiusquam ſeriei fuerit cognitus, eius ope non ſolum omnes eius termini in infinitum inueniri, ſed etiam ſeries retro continuari, eiusque termini, quorum exponentes ſint numeri negatiui, exhiberi poterunt, loco x numeros negatiuos ſubſtituendo: ſic, ſi terminus generalis fuerit $\frac{xx+3x}{2}$, ponendo loco x tam negatiuos quam affirmatiuos indices, ſeries vtrinque continuata erit huiusmodi.

INDICES.

&c. $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ &c.

SERIES.

&c. $+5, +2, 0, -1, -1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27,$ &c.

DIFFER. I.

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ &c.

DIFFER. II.

$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ &c.

Cum igitur ex differentiis terminus generalis formetur, quaeque ſeries ex differentiis retro continuari poterit; ita quidem, vt, ſi differentiae tandem fiant conſtantes, hi termini finite exhiberi, contra vero per expreſſionem infinitam aſſignari queant. Quin etiam ex termino generali

rali ii termini, quorum indices ſunt fracti, definientur, in quo ſerierum INTERPOLATIO continetur.

53. His de termino ſerierum generali monitis, progrediamur ad ſummam, ſeu terminum ſummatorium ſerierum cuiusque ordinis inueſtigandum. Propoſita autem quacunque ſerie, TERMINUS *ſummatorius* eſt functio ipſius x, quae aequalis eſt ſummae tot terminorum ſeriei, quot vnitates continet numerus x. Ita ergo terminus ſummatorius erit comparatus, vt ſi ponatur $x = 1$, prodeat terminus primus ſeriei; ſin autem ponatur $x = 2$, vt prodeat ſumma primi & ſecundi; facto autem $x = 3$, ſumma primi, ſecundi ac tertii; ſicque deinceps. Hinc, ſi ex ſerie propoſita noua ſeries formetur, cuius primus terminus aequalis ſit primo illius, ſecundus aequalis ſummae duorum, tertius aequalis ſummae trium, atque ita porro, haec noua ſeries vocatur illius *ſummatrix*, huiusque ſeriei ſummatricis terminus generalis erit terminus ſummatorius ſeriei propoſitae: ex quo inuentio termini ſummatorii ad inuentionem termini generalis reuocatur.

54. Sit ergo ſeries propoſita haec

$$a,\quad a^{I},\quad a^{II},\quad a^{III},\quad a^{IV},\quad a^{V},\quad \&c.$$

huiusque ſeriei ſummatrix ſit

$$A,\quad A^{I},\quad A^{II},\quad A^{III},\quad A^{IV},\quad A^{V},\quad \&c.$$

erit ex eius natura modo expoſita:

A =

$$A = a$$
$$A^{I} = a + a^{I}$$
$$A^{II} = a + a^{I} + a^{II}$$
$$A^{III} = a + a^{I} + a^{II} + a^{III}$$
$$A^{IV} = a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV}$$
&c.

Hinc ſeriei ſummatricis differentiae erunt:

$$A^{I} - A = a^{I};\ A^{II} - A^{I} = a^{II};\ A^{III} - A^{II} = a^{III};\ \&c.$$

vnde ſeries propoſita termino primo minuta erit ſeries differentiarum primarum ſeriei ſummatricis. Quodſi igitur ſeriei ſummatrici praefigatur terminus, $= 0$ vt habeatur:

$$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},\ \&c.$$

huius ſeries primarum differentiarum erit ipſa ſeries propoſita:

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \&c.$$

55. Hanc ob rem ſeriei propoſitae differentiae primae, erunt differentiae ſecundae ſummatricis, atque differentiae ſecundae illius erunt differentiae tertiae huius, tertiae autem illius quartae huius, atque ita porro. Quare, ſi ſeries propoſita tandem habeat differentias conſtantes, tunc etiam eius ſummatrix ad differentias conſtantes deducetur, eritque igitur ſeries eiusdem naturae, at vno ordine ſuperior. Huiusmodi ergo ſerierum perpetuo terminus ſummatorius exhiberi poterit per expreſſionem finitam. Namque terminus generalis ſeriei:

$$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ \&c.$$

ſeu is, qui indici x conuenit exhibebit ſummam $x - 1$

 ter-

terminorum seriei huius a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, &c. atque si tum loco x scribatur $x+1$, orietur summa x terminorum, ipseque terminus summatorius.

56. Sit igitur Seriei propositae

$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ a^{VI}$, &c.

Series differentiarum primarum

$b,\ b^{I},\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV},\ b^{V},\ b^{VI}$, &c.

Series differentiarum secundarum

$c,\ c^{I},\ c^{II},\ c^{III},\ c^{IV},\ c^{V},\ c^{VI}$, &c.

Series differentiarum tertiarum

$d,\ d^{I},\ d^{II},\ d^{III},\ d^{IV},\ d^{V},\ d^{VI}$, &c.

sicque porro donec ad differentias constantes perueniatur. Deinde formetur series summatrix, quae cum praefixa o in locum termini primi, cum suis differentiis continuis se habebit sequenti modo:

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

SUMMATRIX.

$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V}$, &c.

SERIES PROPOSITA.

$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ a^{VI}$, &c.

DIFFER. I.

$b,\ b^{I},\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV},\ b^{V},\ b^{VI}$, &c.

DIFFER. II.

$c,\ c^{I},\ c^{II},\ c^{III},\ c^{IV},\ c^{V},\ c^{VI}$, &c.

DIFFER. III.

$d,\ d^{I},\ d^{II},\ d^{III},\ d^{IV},\ d^{V},\ d^{VI}$, &c.

erit

erit seriei summatricis terminus generalis, seu qui indici x respondet

$$0+(x-1)a+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}b+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}c+\&c.$$

qui simul exhibet summam $x-1$ terminorum seriei propositae, a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, &c.

57. Quod si ergo in hac summa loco $x-1$ scribatur x, prodibit seriei propositae terminus summatorius summam x terminorum complectens

$$=xa+\frac{x(x-1)}{1.\ 2}b+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}c+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}d+\&c.$$

Hinc, si litterae b, c, d, e, valores ipsis assignatos retineant, erit

SERIEI.

$$a,\ a^{\mathrm{I}},\ a^{\mathrm{II}},\ a^{\mathrm{III}},\ a^{\mathrm{IV}},\ a^{\mathrm{V}},\ \&c.$$

TERMINUS GENERALIS.

$$a+(x-1)b+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}c+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}d+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}e+\&c.$$

ET TERMINUS SUMMATORIUS.

$$xa+\frac{x(x-1)}{1.\ 2}b+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}c+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}d+\&c.$$

Inuento ergo seriei cuiusuis ordinis hoc, quem ostendimus, modo termino generali, non difficulter ex eo terminus summatorius reperietur, quippe qui ex iisdem differentiis conflatur.

58. Hic

58. Hic modus terminum ſummatorium per differentias ſeriei inueniendi imprimis ad eiusmodi ſeries, quae tandem ad differentias conſtantes deducunt, eſt accommodatus; in aliis enim caſibus expreſſio finita non reperitur. Quodſi autem ea, quae ante de indole termini ſummatorii ſunt expoſita, attentius perpendamus, alius modus ſe offert terminum ſummatorium immediate ex termino generali inueniendi, qui multo latius patet, atque in infinitis caſibus ad expreſſiones finitas deducit, quibus prior modus infinitas exhibet. Sit enim propoſita ſeries quaecunque.

$$a, \; b, \; c, \; d, \; e, \; f, \; \&c.$$

cuius terminus generalis, ſeu indici x reſpondens ſit $= X$; terminus autem ſummatorius ſit $= S$, qui cum ſummam tot terminorum ab initio exhibeat, quot numerus x continet vnitates, erit ſumma $x - 1$ terminorum $= S - X$; eritque adeo X differentia expreſſionis $S - X$, cum relinquatur, ſi haec a ſequente S ſubtrahatur.

59. Cum igitur ſit $X = \Delta(S - X)$ differentia eo modo ſumta, quem capite praecedente docuimus, hoc tantum diſcrimine, vt quantitas illa conſtans ω hic nobis ſit $= 1$. Quare, ſi ad ſummas regrediamur, erit $\Sigma X = S - X$, ideoque terminus ſummatorius quaeſitus

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Quaeri ergo debet ſumma functionis X methodo ante tradita, ad eamque addi ipſe terminus generalis X, eritque aggregatum terminus ſummatorius. Quoniam autem

in

in ſummis ſumendis inuoluitur quantitas conſtans, ſiue addenda ſiue ſubtrahenda; ea ad praeſentem caſum accommodari debebit. Manifeſtum autem eſt, ſi ponatur $x=0$, quo caſu numerus terminorum ſummandorum eſt nullus, ſummam quoque fore nullam; ex quo quantitas illa conſtans C ita determinari debebit, vt poſito $x=0$, fiat quoque $S=0$. Poſitis ergo in illa aequatione $S=\Sigma X + X + C$ tam $S=0$ quam $x=0$, valor ipſius C invenietur.

60 Quoniam ergo hic totum negotium ad ſummationem functionum ſupra monſtratam reducitur, ponendo $\omega=1$, exinde depromamus ſummationes traditas; ac primo quidem pro poteſtatibus ipſius x erit

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$

$$\Sigma x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$$

$$\Sigma x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$

$$\Sigma x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$

$$\Sigma x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x$$

quibus accenſeatur ſummatio generalis poteſtatis x^n §. 29. tradita, dummodo ibi vbique loco ω vnitas ſcribatur. Harum ergo formularum ope omnium ſerierum, quarum termini generales ſunt functiones rationales integrae ipſius x, termini ſummatorii expedite inueniri poterunt.

61. Denotet S.X terminum summatorium seriei, cuius terminus generalis est $= X$; eritque, vt vidimus,

$$S.X = \Sigma X + X + C$$

dummodo constans C ita assumatur, vt terminus summatorius S.X euanescat posito $x = 0$. Hinc igitur terminos summatorios serierum potestatum, seu quarum termini generales comprehenduntur in hac forma x^n exprimamus. Posito itaque

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + x^n$$

erit

$$S.x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \tfrac{1}{2} x^n + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n}{2.3} x^{n-1} - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\,3.\,4.\,5} x^{n-3}$$

$$+ \tfrac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} x^{n-5} - \tfrac{3}{10} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-6)}{2.\,3 \ldots 8.\,9} x^{n-7}$$

$$+ \tfrac{5}{6} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-8)}{2.\,3.\,4 \ldots 10.\,11} x^{n-9} - \tfrac{691}{210} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-10)}{2.3 \ldots 12.\,13} x^{n-11}$$

$$+ \tfrac{35}{2} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-12)}{2.3 \ldots 14.\,15} x^{n-13} - \tfrac{3617}{30} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-14)}{2.3 \ldots 16.\,17} x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42} \cdot \frac{n(n-1) \ldots \ldots (n-16)}{2.\,3 \ldots \ldots 18.\,19} x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110} \cdot \frac{n(n-1) \ldots \ldots (n-18)}{2.\,3 \ldots \ldots 20.\,21} x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{6} \cdot \frac{n(n-1) \ldots \ldots (n-20)}{2.\,3 \ldots \ldots 22.\,23} x^{n-21}$$

$$- \frac{1181820455}{546} \cdot \frac{n(n-1) \ldots \ldots (n-22)}{2.\,3 \ldots \ldots 24.\,25} x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2} \cdot \frac{n(n-1) \ldots \ldots (n-24)}{2.\,3 \ldots \ldots 26.\,27} x^{n-25}$$

&c.

62. Hinc ergo summae pro variis ipsius n valoribus ita se habebunt:

$$S.x^0 = x$$
$$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$
$$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$$
$$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$
$$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$
$$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$
$$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$$
$$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$$
$$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x$$
$$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2$$
$$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$$
$$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^2$$
$$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{691}{2730}x$$
$$S.x^{13} = \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{2}x^{13} + \frac{13}{12}x^{12} - \frac{143}{60}x^{10} + \frac{143}{28}x^8 - \frac{143}{20}x^6 + \frac{65}{12}x^4 - \frac{691}{420}x^2$$
$$S.x^{14} = \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{91}{30}x^{11} + \frac{143}{18}x^9 - \frac{143}{10}x^7 + \frac{91}{6}x^5 - \frac{691}{9}x^3 + \frac{7}{6}x$$
$$S.x^{15} = \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{5}{4}x^{14} - \frac{91}{24}x^{12} + \frac{143}{12}x^{10} - \frac{429}{16}x^8 + \frac{455}{12}x^6 - \frac{691}{24}x^4 + \frac{35}{4}x^2$$
$$S.x^{16} = \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{14}{3}x^{13} + \frac{52}{3}x^{11} - \frac{143}{3}x^9 + \frac{260}{3}x^7 - \frac{1382}{15}x^5 + \frac{140}{3}x^3 - \frac{3617}{510}x$$

&c.

quae

vid. Bernoulli Opera T. IV. p. 16. seqq.

quae ſummae ex forma generali vsque ad poteſtatem viceſimam nonam continuari poſſunt. Atque ad huc vlterius progredi liceret, ſi coefficientes illi numerici vlterius eſſent eruti.

63. Ceterum, in his formulis lex quaedam obſervatur, cuius ope quaelibet ex praecedente facile inueniri poteſt, excepto tantum termino vltimo, ſi in eo poteſtas ipſius x prima contineatur: tum enim in ſumma ſequente vnus terminus inſuper accedit. Hoc autem omiſſo, ſi fuerit

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \&c.$$

erit ſequens ſumma:

$$S.x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2} + \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4} - \frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8} - \&c.$$

vnde ſi n fuerit numerus par, ſequens ſumma vera prodit: at ſi n fuerit numerus impar, tum in ſequente ſumma praeterea deſiderabitur terminus vltimus, cuius forma erit $\pm \Phi x$. Interim tamen hic ſine aliis ſubſidiis ita inueniri poterit. Cum enim ſi ponatur $x = 1$, ſumma vnici tantum termini, (hoc eſt terminus primus, qui erit $= 1$,) oriri debeat: ponatur in omnibus terminis iam inventis $x = 1$, ipſaque ſumma ſtatuatur $= 1$, quo facto valor ipſius Φ elicietur, eoque inuento vlterius progredi licebit. Atque hoc pacto omnes iſtae ſummae inueniri potuiſſent. Sic, cum ſit

S. x^5

$$S.x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$

erit

$$S.x^6 = \tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{1}{6}x^7 + \tfrac{6}{6}\cdot\tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{5}{12}x^5 - \tfrac{6}{3}\cdot\tfrac{1}{12}x^3 + \Phi x$$

seu

$$S.x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \Phi x.$$

Ponatur nunc $x = 1$, fiet $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \Phi$ ideoque $\Phi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$, vti ex forma generali inuenimus.

64. Ope harum formularum summatoriarum nunc facile omnium serierum, quarum termini generales sunt functiones ipsius x rationales integrae, termini summatorii inueniri poterunt, hocque multo expeditius, quam praecedente methodo per differentias.

EXEMPLUM I.

Inuenire terminum summatorium huius seriei

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, &c.

cuius terminus generalis est

$$\frac{3xx + x}{2}.$$

Cum terminus generalis constet duobus membris, quaeratur pro vtroque terminus summatorius ex formulis superioribus

$$S.\tfrac{3}{2}xx = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

&

$$S.\tfrac{1}{2}x = \quad . \quad . \quad . \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

eritque

$$S.\frac{3xx+x}{2} = \tfrac{1}{2}x^3 + xx + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x(x+1)^2$$

 qui

qui est terminus summatorius quaesitus. Sic, si ponatur $x = 5$, erit $\frac{5}{2} \cdot 6^2 = 90$, summa quinque terminorum

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

EXEMPLUM II.

Inuenire terminum summatorium seriei

1, 27, 125, 343, 729, 1331, &c.

quae continet cubos numerorum imparium.

Terminus generalis huius seriei est

$$= (2x-1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1,$$

vnde terminus summatorius sequenti modo colligetur.

$$+ 8. \; S.x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$

&

$$- 12. \; S.x^2 = \; . \; - 4x^3 - 6x^2 - 2x$$

atque

$$+ 6. \; S.x = \; . \; . \; . \; . \; . + 3x^2 + 3x$$

denique

$$- 1. \; S.x^0 = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; - x.$$

Erit scilicet summa quaesita $= 2x^4 - x^2 = xx(2xx - 1)$.

Vti, si ponatur $x = 6$ erit $36 . 71 = 2556$ summa sex terminorum seriei propositae $= 1 + 27 + 125 + 343 + 729 + 1331 = 2556$.

65. Quod si terminus generalis fuerit productum ex factoribus simplicibus, tum terminus summatorius facilius reperietur per ea, quae supra §. 32. & sequentibus sunt tradita. Cum enim, posito $\omega = 1$, sit

$\Sigma (x$

$$\Sigma\,(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n-1)\,(x+n)$$

&

$$\Sigma\,(x+n)\,(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n-1)\,(x+n)\,(x+n+1)$$

atque

$$\Sigma(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

&c.

ſi ad has ſummas ipſos terminos generales addamus, ſimulque conſtantem adiiciamus, quae poſito $x = 0$, reddat terminum ſummatorium euaneſcentem, ſequentes obtinebimus terminos ſummatorios.

$$S.(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n)\,(x+n+1) - \tfrac{1}{2}\,n(n+1)$$

&

$$S.(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

atque

$$S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)$$
$$- \tfrac{1}{4}n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$$

ſicque porro.

Si ergo fuerit vel $n = 0$ vel $n = -1$, quantitas conſtans in his ſummis euaneſcit.

66. Seriei ergo 1, 2, 3, 4, 5, &c. cuius terminus generalis eſt $= x$; terminus ſummatorius erit $= \tfrac{1}{2}x(x+1)$ ſeriesque ſummatrix haec: 1, 3, 6, 10, 15, &c. cuius porro terminus ſummatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$, & ſeries ſummatrix haec: 1, 4, 10, 20, 35, &c. Haec vero denuo terminum ſummatorium habebit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, qui

erit

erit terminis generalis feriei 1, 5, 15, 35, 70, &c. huiusque terminus fummatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$. Hae autem feries prae reliquis probe funt notandae, quoniam earum vbique ampliffimus eft vfus. Ex his enim defumuntur coefficientes binomii ad dignitates eleuati, qui quam late pateant, cuique in his rebus parum verfato abunde conftat.

67. Ex his etiam illi termini fummatorii, quos ante ex differentiis elicuimus, facile inueniuntur. Cum enim ibi terminum generalem fequenti forma inuenerimus expreffum

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3} d + \&c.$$

fi cuiusque membri terminum fummatorium quaeramus eosque omnes addamus, habebimus terminum fummatorium huic termino generali conuenientem. Sic cum fit

$$S\ 1 = x$$

&

$$S\ (x-1) = \tfrac{1}{2}\, x\, (x-1)$$

atque

$$S\ (x-1)(x-2) = \tfrac{1}{3}\, x\, (x-1)(x-2)$$

&

$$S\ (x-1)(x-2)(x-3) = \tfrac{1}{4}\, x\, (x-1)(x-2)(x-3)$$

&c.

erit terminus fummatorius quaefitus:

$$xa + \frac{x(x-1)}{1.\ 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} d + \&c.$$

quae

quae forma non discrepat ab ea, quam ante ex differentiis obtinuimus.

68. Deinde etiam haec terminorum summatoriorum inuentio ad fractiones accommodari potest: quia enim supra §. 34. inuenimus esse, ponendo $\omega = 1$

$$\Sigma \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 . \frac{1}{x+n}$$

erit

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 . \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n+1}$$

Simili modo, si ad summas supra inuentas ipsos terminos generales addamus, seu quod idem est, si in illis expressionibus loco x ponamus $x+1$ habebimus

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\frac{1}{2} . \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} + \frac{1}{2} . \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

&

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = -\frac{1}{3} . \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} + \frac{1}{3} . \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

quae formae facile pro lubitu vlterius continuantur.

69. Quia erit $S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$ erit quoque

$$S. \frac{1}{x+n} - S. \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}.$$

Etſi ergo neuter horum duorum terminorum ſummatoriorum ſeorſim exhiberi poteſt, tamen eorum differentia cognoſcitur; hincque in pluribus caſibus ſummae ſerierum ſatis expedite aſſignantur: id quod vſu venit, ſi terminus generalis fuerit fractio, cuius denominator in factores ſimplices reſolui poteſt. Tum enim tota fractio in fractiones partiales reſoluatur; quo facto, ope huius lemmatis mox patebit, vtrum terminus ſummatorius exhiberi queat nec ne?

EXEMPLUM I.

Inuenire terminum ſummatorium ſeriei huius:

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \text{\&c.}$$

cuius terminus generalis eſt $= \frac{2}{xx+x}$.

Terminus iſte generalis per reſolutionem reducitur ad hanc formam $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$. Hinc terminus ſummatorius erit $= 2\,S.\,\frac{1}{x} - 2\,S.\,\frac{1}{x+1}$, qui ergo per praecedens lemma erit $= 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$. Sic, ſi ſit $x = 4$, erit $\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus ſummatorius ſeriei huius:

$$\tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{21},\ \tfrac{1}{45},\ \tfrac{1}{77},\ \tfrac{1}{117},\ \text{\&c.}$$

cuius terminus generalis eſt $= \frac{1}{4xx+4x-3}$.

Quia

Quia termini generalis denominator habet factores $2x-1$ & $2x+3$, is resoluetur in has partes:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

At est

$$S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+2-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

&

$$S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

ergo

$$S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}=2+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

cuius pars octaua dabit terminum summatorium quaesitum nempe

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8x+4}-\frac{1}{8x+12}=\frac{x}{4x+2}+\frac{x}{3(4x+6)}=$$

$$=\frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}.$$

70. Quoniam numeri figurati, quos coefficientes binomii ad dignitates euecti praebent, prae ceteris notari merentur, summas serierum exhibeamus, quarum numeratores sint $=1$, denominatores vero numeri figurati; id quod ex §. 68. facile fiet. Seriei ergo cuius

Terminus generalis eſt	Terminus ſummatorius erit
$\frac{1.\ 2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$
$\frac{1.\ 2.\ 3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1.\ 3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3} - \frac{1.\ 2.\ 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4} - \frac{1.\ 2.\ 3.\ 5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
&c.	&c.

vnde lex, qua iſtae expreſſiones progrediuntur, ſponte apparet. Neque vero hinc terminus ſummatorius, qui conueniat termino generali $\frac{1}{x}$, colligi poteſt, quippe qui per formulam definitam exprimi nequit.

71. Quoniam terminus ſummatorius praebet ſummam tot terminorum, quot vnitates continentur in indice x; manifeſtum eſt harum ſerierum in infinitum continuatarum ſummas obtineri, ſi ponatur index x infinitus: quo caſu expreſſionum modo inuentarum termini poſteriores, ob denominatores in infinitum abeuntes, euaneſcent.

Hinc

Hinc iſtae ſeries infinitae finitas habebunt ſummas, quae erunt

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \&c. = \frac{2}{1}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \&c. = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \&c. = \frac{4}{3}$$

$$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \&c. = \frac{5}{4}$$

$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \&c. = \frac{6}{5}$$

&c.

Omnium ergo ſerierum, quarum termini ſummatorii habentur, in infinitum continuatarum ſummae exhiberi poterunt poſito $x = \infty$, dummodo hoc caſu ſummae fiant finitae: quod quidem euenit, ſi in termino ſummatorio x tot habeat dimenſiones in denominatore, quot habet in numeratore.

CAPUT III.

DE INFINITIS ATQUE INFINITE PARUIS.

72.

Cum omnis Quantitas, quantumuis ſit magna, vlterius augeri poſſit, neque quicquam obſtet, quominus ad datam quantitatem quamcunque alia quantitas eiusdem generis addi queat; omnis quoque quantitas ſine fine augeri poterit: neque enim vnquam tam magna fiet, vt ipſi nihil amplius adiici poſſet. Nulla igitur datur quantitas tam magna, qua maior concipi nequeat: hincque extra dubium erit poſitum, *omnem quantitatem in infinitum augeri poſſe.* Qui enim hoc negauerit, is affirmare cogitur, dari limitem, quem quantitas, cum attigerit, ſuperare nequeat, atque ideo ſtatuere debebit quantitatem, cui nihil amplius adiici poſſet; quod cum ſit abſurdum atque quantitatis notioni aduerſetur, neceſſario concedendum eſt, omnem quantitatem ſine fine continuo magis, hoc eſt, in infinitum augeri poſſe.

73. In ſingulis quantitatum ſpeciebus hoc etiam clarius perſpicietur. Sic, nemo facile reperietur, qui ſtatuerit ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ita vsquam eſſe determinatam, vt vlterius continuari non poſſit. Nullus enim datur numerus, ad quem non inſuper vnitas addi, ſicque numerus ſequens maior exhiberi

queat; hinc ſeries numerorum naturalium ſine fine progreditur, neque vnquam peruenitur ad numerum maximum, quo maior prorſus non detur. Simili modo linea recta nunquam eousque produci poteſt, vt inſuper vlterius prolongari non poſſet. Quibus euincitur, tam numeros in infinitum augeri, quam lineas in infinitum produci poſſe. Quae cum ſint ſpecies quantitatum, ſimul intelligitur, omni quantitate, quantumuis ſit magna, adhuc dari maiorem, hacque denuo maiorem, ſicque augendo continuo vlterius ſine fine, hoc eſt in infinitum, procedi poſſe.

74. Quanquam autem haec ſunt adeo perſpicua, vt qui ea negare vellet, ſibi ipſe contradicere deberet; tamen iſta infiniti doctrina a pluribus, qui eam explicare ſunt conati, tantopere eſt offuſcata, tantisque difficultatibus atque etiam contradictionibus obuoluta, vt, qua ſe extricarent, nulla via pateret. Ex eo, quod quantitas in infinitum augeri poſſit, quidam concluſerunt, dari reuera quantitatem infinitam, eamque ita deſcripſerunt, vt nullum amplius augmentum ſuſcipere poſſit. Hoc autem ipſo ideam quantitatis euertunt, dum eiusmodi quantitatem ſtatuunt, quae vlterius augeri nequeat. Praeterea vero ſecum ipſi infinitum admittentes pugnant; dum enim incrementi, quo quantitas ſit capax, finem faciunt, ſimul negant quantitatem ſine fine augeri poſſe; negant ergo quoque quantitatem in infinitum augeri poſſe, quoniam vtraque locutio congruit: ſicque, dum quantitatem infinitam ſtatuunt, eam ſimul tollunt. Si enim quantitas

titas ſine fine, hoc eſt in infinitum, augeri nequeat, certe nulla quantitas infinita exiſtere poterit.

75. Hinc igitur ex eo ipſo, quod omnis quantitas in infinitum augeri poſſit, ſequi videatur nullam dari quantitatem infinitam. Quantitas enim continuis incrementis aucta, infinita non euadet, niſi iam ſine fine increuerit: quod autem ſine fine fieri debet, id non tanquam iam factum concipi poteſt. Interim tamen non ſolum huiusmodi quantitatem, ad quam incrementis ſine fine congeſtis peruenitur, certo charactere indicare, ſicque debito modo in calculum inducere licet, vti mox fuſius oſtendemus; ſed etiam in mundo eiusmodi caſus exiſtere, vel ſaltem concipi poſſunt, quibus numerus infinitus actu exiſtere videatur. Sic ſi materia in infinitum ſit diuiſibilis, vti plures Philoſophi ſtatuerunt, numerus partium, quibus datum quodque materiae fruſtum conſtat, reuera erit infinitus; ſi enim ſtatueretur finitus, materia certe non in infinitum foret diuiſibilis. Simili modo ſi vniuerſus mundus eſſet infinitus, vti pluribus placuit, numerus corporum mundum componentium finitus certe eſſe non poſſet, foretque ideo quoque infinitus.

76. Haec etiamſi inter ſe pugnare videantur, tamen ſi attentius perpendantur, a cunctis incommodis liberari poterunt. Qui enim ſtatuit materiam in infinitum eſſe diuiſibilem, is negat in diuiſione materiae continua unquam ad partes tam paruas perueniri, quae vlterius diuidi nequeant: nullas ergo materia habebit partes,

tes, vlterius indiuiduas; cum ſingulae particulae, ad quas per continuam diuiſionem iam ſit peruentum, vlterius ſe ſubdiuidi patiantur. Qui igitur dicit hoc caſu numerum partium fore infinitum, is partes vltimas, quae vlterius ſint indiuiduae, intelligit; ad quas cum nunquam perueniatur, & quae propterea nullae ſunt, is has ipſas partes, quae nullae ſunt, numerare conatur. Si enim materia ſine fine continuo vlterius ſubdiuidi poteſt, partibus indiuiduis ſeu ſimplicibus prorſus caret: neque adeo quicquam ſupereſt, quod numerari queat. Hanc obrem qui materiam in infinitum diuiſibilem ſtatuit, is ſimul negat, materiam ex partibus ſimplicibus eſſe compoſitam.

77. Quod ſi autem, dum de partibus alicuius corporis ſeu materiae loquimur, non vltimas ſeu ſimplices, quippe quae nullae ſunt, intelligamus, ſed eas, quas diuiſio reuera produxit; tum, admiſſa hac hypotheſi de diuiſibilitate materiae in infinitum, vnumquodque vel minimum materiae fruſtum non ſolum in plurimas partes diſſecari, ſed etiam nullus numerus tum magnus aſſignari poterit, quo non maior partium ex illo fruſto ſectarum numerus exhiberi queat. Numerus ergo partium non quidem vltimarum, ſed quae ipſae adhuc ſint vlterius diuiſibiles, quae vnumquodque corpus componunt, omni numero aſſignabili erit maior. Simili modo, ſi vniuerſus mundus ſit infinitus, numerus corporum mundum conſtituentium pariter omni aſſignabili erit maior; qui cum finitus eſſe nequeat, ſequitur numerum

infinitum & numerum omni aſſignabili maiorem eſſe nomina ſynonyma.

78. Qui ergo hoc modo diuiſibilitatem materiae in infinitum intuetur, nullis incommodis, quae vulgo huic opinioni imputantur, ſe implicat, nihilque affirmare cogitur, quod ſanae rationi aduerſetur. Qui autem contra materiam in infinitum diuiſibilem eſſe negant, ii in maximas difficultates prolabuntur, ex quibus ſe nullo prorſus modo extrahere poſſunt. Statuere enim coguntur vnumquodque corpus nonniſi in certum partium numerum diſſecari poſſe, ad quas ſi fuerit peruentum, nulla diuiſio vlterior locum inueniat; quas vltimas particulas alii *atomos*, alii *monades* atque *entia ſimplicia* vocant. Cur autem iſtae vltimae particulae nullam amplius diuiſionem admittant, duplex eſſe poteſt cauſa: altera, quod omni extenſione careant; altera quod quidem ſint extenſae, ſed tamen tam durae atque ita comparatae, vt nulla vis ad eas diſſecandas ſufficiat. Vtrumuis patroni huius opinionis dicant, ſeſe aeque difficultatibus implicant.

79. Sint enim vltimae particulae omnis extenſionis expertes, ita vt partibus prorſus careant; qua explicatione quidem ideam entium ſimplicium optime tuentur. At, quemadmodum corpus ex finito huiusmodi particularum numero conſtare queat, concipi nullo modo poteſt. Ponamus pedem cubicum materiae ex mille huiusmodi entibus ſimplicibus eſſe compoſitum, huncque actu in mille partes ſecari; quae ſi ſint aequales, erunt digiti cubici: ſin autem ſint inaequales, aliae erunt

ma-

maiores aliae minores. Vnus igitur digitus cubicus foret ens ſimplex, ſicque maxima reſultaret contradictio; niſi forte in digito cubico ineſſe tantum vnum ens ſimplex, reliquumque ſpatium vacuum eſſe dicere velint: at vero hoc modo continuitatem corporum tollerent, praeterquam quod iſti Philoſophi vacuum plane ex mundo profligant. Quodſi obiiciant numerum entium ſimplicium, quae pedem cubicum materiae conſtituunt, millenario longe eſſe maiorem, nihil omnino lucrantur: incommodum enim, quod ex numero millenario ſequitur, ex quouis alio numero quantumuis magno aeque manat. Hanc difficultatem Acutiſſimus LEIBNIZIVS, primus monadum inuentor, probe perſpexit, dum materiam abſolute in infinitum diuiſibilem eſſe ſtatuit. Neque ergo ante ad monades peruenire licet, quam corpus *actu in infinitum ſit diuiſum.* Hoc ipſo autem exiſtentiam entium ſimplicium, ex quibus corpora conſtent, penitus tollit: nam qui negat corpora ex entibus ſimplicibus eſſe compoſita, & ille qui ſtatuit corpora in infinitum eſſe diuiſibilia, in eadem prorſus ſunt ſententia.

80. Neque magis autem ſibi conſtant, ſi dicunt vltimas corporum particulas extenſas quidem eſſe, ſed ob ſummam duritiem in partes diuelli non poſſe. Cum primum enim in vltimis particulis extenſionem admittunt, eas ex partibus compoſitas eſſe ſtatuunt, quae, vtrum reuera a ſe inuicem ſeparari queant nec ne? parum refert; etiamſi nullam cauſam aſſignare poſſint, vnde tanta durities ſit orta. Nunc autem plerique, qui

diuiſibilitatem materiae in infinitum negant, hoc poſterius incommodum ſatis ſenſiſſe videntur, quia priori ideae partium vltimarum potiſſimum inhaerent; hasque difficultates aliter diluere non poſſunt, niſi aliquot leuiusculis metaphyſicis diſtinctionibus, quae maximam partem eo tendunt, vt ne conſequentiis, quae ſecundum mathematica principia formantur, fidamus: neque dimenſiones in partibus ſimplicibus adhiberi oportere regerunt. At primum demonſtrare debuiſſent, iſtas ſuas partes vltimas, quarum determinatus numerus corpus conſtituat, extenſas prorſus non eſſe.

81. Cum igitur ex hoc labyrintho exitum nullum inuenire, neque obiectionibus debito modo occurrere queant, ad diſtinctiones confugiunt, reſpondentes has obiectiones a ſenſibus atque imaginatione ſuppeditari, in hoc autem negotio ſolum intellectum purum adhiberi oportere; ſenſus autem ac ratiocinia inde pendentia ſaepiſſime fallere. Intellectus ſcilicet purus agnoſcet fieri poſſe, vt pars milleſima pedis cubici materiae omni extenſione careat, quod imaginationi abſurdum videatur. Tum vero, quod ſenſus ſaepenumero fallant, res vera quidem eſt, at nemini minus quam mathematicis opponi poteſt. Matheſis enim nos imprimis a fallacia ſenſuum defendit, atque docet obiecta, quae ſenſibus percipiuntur, aliter reuera eſſe comparata, aliter vero apparere: haecque ſcientia tutiſſima tradit praecepta, quae qui ſequuntur, ab illuſione ſenſuum immunes ſunt. Huiusmodi ergo reſponſionibus, tantum abeſt, vt Metaphyſici ſuam doctrinam tueantur, vt eam potius magis ſuſpectam efficiant.

82. Verum vt ad propoſitum reuertamur, etiamſi quis neget in mundo numerum infinitum reuera exiſtere; tamen in ſpeculationibus mathematicis ſaepiſſime occurrunt quaeſtiones, ad quas, niſi numerus infinitus admittatur, reſponderi non poſſet. Sic, ſi quaeratur ſumma omnium numerorum, qui hanc ſeriem $1+2+3+4+5+$&c. conſtituunt; quia iſti numeri ſine fine progrediuntur, atque creſcunt, eorum omnium ſumma certe finita eſſe non poterit: quo ipſo efficitur, eam eſſe infinitam. Hinc, quae quantitas tanta eſt, vt omni quantitate finita ſit maior, ea non infinita eſſe nequit. Ad huiusmodi quantitatem deſignandam Mathematici vtuntur hoc ſigno ∞, quo denotatur quantitas omni quantitate finita, ſeu aſſignabili, maior. Sic cum Parabola ita definiri queat, vt dicatur eſſe Ellipſis infinite longa, recte affirmare poterimus axem Parabolae eſſe Lineam rectam infinitam.

83. Haec autem Infiniti doctrina magis illuſtrabitur, ſi, quid ſit infinite paruum Mathematicorum, expoſuerimus. Nullum autem eſt dubium, quin omnis quantitas eousque diminui queat, quoad penitus euaneſcat, atque in nihilum abeat. Sed quantitas infinite parua nil aliud eſt niſi quantitas euaneſcens, ideoque reuera erit $=0$. Conſentit quoque ea infinite paruorum definitio, qua dicuntur omni quantitate aſſignabili minora: ſi enim quantitas tam fuerit parua, vt omni quantitate aſſignabili ſit minor, ea certe non poterit non eſſe nulla; namque niſi eſſet $=0$, quantitas aſſignari poſſet ipſi aequalis, quod eſt contra hypotheſin. Quaerenti ergo, quid ſit quantitas

 infi-



infinite parua in Mathesi, respondemus eam esse reuera $=0$: neque ergo in hac idea tanta Mysteria latent, quanta vulgo putantur, & quae pluribus calculum infinite paruorum admodum suspectum reddiderunt. Interim tamen dubia, si quae supererunt, in sequentibus, vbi hunc calculum sumus tradituri, funditus tollentur.

84. Cum igitur ostenderimus, quantitatem infinite paruam reuera esse cyphram, primum occurrendum est obiectioni, cur quantitates infinite paruas non perpetuo eodem charactere o designemus, sed peculiares notas ad eas designandas adhibeamus. Quia enim omnia nihila sunt inter se aequalia, superfluum videtur variis signis ea denotare. Verum quamquam duae quaeuis cyphrae ita inter se sunt aequales, vt earum differentia sit nihil: tamen, cum duo sint modi comparationis, alter arithmeticus, alter geometricus; quorum illo differentiam, hoc vero quotum ex quantitatibus comparandis ortum spectamus; ratio quidem arithmetica inter binas quasque cyphras est aequalitatis, non vero ratio geometrica. Facillime hoc perspicietur ex hac proportione geometrica $2 : 1 = 0 : 0$, in qua terminus quartus est $=0$, vti tertius. Ex natura autem proportionis, cum terminus primus duplo sit maior quam secundus, necesse est, vt & tertius duplo maior sit quam quartus.

85. Haec autem etiam in vulgari Arithmetica sunt planissima: cuilibet enim notum est, cyphram per quemvis numerum multiplicatam dare cyphram, esseque $n.0=0$,

sicque

ficque fore $n:1=0:0$. Vnde patet fieri poſſe, vt duae cyphrae quamcunque inter ſe rationem geometricam teneant, etiamſi, rem arithmetice ſpectando, earum ratio ſemper ſit aequalitatis. Cum igitur inter cyphras ratio quaecunque intercedere poſſit, ad hanc diuerſitatem indicandam conſulto varii characteres vſurpantur; praeſertim tum, cum ratio geometrica, quam cyphrae variae inter ſe tenent, eſt inueſtiganda. In calculo autem infinite paruorum nil aliud agitur, niſi vt ratio geometrica inter varia infinite parua indagetur, quod negotium propterea, niſi diuerſis ſignis ad ea indicanda vteremur, in maximam confuſionem illaberetur, neque vllo modo expediri poſſet.

86. Si ergo, prouti in Analyſi infinitorum modus ſignandi eſt receptus, denotet dx quantitatem infinite paruam, erit vtique tam $dx=0$, quam $adx=0$, denotante a quantitatem quamcunque finitam. Hoc tamen non obſtante erit ratio geometrica $adx:dx$ finita, nempe vt $a:1$; & hanc obrem haec duo infinite parua dx & adx, etiamſi vtrumque ſit $=0$, inter ſe confundi non poſſunt, ſi quidem eorum ratio inueſtigetur. Simili modo, ſi diuerſa occurrunt infinite parua dx & dy, etiamſi vtrumque ſit $=0$, tamen eorum ratio non conſtat. Atque in inueſtigatione rationis inter duo quaeque huiusmodi infinite parua omnis vis calculi differentialis verſatur. Vſus autem huius comparationis, etiamſi primo intuitu admodum exiguus videatur, tamen ampliſſimus deprehenditur, atque adhuc indies magis elucet.

87. Cum

87. Cum igitur infinite paruum ſit reuera nihil, patet quantitatem finitam neque augeri neque diminui, ſi ad eam infinite paruum vel addamus vel ab ea ſubtrahamus. Sit a quantitas finita atque dx infinite parua, erit tam $a + dx$, quam $a - dx$, & generaliter $a \pm ndx = a$. Siue enim relationem inter $a \pm ndx$ & a arithmetice intueamur ſiue geometrice, vtroque caſu ratio aequalitatis deprehendetur. Arithmetica quidem ratio aequalitatis manifeſta eſt; cum enim ſit $ndx = 0$, erit $a \pm ndx - a = 0$: geometrica vero ratio aequalitatis inde patet, quod ſit $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$. Hinc ſequitur canon ille maxime receptus, quod *infinite parua prae finitis euaneſcant, atque adeo horum reſpectu reiici queant.* Quare illa obiectio, qua Analyſis infinitorum rigorem geometricum negligere arguitur, ſponte cadit, cum nil aliud reiiciatur, niſi quod reuera ſit nihil. Ac propterea iure affirmare licet, in hac ſublimiori ſcientia rigorem geometricum ſummum, qui in Veterum libris deprehenditur, aeque diligenter obſeruari.

88. Quoniam quantitas infinite parua dx reuera eſt $= 0$, eius quoque quadratum dx^2, cubus dx^3, & quaevis alia poteſtas affirmatiuum habens exponentem erit $= 0$, ideoque aeque prae quantitatibus finitis euaneſcent. At vero etiam quantitas infinite parua dx^2 prae ipſa dx euaneſcit; erit enim $dx \pm dx^2$ ad dx in ratione aequalitatis, ſiue comparatio arithmetice ſiue geometrice inſtituatur. De priori quidem dubium eſt nullum, at geometrice comparando erit

dx -

$$dx + dx^2 : dx = \frac{dx + dx^2}{dx} = 1 + dx = 1.$$

Pari modo erit $dx + dx^3 = dx$, & generaliter $dx + dx^{n+1} = dx$, dummodo ſit n numerus nihilo maior: erit enim ratio geometrica $dx + dx^{n+1} : dx = 1 + dx^n$; ideoque, ob $dx^n = 0$, ratio aequalitatis. Si igitur vti in poteſtatibus fit, vocetur dx infinite paruum primi ordinis, dx^2 ſecundi ordinis, dx^3 tertii ordinis & ita porro, manifeſtum eſt prae infinite paruis primi ordinis, euaneſcere infinite parua altiorum ordinum.

89. Simili modo oſtendetur infinite parua tertii ac ſuperiorum ordinum euaneſcere prae infinite paruis ordinis ſecundi; atque in genere infinite parua cuiusque ordinis ſuperioris euaneſcere prae infinite paruis ordinis inferioris. Ita ſi m fuerit numerus minor quam n, erit $adx^m + bdx^n = adx^m$, quia dx^n euaneſcit prae dx^m, vti oſtendimus. Hocque etiam in exponentibus fractis habet locum; ita dx euaneſcet prae $\sqrt{dx}$ ſeu $dx^{\frac{1}{2}}$, eritque $a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}$. Quodſi autem exponens ipſius dx ſit $= 0$, erit $dx^0 = 1$, quamuis ſit $dx = 0$; hinc poteſtas dx^n, cum fiat $= 1$, ſi ſit $n = 0$, ex finita ſtatim fit quantitas infinite parua, atque exponens n nihilo fit maior. Hinc ergo infiniti ordines infinite paruorum exiſtunt, quae etſi omnia ſunt $= 0$, tamen inter ſe probe diſtingui debent, ſi ad earum relationem mutuam, quae per rationem geometricam explicatur, attendamus.

90. Stabilita notione infinite paruorum facilius indolem infinitorum seu infinite magnorum exponere poterimus. Notum est valorem fractionis $\frac{1}{z}$ eo maiorem euadere, quo magis diminuatur denominator z; quare si z fiat quantitas omni assignabili quantitate minor, seu infinite parua, necesse est vt valor fractionis $\frac{1}{z}$ fiat omni assignabili quantitate maior, ideoque infinitus. Quamobrem si vnitas seu quaeuis alia quantitas finita diuidatur per infinite paruum seu o, quotus erit infinite magnus, ideoque quantitas infinita. Cum igitur hoc signum ∞ denotet quantitatem infinite magnam, ista habebitur aequatio $\frac{a}{dx} = \infty$; cuius veritas quoque hinc patet, quod sit inuertendo $\frac{a}{\infty} = dx = 0$. Namque quo maior statuitur fractionis $\frac{a}{z}$ denominator z, eo minor fit fractionis valor, atque si z fiat quantitas infinite magna seu $z = \infty$, necesse est, vt fractionis valor $\frac{a}{\infty}$ fiat infinite paruus.

91. Qui vtrumuis horum ratiociniorum negauerit, eum in maxima incommoda prolabi, atque adeo certissima Analyseos fundamenta euertere necesse est. Qui enim statuit valorem fractionis $\frac{a}{0}$ esse finitum vti b, vtrinque per denominatorem multiplicando prodiret $a = 0 . b$, atque ideo quantitas finita b per nihil o multiplicata praeberet

beret quantitatem finitam a, quod esset absurdum. Multo minus valor ille b fractionis $\frac{a}{0}$ poterit esse $=0$: nam 0 per 0 multiplicata quantitatem a producere nullo modo poterit. In idem absurdum incidit, qui negat esse $\frac{a}{\infty}=0$, ei enim dicendum erit esse $\frac{a}{\infty}=$ quantitati finitae b: quare cum ex aequatione $\frac{a}{\infty}=b$ legitime sequatur haec $\infty=\frac{a}{b}$, foret valor fractionis $\frac{a}{b}$, cuius numerator ac denominator sunt quantitates finitae, infinite magnus, quod perinde foret absurdum. Neque vero etiam valores fractionum $\frac{a}{0}$ & $\frac{a}{\infty}$ imaginarii statui possunt; propterea quod valor fractionis, cuius numerator est finitus denominator vero imaginarius, neque infinite magnus neque infinite paruus esse potest.

92. Quantitas ergo infinite magna, ad quam nos haec consideratio perduxit, & quae sola in Analysi infinitorum locum habet, commodissime definitur dicendo, quantitatem infinite magnam esse quotum, qui ex diuisione quantitatis finitae per infinite paruam oritur. Vicissim ergo erit quantitas infinite parua quotus, qui oritur ex diuisione quantitatis finitae per infinite magnam. Quare, cum eiusmodi proportio geometrica subsistat, vt sit quantitas infinite parua ad finitam, ita finita ad infinite magnam; vti quantitas infinita infinities maior est quam finita, ita quantitas finita infinities maior erit quam infinite

nite parua. Huiusmodi igitur locutiones, quibus plures offenduntur, non ſunt improbandae, cum certiſſimis innitantur principiis. Deinde etiam ex aequatione $\frac{a}{0} = \infty$ ſequitur fieri poſſe, vt nihil per quantitatem infinite magnam multiplicatum producat quantitatem finitam, quod alienum videri poſſet, niſi planiſſime per legitimam conſequentiam eſſet deductum.

93. Quoniam inter infinite parua, ſi ſecundum rationem geometricam inter ſe comparantur, maximum deprehenditur diſcrimen, ita quoque inter quantitates infinite magnas multo maior differentia intercedit, cum non ſolum geometrice ſed etiam arithmetice comparatae diſcrepent. Ponatur quantitas illa infinita, quae ex diviſione quantitatis finitae a per infinite paruam dx oritur, $= A$, ita vt ſit $\frac{a}{dx} = A$: erit vtique $\frac{2a}{dx} = 2A$ & $\frac{na}{dx} = nA$; cum igitur & nA ſit quantitas infinita, ſequitur inter quantitates infinite magnas rationem quamcunque locum habere poſſe. Hincque, ſi quantitas infinita per numerum finitum ſiue multiplicetur, ſiue diuidatur, prodibit quantitas infinita. Neque ergo de quantitatibus infinitis negari poteſt, eas vlterius augeri poſſe. Facile autem perſpicitur, ſi ratio geometrica, quam duae quantitates infinitae inter ſe tenent, non fuerit aequalitatis, multo minus earum rationem arithmeticam aequalitatis eſſe poſſe, cum potius earum differentia ſemper ſit infinite magna.

94. Quan-

94. Quantumuis autem nonnullis idea infiniti, qua in Mathesi vtimur, suspecta videatur, qui hanc ob caussam Analysin infinitorum profligandam arbitrantur; tamen hac idea ne in partibus quidem Matheseos triuialibus carere possumus. In Arithmetica enim, vbi doctrina logarithmorum tradi solet, logarithmus cyphrae & negatiuus & infinite magnus statuitur, neque quisquam est tam mente captus, vt hunc logarithmum vel finitum vel adeo nihilo aequalem dicere audeat. In Geometria autem & Trigonometria hoc clarius apparet; quis enim vnquam negabit tangentem secantemue auguli recti non esse infinite magnam? & cum rectangulum ex tangente in cotangentem sit radii quadrato aequale, cotangens autem anguli recti fit $= 0$; in Geometria adeo concedi debet, productum ex nihilo & infinito esse posse finitum.

95. Cum sit $\frac{a}{dx}$ quantitas infinita A, patet hanc quantitatem $\frac{A}{dx}$ fore quantitatem infinities maiorem, quam A: est enim $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, hoc est vt numerus finitus ad infinite magnum. Dantur ergo inter quantitates infinite magnas eiusmodi relationes, vt aliae aliis infinities maiores esse queant. Sic $\frac{a}{dx^2}$ erit quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx}$; posito enim $\frac{a}{dx} = A$ erit $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Simili modo erit $\frac{a}{dx^3}$ quantitas infinita infi-

nities maior quam $\frac{a}{dx^2}$, ideoque infinities infinities maior quam $\frac{a}{dx}$. Dantur ergo infiniti gradus infinitorum, quorum quisque infinities maior eſt quam praecedentes: atque adeo ſi numerus m vel tantillum maior ſit quam n, erit $\frac{a}{dx^m}$ quantitas infinita infinities maior quam quantitas infinita $\frac{a}{dx^n}$.

96. Quemadmodum in quantitatibus infinite paruis dantur rationes geometricae inaequales, cum tamen rationes arithmeticae omnes ſint aequales: ita in quantitatibus infinite magnis dantur rationes geometricae aequales, cum tamen arithmeticae ſint quantumuis inaequales. Si enim a & b denotent quantitates finitas, hae duae quantitates infinitae $\frac{a}{dx} + b$ & $\frac{a}{dx}$ rationem geometricam habent aequalitatis; erit enim quotus ex earum diuiſione ortus $= 1 + \frac{b\,dx}{a} = 1$ ob $dx = 0$: interim tamen, ſi arithmetice comparentur, ob differentiam $= b$, ratio erit inaequalitatis. Simili modo $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}$ ad $\frac{a}{dx^2}$ rationem geometricam habet aequalitatis, exponens enim rationis eſt $= 1 + dx = 1$; verum tamen differentia eſt $\frac{a}{dx}$ ideoque infinita. Hinc ſi ad rationem geometricam ſpectemus, infinite magna inferiorum graduum

duum prae infinite magnis ſuperiorum graduum euaneſcunt.

97. His de gradibus infinitorum praemonitis, mox apparebit fieri poſſe, vt productum ex quantitate infinite magna in infinite paruam non ſolum quantitatem finitam producat, quod ſupra eueniſſe vidimus; ſed etiam huiusmodi productum eſſe poterit ſiue infinite magnum ſiue infinite paruum. Sic quantitas infinita $\frac{a}{dx}$, ſi per infinite paruam dx multiplicetur, dat productum finitum $= a$; ſin autem $\frac{a}{dx}$ multiplicetur per infinite paruum dx^2, vel dx^3, vel alius ſuperioris ordinis, productum erit vel adx, vel adx^2, vel adx^3 &c. ideoque infinite paruum. Eodem modo intelligetur, ſi quantitas infinita $\frac{a}{dx^2}$ multiplicetur per infinite paruam dx, productum fore infinite magnum: atque generatim ſi $\frac{a}{dx^n}$ multiplicetur per bdx^m, productum $abdx^{m-n}$ erit infinite paruum ſi m ſuperat n; finitum ſi m aequat n; & infinite magnum ſi m ſuperatur ab n.

98. Quantitates tam infinite paruae, quam infinite magnae in ſeriebus numerorum ſaepiſſime occurrunt, in quibus cum ſint numeris finitis permixtae, ex iis luculenter patebit, quemadmodum ſecundum leges continuitatis a quantitatibus finitis ad infinite magnas atque infinite paruas tranſitio fiat. Conſideremus primum ſeriem nume-

numerorum naturalium, quae ſimul retro continuata erit

&c. $-4-3-2-1+0+1+2+3+4+$ &c.

Numeri ergo continuo decreſcendo praebent tandem o ſeu infinite paruum, vnde vlterius continuati negatiui euadunt. Quamobrem hinc intelligitur a numeris finitis affirmatiuis decreſcentibus tranſiri per o ad negatiuos creſcentes. Sin autem eorum numerorum quadrata ſpectentur, quia omnia ſunt affirmatiua

&c. $16+9+4+1+0+1+4+9+16+$ &c.

erit o quoque tranſitus numerorum affirmatiuorum decreſcentium ad affirmatiuos creſcentes; atque ſi ſigna mutentur, erit quoque o tranſitus numerorum negatiuorum decreſcentium ad negatiuos creſcentes.

99. Si ſeries conſideretur, cuius terminus generalis eſt $\sqrt{x}$, quae etiam retro continuata erit huiusmodi

&c. $+\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+$ &c.

ex qua patet o, quoque tanquam limitem conſiderari poſſe, per quem a quantitatibus realibus ad imaginaria tranſeatur. Si iſti termini tanquam applicatae curuarum conſiderentur, perſpicitur, ſi eae fuerint affirmatiuae atque eousque decreuerint vt tandem euaneſcant, tum eas vlterius continuatas vel fieri negatiuas, vel iterum affirmatiuas, vel adeo imaginarias. Idem eueniet, ſi applicatae primum fuerint negatiuae; tum enim aeque poſtquam euanuerint, ſi vlterius continuentur, vel affirma-

tiuae

tiuae fient, vel negatiuae vel imaginariae; quorum phaenomenorum plurima exempla praebet doctrina de lineis curuis in libro praecedente tractata.

100. Eodem modo in feriebus occurrunt faepe termini infiniti: fic in ferie harmonica, cuius terminus generalis eft $\frac{1}{x}$, indici $x = 0$ refpondebit terminus infinite magnus $\frac{1}{0}$; totaque feries ita fe habebit:

$$\&c. - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \&c.$$

A dextra ergo ad finiftram progrediendo termini crefcunt, ita vt $\frac{1}{0}$ iam fit infinite magnus, quem cum tranfierint, fient negatiui decrefcentes. Hinc quantitas infinite magna fpectari poteft tanquam limes, per quem numeri affirmatiui progreffi fiunt negatiui, & viciffim: vnde pluribus vifum eft, numeros negatiuos confiderari poffe, tanquam infinito maiores, propterea quod in hac ferie termini continuo crefcentes, poftquam infinitum attigerint, abeant in negatiuos. At vero fi ad feriem, cuius terminus generalis eft $\frac{1}{xx}$, attendamus, poft tranfitum per infinitum rurfus prodeunt termini affirmatiui.

$$\&c. \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \&c.$$

quos tamen nemo infinito maiores dixerit.

101. Saepenumero quoque in feriebus terminus infinitus conftituit limitem, terminos reales ab imagina-

riis segregantem, vti fit in serie hac, cuius terminus generalis est $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\&c. + \frac{1}{\sqrt{-3}} + \frac{1}{\sqrt{-2}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{0} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \&c.$$

neque tamen hinc sequitur, imaginaria esse infinito maiora: quoniam ex serie ante allata

$$\&c. + \sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \&c.$$

aeque sequeretur, imaginaria esse nihilo minora. Deinde vero etiam a terminis realibus transitus ad imaginarios exhiberi potest, quorum limes neque sit 0 neque ∞, vti fit, si terminus generalis fuerit $1 + \sqrt{x}$. His autem casibus, cum ob irrationalitatem quilibet terminus geminum habeat valorem, in limite inter realia & imaginaria semper bini illi valores fiunt inter se aequales. At quoties termini, qui ante erant affirmatiui, abeunt in negatiuos, transitus semper fit per limitem vel infinite paruum, vel infinite magnum, quae omnia ex lege continuitatis, quam in lineis curuis deprehendimus, clarius elucent.

102. Ex summatione quoque serierum in infinitum excurrentium plura hic afferri possunt, quae cum ad hanc infiniti doctrinam magis illustrandam, tum vero ad plura dubia, quae in hoc negotio suboriri solent, delenda inseruiunt. Ac primo quidem, si series constet ex terminis aequalibus, vt

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

ea-

eaque fine fine, hoc eſt in infinitum continuetur, nullum certe eſt dubium, quin omnium horum terminorum ſumma maior ſit omni numero aſſignabili; eaque propterea infinita ſit neceſſe eſt. Hoc quoque confirmat eius origo, dum oritur ex euolutione fractionis

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.$$

ponendo $x = 1$; erit ergo

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

ideoque ſumma $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ infinito.

103. Quamuis autem hic nullum dubium naſci queat, cum idem numerus finitus infinities ſumtus in infinitum abire debeat; tamen ipſa origo ex ſerie generali

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

grauiſſima incommoda afferre videtur: ſi enim pro x ſucceſſiue ponantur numeri 1, 2, 3, &c. ſequentes ſeries cum ſuis ſummis prodibunt.

A . . . $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = \frac{1}{1-1} =$ infinito

B . . . $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \&c. = \frac{1}{1-2} = -1$

C . . . $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \&c. = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

D . . . $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \&c. = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

&c.

Cum igitur ſeries B ſingulos terminos praeter primum habeat maiores, quam ſeries A, ſumma ſeriei B neceſſario multo maior eſſe deberet, quam ſumma ſeriei A: interim tamen iſte calculus oſtendit ſeriei A ſummam infinitam, ſeriei B vero ſummam negativam, hoc eſt nihilo minorem, quod concipi non poteſt. Multo minus cum ſolitis ideis conciliari poteſt, quemadmodum huius eſt ſequentium ſerierum C, D, &c. ſummae fiant negatiuae, cum tamen omnes termini ſint affirmatiui.

104. Ob hanc rationem opinio ſupra allata multis probabilis videri ſolet, quantitates ſcilicet negatiuas quandoque conſiderari poſſe tanquam infinito maiores ſeu plus quam infinitas; & cum etiam numeros vltra nihil diminuendo perueniatur ad negatiuos, diſcrimen ſtatuunt inter numeros negatiuos huiusmodi $-1, -2, -3$, &c. & huiusmodi $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-1}, \frac{+3}{-1}$, &c. illos nihilo minores, hos vero infinito maiores dicendo. Verumtamen hoc pacto difficultatem non tollunt, quam ſuggerit haec ſeries

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c. = \frac{1}{(1-x)^2}$$

vnde oriuntur ſequentes ſeries:

$$A \;.\;.\; 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c. = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{infinito}$$

$$B \;.\;.\; 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \&c. = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$$

vbi cum ſinguli termini ſeriei B ſint maiores, quam ſinguli termini ſeriei A, primis ſolis exceptis, quemadmodum

dum ſumma ſeriei A ſit infinita, ſeriei B vero ſumma aequalis 1, hoc eſt ſoli termino primo, ex illo principio explicari omnino nequit.

105. Quoniam autem ſi vellemus negare eſſe $-1 = \frac{+1}{-1}$, & $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$, firmiſſima Analyſeos fundamenta collaberentur, illa ante commemorata explicatio prorſus admitti non poteſt. Quin potius negare debebimus, illas, quas formulae generales ſuppeditauerant, ſummas eſſe veras. Cum enim hae ſeries ex continua diuiſione oriantur, dum reſiduum continuo vlterius diuiditur: reſiduum autem perpetuo fiat maius, quo longius progrediamur, id nunquam negligere poterimus; atque minime reſiduum vltimum, hoc eſt quod in diuiſione infiniteſima remanet, omitti poteſt, quippe quod ſit infinite magnum. Quia autem hoc in ſuperioribus ſeriebus non obſeruatur, dum nullius reſidui ratio habetur, mirum non eſt, eas ſummationes ad abſurdum deducere. Haecque reſponſio, vti eſt ex ipſa ſerierum geneſi petita, ita quoque eſt veriſſima, atque omnem dubitationem tollit.

106. Quo hoc clarius appareat, contemplemur euolutionem fractionis $\frac{1}{1-x}$, vti in terminis primum finitis tantum abſoluitur. Erit ergo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}.$$

&c.

qui ergo dicere vellet huius ſeriei finitae $1 + x + x^2 + x^3$ ſummam eſſe $\frac{1}{1-x}$, is erraret a vero quantitate $\frac{x^4}{1-x}$: & qui ſummam huius ſeriei

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^{1000}$$

ſtatuere vellet $= \frac{1}{1-x}$, is erraret quantitate $\frac{x^{1001}}{1-x}$ qui error ſi x ſit numerus unitate maior, foret maximus.

107. Ex his perſpicuum eſt eum, qui eiusdem ſeriei in infinitum continuatae ſeu huius:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^{\infty}$$

ſummam ſtatuere velit $= \frac{1}{1-x}$, a veritate eſſe aberraturum quantitate $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; quae ſi ſit $x > 1$ vtique erit infinite magna. Simul vero hinc ratio patet, cur ſeriei in infinitum continuatae

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c.$$

ſum-

summa reuera sit $= \frac{1}{1-x}$, si fuerit x fractio vnitate minor, tum enim error $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ fit infinite paruus, ideoque nullus; cuius propterea ratio tuto potest negligi. Sic posito $x = \frac{1}{2}$, erit reuera

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

similiterque reliquarum serierum, si x sit fractio vnitate minor, summa vera hoc modo indicatur.

108. Haec eadem responsio valet de summis serierum diuergentium, in quibus signa $+$ & $-$ alternantur, quae vulgo ex eadem formula exhiberi solent, ponendo pro x numeros negatiuos. Cum enim sit:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \&c.$$

nisi vltimi residui ratio habeatur, foret:

A . . . . $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c. = \frac{1}{2}$

B . . . . $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \&c. = \frac{1}{3}$

C . . . . $1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 - \&c. = \frac{1}{4}$

&c.

Patet autem seriei secundae B summam ideo non posse esse $= \frac{1}{3}$, cum quo plures termini actu summentur, aggregata eo magis ab $\frac{1}{3}$ recedant. Perpetuo autem cuiusque seriei summa debet esse limes, ad quem eo propius perueniatur, quo plures termini actu addantur.

109. Ex his quidam concluserunt huiusmodi series, quae vocantur diuergentes, prorsus nullas habere summas fixas;

fixas; propterea quod colligendis actu terminis ad nullum limitem fiat appropinquatio, qui pro summa seriei in infinitum continuatae haberi posset: quae sententia, cum istae summae iam ob neglecta vltima residua erroneae sint ostensae, veritati maxime est consentanea. Interim tamen contra eam summo iure obiici potest, has memoratas summas, quantumuis a veritate abhorrere videantur, tamen nunquam in errores inducere; quin potius iis admissis plurima praeclara esse eruta, quibus si istas summationes prorsus reiicere vellemus, carendum esset. Neque vero hae summae, si essent falsae, perpetuo ad veritatem nos ducere possent; quin potius, cum non parum sed infinite a veritate discrepent, nos quoque in infinitum a vero seducere deberent. Quod tamen cum non eueniat, difficillimus nobis restat nodus soluendus.

110. Dico igitur in voce *summae* latere totam difficultatem; si enim *summa* seriei, vt vulgo vsus fert, sumatur pro aggregato omnium eius terminorum actu collectorum, tum dubium est nullum, quin earum tantum serierum in infinitum excurrentium summae exhiberi queant, quae sint conuergentes, atque continuo propius ad certum statumque valorem deducant, quo plures termini actu colligantur. Series autem diuergentes, quarum termini non decrescunt, siue signa + & — alternentur siue secus, prorsus nullas habebunt summas fixas; si quidem vox summae hoc sensu pro aggregato omnium terminorum accipiatur. At vero in iis casibus, quorum meminimus, quibus ex istiusmodi summis erroneis veritas tamen

men elicitur; id non fit, quatenus expreſſio finita, verbi gratia $\frac{1}{1-x}$, eſt ſumma ſeriei $1+x+x^2+x^3+$ &c. ſed quatenus ea expreſſio euoluta hanc ſeriem praebet; ſicque in hoc negotio nomen ſummae prorſus omitti poſſet.

111. Haec igitur incommoda, hasque apparentes contradictiones penitus euitabimus, ſi voci *ſummae* aliam notionem, atque vulgo fieri ſolet, tribuamus. Dicamus ergo ſeriei cuiusque infinitae *ſummam* eſſe expreſſionem finitam, ex cuius euolutione illa ſeries naſcatur. Hocque ſenſu ſeriei infinitae $1+x+x^2+x^3+$ &c. ſumma reuera erit $=\frac{1}{1-x}$, quia illa ſeries ex huius fractionis euolutione oritur: quicunque numerus loco x ſubſtituatur. Hoc pacto, ſi ſeries fuerit conuergens, iſta noua vocis ſummae definitio, cum conſueta congruet; & quia diuergentes nullas habent ſummas proprie ſic dictas, hinc nullum incommodum ex noua hac appellatione orietur. Denique ope huius definitionis vtilitatem ſerierum diuergentium tueri, atque ab omnibus iniuriis vindicare poterimus.

CAPUT IV.

DE DIFFERENTIALIUM CUIUSQUE ORDINIS NATURA.

112.

In capite primo vidimus, ſi quantitas variabilis x accipiat augmentum $= \omega$, tum cuiusuis functionis ipſius x augmentum inde oriundum tali forma exprimi $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 +$ &c. ſiue haec expreſſio ſit finita ſiue in infinitum excurrat. Functio ergo y, ſi in ea loco x ſcribatur $x + \omega$, valorem ſequentem induet:

$$y^{I} = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{\&c.}$$

a quo, ſi valor prior y ſubtrahatur, remanebit differentia functionis y, quae ita exprimetur

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{\&c.}$$

atque cum valor ipſius x ſequens ſit $x^{I} = x + \omega$, erit differentia ipſius x, nempe $\Delta x = \omega$. Litterae autem P, Q, R, &c. denotant functiones ipſius x pendentes ab y, quas capite primo inuenire docuimus.

113. Hinc ergo quocunque augmento ω augeatur quantitas variabilis x, ſimul definiri poterit augmentum, quod cuique ipſius x functioni y accedit; dummodo pro quouis ipſius y valore functiones P, Q, R, S, &c. definire valeamus. In hoc autem capite, atque in vniuerſa Analyſi infinitorum augmentum illud ω, quo quantitatem variabilem x creſcere ſumſimus, ſtatuemus infinite par-

paruum, atque adeo euanescens, seu $=0$. Vnde manifestum est, incrementum seu differentiam functionis y quoque fore infinite paruam. Cum autem in hac hypothesi singuli termini expressionis

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

prae antecedentibus euanescant, (88. & seqq.), solus primus $P\omega$ remanebit, eritque propterea hoc casu, quo ω est infinite paruum, differentia ipsius y nempe $\Delta y = P\omega$.

114. Erit ergo Analysis infinitorum, quam hic tractare caepimus, nil aliud, nisi casus particularis methodi differentiarum in capite primo expositae, qui oritur, dum differentiae, quae ante finitae erant assumtae, statuantur infinite paruae. Quo igitur iste casus, quo vniuersa Analysis infinitorum continetur, a methodo differentiarum distinguatur, cum peculiaribus nominibus, tum etiam signis ad differentias istas infinite paruas denotandas vti conueniet. Differentias igitur infinite paruas hic cum LEIBNIZIO *differentialia* vocabimus; atque cum differentiarum in primo capite diuersos ordines constituissemus, ex iis nunc facile quoque intelligetur, quid differentialia prima, secunda, tertia, &c. cuiusque functionis significent. Loco characteris autem Δ, quo ante differentias indicaueramus, nunc vtemur charactere d; ita vt dy significet differentiale primum ipsius y; ddy differentiale secundum; d^3y tertium & ita porro.

115. Quoniam differentias infinite paruas, quas hic tractamus, *differentialia* vocamus, hinc totus calculus, quo differentialia inuestigantur atque ad vsum accommodantur, appellari solet *Calculus differentialis.* Mathematici Angli, inter quos primum NEWTONUS aeque ac LEIBNIZIUS inter Germanos hanc nouam Analyseos partem excolere coepit, aliis tam nominibus quam signis vtuntur. Differentias enim infinite paruas, quas nos differentialia vocamus, potissimum *fluxiones* nominare solent, interdum quoque *incrementa:* quae voces vti latino sermoni magis conueniunt, ita quoque res, quas denotant, satis commode exprimunt. Quantitas enim variabilis crescendo continuo alios atque alios valores recipiens tanquam fluens considerari potest, hincque vox fluxionis, quae primum a NEUTONO ad celeritatem crescendi adhibebatur, ad incrementum infinite paruum, quod quantitas quasi fluendo accipit, designandum analogice est translata.

116. Quamuis autem circa vocum vsum atque definitionem cum Anglis disceptare absonum foret, nosque coram iudice puritatem latinae linguae atque expressionum commoditatem spectante facile superaremur; tamen nullum est dubium, quin Anglis ratione signorum palmam praeripiamus. Differentialia enim, quae ipsi fluxiones appellant, punctis, quae litteris superscribunt, denotare solent, ita vt $\dot{y}$, iis significet fluxionem primam ipsius y; $\ddot{y}$ fluxionem secundam; $\dddot{y}$ fluxionem tertiam, atque ita porro. Qui notandi modus, vti ab arbitrio pen-

pendens, etsi improbari nequit, si punctorum numerus fuerit paruus, vt numerando facile percipi queat; tamen si plura puncta inscribi debeant, maximam confusionem plurimaque incommoda affert. Differentiale enim seu fluxio decima perquam incommode hoc modo $\overset{\vdots\vdots}{y}$ repraesentatur, cum nostro signandi modo $d^{10}y$ facillime comprehendatur. Oriuntur autem casus, quibus multo adhuc superiores differentialium ordines atque adeo indefiniti exprimi debent, ad quos Anglorum modus prorsus fit ineptus.

117. Nostris igitur tam nominibus quam signis vtemur, quippe quorum illa in nostris regionibus iam sunt vsu recepta atque plerisque familiaria, haec vero commodiora. Interim tamen non abs re erat, Anglorum denominationes & signationes hic commemorare, vt qui eorum libros euoluunt, eos quoque intelligere queant. Neque enim Angli suo mori tam pertinaciter adhaerent, vt quae nostro more sunt scripta, prorsus repudient, nec legere dignentur. Nos quidem ipsorum opera maxima cum auiditate perlegimus, ex iisque summum fructum percipimus; saepenumero vero etiam animaduertimus, ipsos nostratium scripta non sine vtilitate legisse. Quamobrem etsi idem vbique atque aequabilis modus cogitata sua exprimendi maxime esset optandus, tamen non admodum est difficile, vt vtrique assuescamus, quantum quidem intelligentia librorum alieno more scriptorum postulat.

118. Cum igitur littera ω nobis hactenus denotaverit differentiam ſeu incrementum, quo quantitas variabilis x creſcere concipitur, nunc autem ω ſtatuatur infinite paruum, erit ω differentiale ipſius x; & hancobrem recepto ſignandi modo erit $\omega = dx$; atque dx proinde erit differentia infinite parua, qua ipſa x creſcere concipitur. Simili modo differentiale ipſius y ita exprimetur dy; atque ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, differentiale dy denotabit incrementum, quod functio y capit, dum x abit in $x + dx$. Quare ſi in functione y vbique loco x ſubſtituatur $x + dx$, & quantitas reſultans ponatur $= y^{I}$, erit $dy = y^{I} - y$, hocque modo differentiale cuiusque functionis reperietur: quod quidem intelligendum eſt de differentiali primo ſeu primi ordinis; de reliquis enim poſtea videbimus.

119. Probe ergo tenendum eſt litteram d hic non quantitatem denotare, ſed tantum loco ſigni adhiberi, ad vocem *differentialis* exprimendam, eodem modo, quo in doctrina logarithmorum littera l pro ſigno logarithmi, & in Algebra charactere $\sqrt{}$ pro ſigno radicis vti conſueuimus. Hinc dy non ſignificat, vti vulgo in Analyſi vſu eſt receptum, productum ex quantitate d in quantitatem y, ſed ita enunciari debet, vt dicatur differentiale ipſius y. Simili modo ſi ſcribatur d^2y, neque binarius exponentem, neque d^2 poteſtatem ipſius d ſignificat, ſed adhibetur tantum ad nomen *differentialis ſecundi* breviter & apte exprimendum. Cum igitur littera d in calculo differentiali non quantitatem, ſed ſignum tantum

exhibeat, ad confuſionem vitandam in calculis, vbi plures quantitates conſtantes occurrunt, littera *d* ad earum deſignationem vſurpari nequit; perinde atque euitare ſolemus litteram *l* tanquam quantitatem in calculum inducere, vbi ſimul logarithmi occurrunt. Optandum autem eſſet, vt litterae iſtae *d* & *l* per characteres aliquantulum alteratos exprimerentur, ne cum litteris Alphabethi, quibus quantitates deſignari ſolent, confundantur: ſimili ſcilicet modo, quo loco litterae *r*, qua primum vox radicis indicabatur, nunc character iſte diſtortus $\surd$ in vſum eſt receptus.

120. Quoniam igitur vidimus differentiale primum ipſius y, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, habiturum eſſe huiusmodi formam $P\omega$; ob $\omega = dx$, erit $dy = Pdx$. Qualiscunque ſcilicet fuerit y functio ipſius x, eius differentiale dy exprimetur certa quadam functione ipſius x, pro qua hic ponimus P, per differentiale ipſius x, nempe per dx multiplicata. Etiamſi ergo differentialia ipſarum x & y reuera ſint infinite parua, ideoque nihilo aequalia; tamen inter ſe finitam habebunt rationem: erit ſcilicet $dy : dx = P : 1$. Inuenta ergo functione iſta P, innoteſcit ratio inter differentiale dx & differentiale dy. Cum igitur calculus differentialis in inuentione differentialium conſiſtat, in eo non tam ipſa differentialia, quae ſunt nihilo aequalia ac propterea nullo labore inuenirentur, quam eorum ratio mutua geometrica inueſtigatur.

121. Differentialia igitur multo facilius inueniuntur, quam differentiae finitae. Ad differentiam enim finitam

tam Δy, qua functio y crescit, dum quantitas variabilis x incrementum ω accipit, non sufficit functionem P nosse, sed indagari insuper oportet functiones Q, R, S, &c. quae in differentiam finitam, quam posuimus

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$$

ingrediuntur; ad differentiale ipsius y autem inueniendum satis est, si nouerimus solam functionem P. Quamobrem ex cognita differentia finita cuiusque functionis ipsius x, facillime eius differentiale definitur; verum contra ex differentiali eius functionis, nondum erui potest eius differentia finita. Interim tamen infra docebitur, quemadmodum ex differentialibus omnium ordinum simul cognitis differentia quaeuis finita cuiusque functionis propositae inueniri queat. Ceterum ex his manifestum est differentiale primum $dy = P\,dx$, praebere terminum primum differentiae finitae, quippe qui est $= P\omega$.

122. Si igitur incrementum ω, quod quantitas variabilis x accipere concipitur, fuerit vehementer paruum, ita vt in expressione $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$ termini $Q\omega^2$ & $R\omega^3$, multoque magis reliqui, fiant tam parui, vt in computo, quo summus rigor non obseruatur, prae primo $P\omega$ negligi queant; tum cognito differentiali $P\,dx$, ex eo differentia finita vero proxime cognoscetur, quippe quae erit $= P\omega$: vnde in pluribus occasionibus, quibus calculus ad praxin adhibetur, non parum fructus hauritur. Atque hinc nonnulli arbitrantur, differentialia tanquam incrementa vehementer parua considerari posse, eaque nihilo reuera aequalia esse negant, atque tantum inde-

indefinite parua ſtatuunt. Haecque idea aliis occaſionem praebuit Analyſin infinitorum accuſandi, quod non veras rerum quantitates eliciat, ſed tantum vero proximas; quae obiectio ſemper aliquam vim retineret, niſi infinite parua prorſus nihilo aequalia ſtatueremus.

123. Qui autem nolunt infinite parua plane in nihilum abire, ii vt vim obiectionis deſtruere videantur, differentialia comparant minimis puluisculis ratione totius terrae, cuius quantitatem nemo non veram tradidiſſe cenſeretur, qui vnico puluiſculo a veritate aberrauerit. Talem igitur rationem inter quantitatem finitam & infinite paruam eſſe volunt, qualis eſt inter totam terram minimumque puluisculum: atque ſi cui hoc diſcrimen adhuc non ſatis magnum videatur, eam rationem millies magisque adaugent, vt paruitas amplius omnino percipi nequeat. Interim tamen agnoſcere coguntur, ſummum rigorem geometricum aliquantulum infringi; quare quo huic obiectioni occurrant, ad eiusmodi exempla confugiunt, quorum tam per Geometriam quam per Analyſin infinitorum ſolutiones inueniri poſſunt, ex earumque congruentia bonitatem poſterioris methodi concludunt. Quanquam autem hoc argumentum negotium non conficit, cum ſaepe numero per erroneas methodos verum elici queat; tamen quia hoc vitio non laborat, potius euincit, eas quantitates, quae in calculo ſint neglectae, non ſolum non incomprehenſibiliter paruas, ſed plane nullas eſſe, vti nos aſſumimus. Ex quo rigori geometrico nullam omnino vim inferimus.

124. Progrediamur ad differentialium fecundi ordinis naturam explicandam, quae oriuntur ex differentiis fecundis in capite primo expofitis, ponendo quantitatem ω infinite paruam $= dx$. Cum igitur fi ponamus quantitatem variabilem x aequalibus incrementis crefcere, ita vt fi valor fecundus x^{I} fuerit $= x + dx$, fequentes futuri fint $x^{II} = x + 2dx$; $x^{III} = x + 3dx$ &c. ob differentias primas conftantes $= dx$, differentiae fecundae euanefcent: erit ergo quoque differentiale fecundum ipfius x nempe $ddx = 0$, atque ob hanc rationem quoque differentialia vlteriora erunt $= 0$, fcilicet $d^3x = 0$, $d^4x = 0$; $d^5x = 0$; &c. Obiici quidem poteft, haec differentialia, cum fint infinite parua, per fe effe $= 0$, neque hoc proprium effe eius quantitatis variabilis x, cuius incrementa aequalia concipiantur: at vero hanc euanefcentiam ita interpretari oportet, vt differentialia ddx, d^3x &c. non folum in fe fpectata fint nulla, fed etiam ratione poteftatum ipfius dx, cum quibus alias comparari poffent, euanefcere.

125. Quae quo clarius intelligantur, recordandum eft differentiam fecundam cuiusque functionis ipfius x, quae fit y, huiusmodi forma exprimi $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^3 +$ &c. Quodfi ergo ω fit infinite paruum, termini $Q\omega^3$, $R\omega^4$ &c. prae primo $P\omega^2$ euanefcent, vnde pofito $\omega = dx$ differentiale fecundum ipfius y erit $= Pdx^2$, denotante dx^2 quadratum differentialis dx. Quare etfi differentiale fecundum ipfius y, nempe ddy per fe fit $= 0$, tamen cum fit $ddy = Pdx^2$, ad dx^2 habebit rationem finitam, vti

vti P ad 1: ſin autem ſit $y = x$, tum ſit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. ideoque hoc caſu differentiale ſecundum ipſius x etiam reſpectu dx^2 altiorumque ipſius dx poteſtatum euaneſcit. Hocque modo intelligenda ſunt ea, quae ante diximus, eſſe ſcilicet $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c.

126. Cum differentia ſecunda nil aliud ſit, niſi differentia differentiae primae; differentiale quoque ſecundum ſeu vti ſaepe vocari ſolet, differentio-differentiale nil aliud erit praeter differentiale differentialis primi. Quia deinde quantitas conſtans nulla neque augmenta neque decrementa accipit, nullasque admittit differentias, quippe quae ſolis quantitatibus variabilibus ſunt propriae, dicimus eodem ſenſu quantitatum conſtantium differentialia omnia cuiusque ordinis eſſe $= 0$, hoc eſt prae omnibus adeo poteſtatibus ipſius dx euaneſcere. Cum igitur differentiale ipſius dx hoc eſt ddx ſit $= 0$; differentiale dx tanquam quantitas conſtans conſiderari poteſt, & quoties differentiale cuiuspiam quantitatis dicitur conſtans, toties ea quantitas intelligenda eſt continuo aequalia incrementa accipere. Sumimus hic autem x pro ea quantitate, cuius differentiale ſit conſtans, hicque ſingularum eius functionum variabilitatem, cui earum differentialia ſunt obnoxia, aeſtimabimus.

127. Ponamus differentiale primum ipſius y eſſe $= p\,dx$; atque ad eius differentiale ſecundum inueniendum, ipſius $p\,dx$ denuo differentiale quaeri debet. Cum autem dx ſit conſtans, neque varietur etiamſi loco x ſcri-

 ba-

batur $x+dx$, tantum opus eſt, vt quantitatis finitae p differentiale quaeratur: ſit igitur $dp=qdx$, quoniam vidimus omnium functionum ipſius x differentialia ad huiusmodi formam reuocari: & cum ſit, vti de differentiis finitis oſtendimus, differentiale ipſius $np=nqdx$, ſi n ſit quantitas conſtans, ponatur dx loco n, eritque differentiale ipſius $pdx=qdx^2$. Hancobrem ſi ſit $dy=pdx$ & $dp=qdx$, erit differentiale ſecundum $ddy=qdx^2$, ſicque conſtat, quod iam ante innuimus, differentiale ſecundum ipſius y ad dx^2 habere rationem finitam.

128. In Capite primo iam notauimus differentias ſecundas atque ſequentes conſtitui non poſſe, niſi valores ſucceſſiui ipſius x certa quadam lege progredi aſſumantur, quae lex cum ſit arbitraria, his valoribus progreſſionem arithmeticam tanquam facillimam ſimulque aptiſſimam tribuimus. Ob eandem ergo rationem de differentialibus ſecundis nihil certi ſtatui poterit, niſi differentialia prima, quibus quantitas variabilis x continuo creſcere concipitur, ſecundum datam legem progrediantur; ponimus itaque differentialia prima ipſius x, nempe dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. omnia inter ſe aequalia, vnde fiunt differentialia ſecunda

$$ddx=dx^{\text{I}}-dx=0;\ ddx^{\text{I}}=dx^{\text{II}}-dx^{\text{I}}=0,\ \&c.$$

Quoniam ergo differentialia ſecunda & vlteriora ab ordine, quem differentialia quantitatis variabilis x inter ſe tenent, pendent, hicque ordo ſit arbitrarius, quae conditio differentialia prima non afficit; hinc ingens diſcrimen inter differentialia prima ac ſequentia ratione inuentionis intercedit.

129. Quodſi autem ſucceſſiui ipſius x valores x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, &c. non ſecundum arithmeticam progreſſionem ſtatuantur, ſed alia quacunque lege progredi ponantur, tum eorum quoque differentialia prima dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. non erunt inter ſe aequalia, neque propterea erit $ddx = 0$. Hancobrem differentialia ſecunda quarumvis functionum ipſius x aliam formam induent; ſi enim huiusmodi functionis y differentiale primum fuerit $= pdx$ ad eius differentiale ſecundum inueniendum non ſufficit differentiale ipſius p per dx multiplicaſſe, ſed inſuper ratio differentialis ipſius dx, quod eſt ddx haberi debet. Quoniam enim differentiale ſecundum oritur, ſi pdx a valore eius ſequente, qui oritur dum $x + dx$ loco x & $dx + ddx$ loco dx ponitur, ſubtrahatur, ponamus valorem ipſius p ſequentem eſſe $= p + qdx$, eritque ipſius pdx valor ſequens

$$= (p + qdx)(dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^2 + qdxddx;$$

a quo ſubtrahatur pdx, eritque differentiale ſecundum

$$ddy = pddx + qdx^2 + qdxddx = pddx + qdx^2,$$

quia $qdxddx$ prae $pddx$ euaneſcit.

130. Quanquam autem ratio aequalitatis eſt ſimpliciſſima atque aptiſſima, quae continuo ipſius x incrementis tribuatur, tamen frequenter euenire ſolet, vt non eius quantitatis variabilis x, cuius y eſt functio, incrementa aequalia aſſumantur, ſed alius cuiuſpiam quantitatis, cuius ipſa x ſit functio quaedam. Quin etiam ſaepe eiusmodi alius quantitatis differentialia prima ſtatuuntur ae-

qualia, cuius nequidem relatio ad x conſtet. Priori caſu pendebunt differentialia ſecunda & ſequentia ipſius x a ratione, quam x tenet ad illam quantitatem, quae aequabiliter creſcere ponitur, ex eaque pari modo definiri debent, quo hic differentialia ſecunda ipſius y ex differentialibus ipſius x definire docuimus. Poſteriori autem caſu differentialia ſecunda & ſequentia ipſius x tanquam incognita ſpectari, eorumque loco ſigna ddx, d^3x, d^4x, &c. vſurpari debebunt.

131. Cum autem, quemadmodum his caſibus differentiationes ſingulas abſolui oporteat, infra fuſius ſimus oſtenſuri, hic pergamus quantitatem variabilem x tanquam vniformiter creſcentem aſſumere, ita vt eius differentialia prima dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. inter ſe omnia aequalia, ac propterea differentialia ſecunda ac ſequentia nihilo aequalia ſtatuantur: quae conditio ita enunciari ſolet vt differentiale ipſius x nempe dx conſtans aſſumi dicatur. Sit deinde y functio quaecunque ipſius x, quae cum per x & conſtantes definiatur, ſingula quoque eius differentialia prima, ſecunda, tertia, quarta, &c. quae his ſignis indicantur dy, ddy, d^3y, d^4y, &c. per x & dx exprimi poterunt. Scilicet ſi in y loco x ſcribatur $x+dx$, ab hocque valore prior ſubtrahatur, remanebit differentiale primum dy: in quo ſi porro loco x ponatur $x+dx$, prodibit dy^{I}, eritque $ddy = dy^{I} - dy$, ſimili modo ponendo $x+dx$ loco x, ex ddy naſcetur ddy^{I}, atque $ddy^{I} - ddy$ dabit d^3y & ita porro: in quibus

bus operationibus differentiale dx perpetuo tanquam quantitas conſtans ſpectatur, quae nullum differentiale recipiat.

132. Ex ratione, qua functio y per x determinatur, tam ope methodi differentiarum finitarum, quam multo expeditius ex iis, quae poſtea ſumus tradituri, definietur valor functionis p, quae per dx multiplicata praebeat differentiale primum dy. Poſito ergo $dy = pdx$, differentiale ipſius pdx dabit differentiale ſecundum ddy; vnde ſi fuerit $dp = qdx$, ob dx conſtans, orietur $ddy = qdx^2$, vti iam ante oſtendimus. Vlterius igitur progrediendo, cum differentialis ſecundi differentiale praebeat differentiale tertium, ponamus eſſe $dq = rdx$, eritque $d^3y = rdx^3$: ſimili modo ſi huius functionis r differentiale quaeratur, fueritque $dr = sdx$, habebitur differentiale quartum $d^4y = sdx^4$; ſicque porro, dummodo nouerimus differentiale primum cuiusque functionis inuenire, differentiale cuiusque ordinis aſſignare poterimus.

133. Quo igitur formae ſingulorum horum differentialium, ſimulque ratio ea inueniendi clarius menti repraeſentetur, ea ſequenti tabella complecti viſum eſt.

Si y

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x,

erit	atque posito
$dy = p\,dx$	$dp = q\,dx$
$ddy = q\,dx^2$	$dq = r\,dx$
$d^3y = r\,dx^3$	$dr = s\,dx$
$d^4y = s\,dx^4$	$ds = t\,dx$
$d^5y = t\,dx^5$	&c.

Cum igitur functio p ex functione y per differentiationem cognoscatur, similique modo ex p inueniatur q, hincque porro r, & ex eo vlterius s, &c. differentialia cuiusuis ordinis ipsius y facile reperientur, dummodo differentiale dx assumatur constans.

134. Cum p, q, r, s, t, &c. sint quantitates finitae, functiones nimirum ipsius x, differentiale primum ipsius y, rationem finitam habebit ad differentiale primum ipsius x, scilicet vt p ad 1; hancque ob causam differentialia dx & dy vocantur homogenea. Deinde cum ddy ad dx^2 habeat rationem finitam vt q ad 1, erunt ddy & dx^2 homogenea; simili modo homogenea erunt d^3q & dx^3, itemque d^4y & dx^4, & ita porro. Vnde vti differentialia prima sunt inter se homogenea, seu rationem finitam tenentia; sic differentialia secunda cum quadratis differentialium primorum, differentialia autem tertia cum cubis differentialium primorum atque ita porro erunt homogenea. Atque generatim differentiale ipsius

ſius y ordinis n, quod ita exprimitur $d^n y$, homogeneum erit cum dx^n, hoc eſt cum poteſtate differentialis dx; cuius exponens eſt n.

135. Cum igitur prae dx euaneſcant omnes eius poteſtates, quarum exponentes ſunt vnitate maiores, prae dy quoque euaneſcent dx^2, dx^3, dx^4, &c. & quae ad has poteſtates rationem finitam tenent differentialia altiorum ordinum ddy, d^3y, d^4y, &c. Simili modo prae ddy quia eſt homogeneum cum dx^2, omnes ipſius dx poteſtates quadrato ſuperiores dx^3, dx^4, &c. euaneſcent, euaneſcent ergo quoque d^3y, d^4y, &c. Atque prae d^3y, euaneſcent dx^4, d^4y; dx^5, d^5y; &c. Hincque facile, ſi propoſitae fuerint quaecunque expreſſiones huiusmodi differentialia inuoluentes, dignoſci poterunt, vtrum ſint homogeneae nec ne? Reſpici enim debebunt tantum differentialia, omiſſis quantitatibus finitis, quippe quae homogeneitatem non turbant; atque pro differentialibus ſecundi altiorumque ordinum ſcribantur poteſtates ipſius dx ipſis homogeneae, quae ſi praebeant vbique eundem dimenſionum numerum, expreſſiones erunt homogeneae.

136. Ita patebit has expreſſiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ eſſe inter ſe homogeneas. Nam ddy^2 denotat quadratum ipſius ddy, & quia ddy homogeneum eſt cum dx^2, erit ddy^2 homogeneum cum dx^4. Deinde quia dy cum dx & d^3y cum dx^3 homogeneum eſt, erit productum dyd^3y cum dx^4 homogeneum: ex quo ſequitur expreſſiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ inter ſe eſſe homogeneas, ideo-

P que

que rationem inter se finitam habere. Simili modo colligetur has expressiones $\frac{Pd^3y^2}{dxddy}$ & $\frac{Qd^5y}{dy^2}$ esse homogeneas; substitutis enim pro dy, ddy, d^3y & d^5y his ipsius dx potestatibus ipsis homogeneis dx, dx^2, dx^3 & dx^5, orientur hae expressiones Pdx^3 & Qdx^3, quae vtique erunt inter se homogeneae.

137. Quod si facta hac reductione expressiones propositae non contineant aequales ipsius dx potestates, tum non erunt homogeneae, neque propterea inter se rationem finitam tenebunt. Erit ergo altera infinities siue maior siue minor altera, hincque vna respectu alterius euanescet. Sic $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ ad $\frac{Qddy^2}{dy}$ rationem habebit infinite magnam: prior enim expressio reducitur ad Pdx & altera ad Qdx^3, vnde haec prae illa euanescet. Quamobrem si in quopiam calculo aggregatum huiusmodi binarum formularum occurrat, $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$, posterior terminus prae priori tuto reiici, solusque primus $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ in calculo retineri poterit: subsistet enim perfecta ratio aequalitatis inter expressiones

$$\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy} \;\&\; \frac{Pd^3y}{dx^2},$$

quia exponens rationis est

$$= 1 + \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 1 \text{ ob } \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 0.$$

Hoc-

Hocque pacto expreſſiones differentiales quandoque mirifice contrahi poſſunt.

138. In calculo differentiali praecepta traduntur, quorum ope cuiusuis quantitatis propoſitae differentiale primum inueniri poteſt: & quoniam differentialia ſecunda ex differentiatione primorum, tertia per eandem operationem ex ſecundis & ita porro ſequentia ex praecedentibus reperiuntur, calculus differentialis continet methodum omnia cuiusque ordinis differentialia inueniendi. Ex voce autem *differentialis*, qua differentia infinite parva denotatur, alia nomina deriuantur, quae vſu ſunt recepta. Sic verbum habetur *differentiare*, quod ſignificat *differentiale inuenire*, quantitasque *differentiari* dicitur, quando eius differentiale elicitur. *Differentiatio* autem denotat operationem, qua differentialia inueniuntur. Hinc calculus differentialis quoque vocatur methodus *differentiandi*, cum modum differentialia inueniendi contineat.

139. Quemadmodum in calculo differentiali cuiusvis quantitatis differentiale inueſtigatur, ita viciſſim calculi ſpecies conſtituitur quoque in inuentione eius quantitatis, cuius differentiale proponitur, qui calculus integralis vocatur. Si enim propoſitum fuerit differentiale quodcunque, eius reſpectu ea quantitas, cuius eſt differentiale, vocari ſolet integrale. Cuius denominationis ratio eſt, quod, cum differentiale conſiderari poſſit, tanquam pars infinite parua, qua quantitas quaepiam creſcit, ipſa illa quantitas reſpectu huius partis tanquam totum ſeu integrum ſpectari poteſt, hancque ob cauſam eius vo-

catur integrale. Sic cum dy ſit differentiale ipſius y, viciſſim y erit integrale ipſius dy, & cum ddy ſit differentiale ipſius dy, erit dy integrale ipſius ddy. Similique modo erit ddy integrale ipſius d^3y, & d^3y ipſius d^4y & ita porro: vnde quaelibet differentiatio, ſi inuerſe ſpectatur, integrationis exemplum exhibet.

140. Origo & natura integralium pariter ac differentialium clariſſime ex differentiarum finitarum doctrina in capite primo expoſita explicari poteſt. Poſtquam enim eſſet oſtenſum, quomodo cuiusque quantitatis differentiam inueniri oporteat, retrogrediendo quoque monſtrauimus, quomodo, ſi propoſita fuerit differentia, ea quantitas inueniri queat, cuius illa ſit differentia; quam quantitatem reſpectu ſuae differentiae vocauimus eius ſummam. Vti igitur ad infinita parua procedendo differentiae in differentialia abierunt, ita ſummae quae ibi erant vocatae, integralium nomen ſortiuntur: & hanc ob cauſam integralia quoque non raro ſummae appellari ſolent. Angli qui differentialia fluxiones nominant, integralia vocant quantitates fluentes; eorumque loquendi more datae fluxionis fluentem inuenire, idem eſt, quod noſtro more dati differentialis integrale inuenire dicimus.

141. Vti differentialia charactere d deſignamus, ita ad integralia indicanda hac littera $\int$ vtimur, quae ergo quantitatibus differentialibus praefixa eas denotabit quantitates, quarum illa ſunt differentialia. Sic ſi differentiale ipſius y fuerit pdx, ſeu $dy = pdx$, erit y integrale ipſius pdx,

$p\,dx$, quod hoc modo ſcribitur $y = \int p\,dx$, cum ſit $y = \int dy$. Integrale ergo ipſius $p\,dx$, quod per $\int p\,dx$ indicatur, denotat quantitatem, cuius differentiale eſt $p\,dx$. Simili modo cum ſit $ddy = q\,dx^2$ exiſtente $dp = q\,dx$; erit integrale ipſius ddy hoc eſt $dy = p\,dx$, atque ob $p = \int q\,dx$, erit $dy = dx\int q\,dx$, ac propterea $y = \int dx \int q\,dx$. Si vlterius ſit $dq = r\,dx$, erit $q = \int r\,dx$ & $dp = dx\int r\,dx$; vnde ſi character $\int$ denuo praefigatur, fiet $p = \int dx \int r\,dx$, porroque $dy = dx\int dx\int r\,dx$, atque $y = \int dx \int dx \int r\,dx$.

142. Quia differentiale dy eſt quantitas infinite parva, eius integrale autem y quantitas finita, parique modo differentiale ſecundum ddy infinities minus eſt, quam eius integrale dy, manifeſtum eſt differentialia prae ſuis integralibus euaneſcere. Quae affectio quo melius percipiatur, infinite parua in ordines diuidi ſolent, diciturque infinite paruum primi ordinis, ad quod referuntur differentialia prima dx, dy. Infinite paruum ſecundi ordinis complectitur differentialia ſecundi ordinis, quae homogenea ſunt cum dx^2; ſimilique modo infinite parva, quae cum dx^3 ſunt homogenea, vocantur ordinis tertii, ad quem ergo pertinent differentialia tertia omnia; ſicque porro. Vnde vti infinite parua primi ordinis prae quantitatibus finitis euaneſcunt, ſic infinite parua ſecundi ordinis prae infinite paruis primi ordinis, atque generatim infinite parua cuiusque ordinis altioris prae infinite paruis ordinis inferioris euaneſcent.

143. His igitur infinite paruorum ordinibus conſtitutis, vti differentiale quantitatis finitae eſt infinite par-

vum primi ordinis, atque differentiale infinite parui primi ordinis eſt infinite paruum ſecundi ordinis, & ita porro; ita viciſſim manifeſtum eſt integrale infinite parui primi ordinis eſſe quantitatem finitam, integrale autem infinite parui ſecundi ordinis eſſe infinite paruum primi ordinis ſicque deinceps. Quare ſi differentiale propoſitum fuerit infinite paruum ordinis n, eius integrale erit infinite paruum ordinis $n-1$; hincque vti differentiando ordo infinite paruorum augetur, ita integratione ad ordines inferiores progredimur, donec ad ipſas quantitates finitas perueniamus. Sin autem quantitates finitas denuo integrare velimus, tum ſecundum hanc legem perueniemus ad quantitates infinite magnas, ab harumque integratione inſtituta ad quantitates adhuc infinities maiores, ſicque progrediendo obtinebimus ſimiles infinitorum ordines, quorum quisque praecedentem infinities ſuperat.

144. Supereſt vt in hoc Capite quaedam de vſu ſignorum recepto moneamus, ne ambiguitati vllus locus relinquatur. Ac primo quidem ſignum differentiationis d tantum afficit literam immediate ſequentem ſolam: ſic dxy non denotat differentiale producti xy, ſed differentiale ipſius x per ipſam quantitatem y multiplicatum. Solet autem, quominus confuſio naſcatur, quantitas y ante ſignum d hoc modo ſcribi ydx, quo productum ex y in dx indicatur. Attamen ſi y ſit quantitas vel ſignum radicale $\surd$ vel logarithmicum habens praefixum, tum poſt differentiale poni ſolet: nimirum $dx\surd(aa-xx)$ ſignificat productum ex quantitate finita $\surd(aa-xx)$ in dif-

differentiale dx, ſimilique modo $dxl(1+x)$ eſt productum ex logarithmo quantitatis $1+x$, per dx multiplicato. Ob eandem rationem $ddy\sqrt{x}$ exprimit productum differentialis ſecundi ddy & quantitatis finitae $\sqrt{x}$.

145. Neque vero ſignum d litteram immediate ſequentem ſolam afficit, ſed etiam nequidem exponentem ſi quem habet, ſpectat. Ita dx^2 non exprimit differentiale ipſius x^2, ſed quadratum differentialis ipſius x, ita vt exponens 2 non ad x, ſed ad dx referri debeat. Poſſet etiam ſcribi $dxdx$, quemadmodum productum duorum differentialium dx & dy hoc modo $dxdy$ exponitur, verum prior modus dx^2, vti eſt breuior, ita vſitatior. Praeſertim ſi altiores poteſtates ipſius dx eſſent indicandae, nimis prolixum foret dx toties repeti: ſic dx^3 denotat cubum ipſius dx, & in differentialibus altiorum ordinum ſimilis ratio obſeruatur. Scilicet ddy^4 denotat poteſtatem quartam differentialis ſecundi ordinis ddy; atque $d^3y^2\sqrt{x}$ ſignificat quadratum differentialis tertii ordinis ipſius y multiplicatum eſſe per $\sqrt{x}$; ſin autem per quantitatem rationalem x multiplicari deberet, ea praefigitur hoc modo xd^3y^2.

146. Sin autem velimus, vt ſignum d plus quam ſolam litteram ſubſequentem afficiat, id peculiari modo indicari debet. Vtimur hoc caſu praecipue vncinulis, quibus ea quantitas includitur, cuius differentiale debet indicare. Vti $d(xx+yy)$ denotat differentiale quantitatis $xx+yy$; verum ſi velimus differentiale poteſtatis hu-

huiusmodi quantitatis designare, ambiguitatem vix euitare possumus: si enim scribamus $d(xx+yy)^2$, intelligi posset quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Poterimus autem hoc casu punctum in auxilium vocare, ita vt $d.(xx+yy)^2$ denotet differentiale ipsius $(xx+yy)^2$, omisso autem puncto $d(xx+yy)^2$ quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Puncto scilicet commode indicari potest signum d ad totam quantitatem post punctum sequentem pertinere: sic $d.xdy$ exprimet differentiale ipsius xdy; & $d.^3 xdy\sqrt{(aa+xx)}$ differentiale tertii ordinis expressionis $xdy\sqrt{(aa+xx)}$, quae est productum ex quantitatibus finitis x & $\sqrt{(aa+xx)}$ atque ex differentiali dy.

147. Quemadmodum autem signum differentiationis d solam quantitatem immediate sequentem afficit, nisi puncto interposito eius vis ad totam expressionem sequentem extendatur; ita contra signum integrationis $\int$ semper totam expressionem, cui est praefixum, complectitur. Ita $\int ydx(aa-xx)^n$ denotat integrale seu eam quantitatem, cuius differentiale est $ydx(aa-xx)^n$, atque haec expressio $\int xdx\int dxlx$ denotat quantitatem, cuius differentiale est $xdx\int dxlx$. Hinc si velimus productum duorum integralium scilicet $\int ydx$ & $\int zdx$ exprimere, id hoc modo $\int ydx\int zdx$ perperam fiet, intelligeretur enim integrale quantitatis $ydx\int zdx$. Hanc ob causam iterum puncto solet haec ambiguitas tolli, ita vt $\int ydx . \int zdx$ significet productum integralium $\int ydx$ & $\int zdx$.

148. Analyſis infinitorum igitur cum in differentialibus tum in integralibus inueniendis verſatur, & hanc obrem in duas praecipuas partes diuiditur, quarum altera vocatur Calculus differentialis, altera Calculus integralis. In priori praecepta traduntur quantitatum quarumvis differentialia inueniendi; in poſteriori vero via monſtratur differentialium propoſitorum integralia inueſtigandi: in vtroque autem ſimul ſummus vſus, quem iſti calculi tam ad ipſam Analyſin quam ad Geometriam ſublimiorem afferunt, indicatur. Quam ob cauſam iſta Analyſeos pars iam tanta accepit incrementa, vt modico volumine prorſus comprehendi nequeat. Imprimis vero in calculo integrali indies tam nova artificia integrandi, quam adiumenta eius in ſoluendis variis generis problematibus, deteguntur, vt ob haec noua inuenta, quae continuo accedunt, nunquam exhauriri, multo minus perfecte deſcribi atque explicari poſſit. Dabo autem operam, vt quae adhuc ſunt reperta, vel cuncta in his libris exponam, vel ſaltem methodos explicem, vnde ea facile deduci queant.

149. Solent vulgo plures Analyſeos infinitorum partes numerari; praeter calculos enim differentialem & integralem inueniuntur paſſim calculi differentio-differentialis atque exponentialis. In calculo differentio-differentiali tradi ſolet methodus differentialia ſecundi atque altiorum ordinum inueniendi: quoniam autem modum cuiusque ordinis differentialia inueniendi in ipſo calculo differentiali ſum expoſiturus, hac ſubdiuiſione, quae potius

ex merito inuentionis, quam ex re ipsa facta esse videtur, supersedebimus. Quod deinde ad calculum exponentialem attinet, quo Celeb. IOH. BERNOULLI, cui ob innumera eaque maxima incrementa Analyseos infinitorum aeternas debemus gratias, methodos differentiandi atque integrandi ad quantitates exponentiales transtulit, quia vtrumque calculum ad omnis generis quantitates tam algebraicas quam transcendentes accommodare constitui, hinc partem peculiarem facere superfluum atque instituto contrarium foret.

150. Primum igitur calculum differentialem in hoc libro pertractare statui, modumque sum expositurus, cuius ope omnium quantitatum variabilium differentialia non solum prima, sed etiam secunda & altiorum ordinum expedite inueniri queant. Primum ergo quantitates algebraicas contemplabor, siue sint functiones vnius variabilis, siue plurium, siue demum explicite dentur, siue per aequationes. Deinde inuentionem differentialium quoque accommodabo ad quantitates non algebraicas, ad quarum notitiam quidem sine calculi integralis subsidio peruenire licet: cuiusmodi sunt logarithmi, atque quantitates exponentiales; deinde etiam arcus circuli, vicissimque arcuum circularium sinus, & tangentes. Denique etiam quantitates vtcunque ex his compositas & permixtas differentiare docebo; sicque calculi differentialis pars prior, methodus scilicet differentiandi absoluetur.

151. Altera pars vſui, quem methodus differentiandi tam ad Analyſin quam Geometriam ſublimiorem affert, explicando eſt deſtinata. In Algebram autem communem inde plurima redundant commoda, partim ad radices aequationum inueniendas, partim ad ſeries tractandas atque ſummandas, partim ad maxima minimaque eruenda, partim ad valores expreſſionum, quae certis caſibus indeterminatae videantur, definiendos, & quae ſunt alia. Geometria autem ſublimior ex calculo differentiali maxima accepit incrementa, dum eius ope tangentes linearum curuarum, eorumque curuatura ipſa mira facilitate definiri, multaque alia problemata circa radios a lineis curuis vel reflexos vel refractos reſolui poſſunt. Quibus etſi ampliſſimus tractatus impleri poſſet, tamen conabor, quantum fieri licet, omnia breuiter ac perſpicue explicare.

CAPUT V.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM ALGEBRAICARUM VNICAM VARIABILEM INUOLUENTIUM.

152.

Quia quantitatis variabilis x differentiale eſt $= dx$ erit x in proximum promouendo $x^{\text{I}} = x + dx$. Quare ſi fuerit y quaecunque functio ipſius x, ſi in ea loco x ponatur $x + dx$, ea abibit in y^{I}, atque differentia $y^{\text{I}} - y$ dabit differentiale ipſius y. Si igitur ponamus $y = x^n$ fiet

$$y^{\text{I}} = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}dx^2 + \&c.$$

eritque ergo

$$dy = y^{\text{I}} - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}dx^2 + \&c.$$

At in hac expreſſione terminus ſecundus cum reliquis ſequentibus prae primo euaneſcit, eritque idcirco $nx^{n-1}dx$ differentiale ipſius x^n, ſeu $d.x^n = nx^{n-1}dx$. Vnde ſi a ſit numerus ſeu quantitas conſtans, erit quoque $d.ax^n = nax^{n-1}dx$. Cuiuscunque ergo ipſius x poteſtatis differentiale inuenitur, multiplicando eam per exponentem, diuidendo per x, & reliquum per dx multiplicando, quae regula facile memoria retinetur.

153. Cognito differentiali primo ipſius x^n, ex eo facile differentiale ſecundum reperitur, dummodo, vt hic

hic conſtanter aſſumemus, differentiale dx conſtans ſtatuatur. Cum enim in differentiali $nx^{n-1}dx$ factor ndx ſit conſtans, alterius factoris x^{n-1} differentiale ſumi debet, quod proinde erit $(n-1)x^{n-2}dx$. Hoc ego per ndx multiplicatum dabit differentiale ſecundum: $dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Simili modo ſi differentiale ipſius x^{n-2} quod eſt $=(n-2)x^{n-3}dx$ multiplicetur per $n(n-1)dx^2$ prodibit differentiale tertium

$$d.^3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Porro itaque erit differentiale quartum

$$d.^4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4,$$

& differentiale quintum

$$d.^5x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5;$$

vnde ſimul forma ſequentium differentialium faciliſſime colligitur.

154. Quoties ergo n eſt numerus integer affirmatiuus, toties ad differentialia tandem peruenitur euaneſcentia; quae ſcilicet ita ſunt $=0$, vt prae omnibus ipſius dx poteſtatibus euaneſcant. Horum autem notandi ſunt caſus ſimpliciores.

$d.x = dx$; $dd.x = 0$; $d.^3x = 0$; &c.

$d.x^2 = 2xdx$; $dd.x^2 = 2dx^2$; $d.^3x^2 = 0$; $d.^4x^2 = 0$ &c.

$d.x^3 = 3x^2dx$; $dd.x^3 = 6xdx^2$; $d.^3x^3 = 6dx^3$; $d.^4x^3 = 0$

$d.x^4 = 4x^3dx$; $dd.x^4 = 12x^2dx^2$; $d.^3x^4 = 24xdx^3$; $d.^4x^4 = 24dx^4$

$d.x^5 = 5x^4dx$; $dd.x^5 = 20x^3dx^2$; $d.^3x^5 = 60x^2dx^3$; $d.^4x^5 = 120xdx^4$; $d.^5x^5 = 120dx^5$; $d.^6x^5 = 0$.

Patet ergo si n fuerit numerus integer affirmatiuus, potestatis x^n differentiale ordinis n esse constans, nempe $= 1.2.3.\ldots n\,dx^n$, adeoque differentialia superiorum ordinum omnium esse $= 0$.

155. Si n sit numerus integer negatiuus, huiusmodi ipsius x potestatum negatiuarum $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$, &c. differentialia sumi poterunt, cum sit $\frac{1}{x} = x^{-1}$; $\frac{1}{xx} = x^{-2}$, & generaliter $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$. Si ergo in formula antecedente ponatur $n = -m$, erit ipsius $\frac{1}{x^m}$ differentiale primum $= \frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$; differentiale secundum $= \frac{m(m+1)\,dx^2}{x^{m+2}}$; differentiale tertium $= \frac{-m(m+1)(m+2)\,dx^3}{x^{m+3}}$ &c. vnde sequentes casus simpliciores imprimis notari merentur.

$$d.\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2}; \quad dd.\frac{1}{x} = \frac{2dx^2}{x^3}; \quad d.^3\frac{1}{x} = \frac{-6dx^3}{x^4}$$

$$d.\frac{1}{x^2} = \frac{-2dx}{x^3}; \quad dd.\frac{1}{x^2} = \frac{6dx^2}{x^4}; \quad d.^3\frac{1}{x^2} = \frac{-24dx^3}{x^5}$$

$$d.\frac{1}{x^3} = \frac{-3dx}{x^4}; \quad dd.\frac{1}{x^3} = \frac{12dx^2}{x^5}; \quad d.^3\frac{1}{x^3} = \frac{-60dx^3}{x^6}$$

$$d.\frac{1}{x^4} = \frac{-4dx}{x^5}; \quad dd.\frac{1}{x^4} = \frac{20dx^2}{x^6}; \quad d.^3\frac{1}{x^4} = \frac{-120dx^3}{x^7}$$

$$d.\frac{1}{x^5} = \frac{-5dx}{x^6}; \quad dd.\frac{1}{x^5} = \frac{30dx^2}{x^7}; \quad d.^3\frac{1}{x^5} = \frac{-210dx^3}{x^8}$$

&c.

156. Ponendis deinde pro n numeris fractis differentialia formularum irrationalium obtinebimus. Sit enim $n = \frac{\mu}{\nu}$, erit formulae $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ seu $\sqrt[\nu]{x^{\mu}}$ differentiale primum

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}} \quad \text{secundum}$$

$$= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\nu} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}} \quad \&c.$$

Hinc erit:

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad dd.\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}; \quad d.^3\sqrt{x} = \frac{1.3\,dx^3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}; \quad dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}; \quad d.^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.5\,dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}; \quad dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}; \quad d.^3\sqrt[4]{x} = \frac{3.7\,dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

quae expressiones si paulisper inspiciantur, facile habitus acquiretur huiusmodi differentialia, etiam sine praeuia reductione ad formam potestatis, inueniendi.

157. Si μ non fuerit 1, sed numerus alius siue affirmatiuus siue negatiuus integer, differentialia aeque facile definientur. Cum autem differentialia secunda & altiorum ordinum eadem lege ex primis, qua haec ex ipsis potestatibus, deriuentur, exempla simpliciora primorum tantum differentialium apponamus.

d.x

$d.x\sqrt{x} = \frac{3}{2}dx\sqrt{x}$; $d.x^2\sqrt{x} = \frac{5}{2}xdx\sqrt{x}$; $d.x^3\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2dx\sqrt{x}$;

$d.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}$; $d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}}$; $d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}}$;

$d.\sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; $d.x\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}dx\sqrt[3]{x}$; $d.x\sqrt[3]{x^2} = \frac{5}{3}dx\sqrt[3]{x^2}$;

$d.xx\sqrt[3]{x} = \frac{7}{3}xdx\sqrt[3]{x}$; $d.xx\sqrt[3]{x^2} = \frac{8}{3}xdx\sqrt[3]{x^2}$; &c.

$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}}$; $d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}$; $d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}}$;

$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}$; $d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}}$; &c.

158. Ex his iam functionum omnium algebraicarum rationalium integrarum differentialia poterunt inueniri, propterea quod earum ſinguli termini ſunt poteſtates ipſius x, quas differentiare nouimus. Cum enim quantitas huiusmodi $p + q + r + s +$ &c. poſito $x + dx$ loco x abeat in $p + dp + q + dq + r + dr + s + ds +$ &c. erit eius differentiale $= dp + dq + dr + ds +$ &c. Quare ſi ſingularum quantitatum p, q, r, s, differentialia aſſignare queamus, ſimul quoque aggregati earum differentiale innoteſcet. Atque cum multipli ipſius p differentiale ſit aeque multiplum ipſius dp, hoc eſt $d.ap = adp$; erit quantitatis $ap + bq + cr$ differentiale $= adp + bdq + cdr$. Cum denique quantitatum conſtantium differentialia ſint nulla, erit quoque quantitatis huius $ap + bq + cr + f$ differentiale $= adp + bdq + cdr$.

159. In functionibus ergo rationalibus integris cum ſinguli termini ſint vel conſtantes vel poteſtates ipſius x, diffe-

differentiatio ſecundum praecepta data facile abſoluetur. Sic erit:

$d(a+x) = dx$; $d(a+bx) = bdx$;

$d(a+xx) = 2xdx$; $d(aa-xx) = -2xdx$;

$d(a+bx+cxx) = bdx+2cxdx$;

$d(a+bx+cxx+ex^3) = bdx+2cxdx+3ex^2dx$;

$d(a+bx+cxx+ex^3+fx^4) = bdx+2cxdx+3ex^2ax$
$+4fx^3dx.$

Atque ſi exponentes fuerint indefiniti erit:

$d(1-x^n) = -nx^{n-1}dx$; $d(1+x^m) = mx^{m-1}dx$;

$d(a+bx^m+cx^n) = mbx^{m-1}dx+ncx^{n-1}dx$.

160. Cum igitur functiones rationales integrae ſecundum maximam ipſius x dignitatem in gradus diſtinguantur, manifeſtum eſt, ſi huiusmodi functionum continuo differentialia capiantur, ea tandem fieri conſtantia, poſteaque in nihilum abire, ſi quidem differentiale dx aſſumatur conſtans. Sic functionis primi gradus $a+bx$ differentiale primum bdx eſt conſtans, ſecundum cum ſequentibus nullum. Sit functio ſecundi gradus

$$a+bx+cxx = y; \text{ erit } dy = bdx+2cxdx;$$
$$ddy = 2cdx^2 \; ; \; d^3y = 0.$$

Simili modo ſi ponatur functio tertii gradus
$a+bx+cxx+ex^3 = y$; erit $dy = bdx+2cxdx+3ex^2dx$; $ddy = 2cdx^2+6exdx^2$ & $d^3y = 6edx^3$ atque $d^4y = 0$. Quare generaliter ſi huiusmodi functio ſit gradus n, eius differentiale ordinis n erit conſtans, & ſequentia omnia nulla.

161. Neque etiam differentiatio turbabitur, ſi inter poteſtates ipſius x, quae huiusmodi functionem componunt, occurrant tales, quarum exponentes ſint numeri negatiui ſeu fracti. Ita

I. Si ſit $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$

erit $dy = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{xx}$.

II. Si ſit $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - ex$

erit $dy = \frac{-adx}{2x\sqrt{x}} + \frac{cdx}{2\sqrt{x}} - edx$,

& $ddy = \frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}} - \frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}$.

III. Si ſit $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{xx}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{xx}$

erit $dy = \frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}} + \frac{4cdx}{3xx\sqrt[3]{x}} - \frac{2fdx}{x^3}$,

& $ddy = \frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}} - \frac{28cdx^2}{9x^3\sqrt[3]{x}} + \frac{6fdx^2}{x^4}$.

cuiusmodi exempla ſecundum praecepta data facillime abſoluuntur.

162. Si quantitas differentianda propoſita fuerit poteſtas eiusmodi functionis, cuius differentiale exhibere valemus, praecedentia praecepta ſufficiunt ad eius differentiale primum definiendum. Sit enim p functio quaecunque ipſius x, cuius differentiale dp in poteſtate eſt, erit ipſi-

ipsius potestatis p^n differentiale primum $= np^{n-1}dp$. Hinc sequentia exempla soluuntur:

I. Si sit $y = (a + x)^n$; erit $dy = n(a + x)^{n-1}dx$

II. Si sit $y = (aa - xx)^2$; erit $dy = -4xdx(aa - xx)$

III. Si sit $y = \frac{1}{aa + xx}$ seu $y = (aa + xx)^{-1}$

erit $dy = \frac{-2xdx}{(aa + xx)^2}$.

IV. Si sit $y = \sqrt{(a + bx + cxx)}$ erit

$$dy = \frac{bdx + 2cxdx}{2\sqrt{(a + bx + cxx)}}.$$

V. Si sit $y = \sqrt[3]{(a^4 - x^4)^2}$ seu $y = (a^4 - x^4)^{\frac{2}{3}}$

erit $dy = -\frac{8}{3}x^3dx(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4 - x^4)}}$.

VI. Si sit $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$ seu $y = (1 - xx)^{-\frac{1}{2}}$

erit $dy = xdx(1 - xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1 - xx)\sqrt{(1 - xx)}}$.

VII. Si sit $y = \sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)}$

erit $dy = \frac{dx\sqrt{b} : 2\sqrt{x} + dx}{3\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}} = \frac{dx\sqrt{b} + 2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x}.\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}}$.

VIII. Si sit $y = \frac{1}{x + \sqrt{(aa - xx)}}$,

ob $d.\sqrt{(aa - xx)} = \frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, erit

$$dy = \frac{-dx + xdx : \sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2} = \frac{xdx - dx\sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2\sqrt{(aa - xx)}}$$

seu $dy = \frac{dx(x - \sqrt{(aa - xx)})^3}{(2xx - aa)^2\sqrt{(aa - xx)}}$.

IX.

IX. Si sit $y = \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)^3}$.

Ponatur $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ & $\sqrt[3]{(1-xx)^2} = q$;

ob $y = \sqrt[4]{(1-p+q)^3}$, erit $dy = \frac{-3dp+3dq}{4\sqrt[4]{(1-p+q)}}$.

Iam per antecedentia est

$$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}} \quad \& \quad dq = \left(\frac{3\sqrt[3]{(1-xx)}}{-4xdx}\right)\frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{(1-xx)}},$$

quibus valoribus substitutis fiet:

$$dy = \frac{3dx : 2x\sqrt{x} - 4xdx : \sqrt[3]{(1-xx)}}{4\sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)}}.$$

Simili autem modo singulares litteras loco terminorum aliquantum compositorum substituendo omnium huiusmodi functionum differentialia facile eruuntur.

163. Si quantitas differentianda fuerit productum ex duabus pluribusue functionibus ipsius x, quarum differentialia constant, eius differentiale sequente modo commodissime inuenietur. Sint p & q functiones ipsius x, quarum differentialia dp & dq iam sunt cognita, quia posito $x+dx$ loco x; p abit in $p+dp$ & q in $q+dq$; productum pq transmutabitur in

$$(p+dp)(q+dq) = pq + pdq + qdp + dpdq,$$

vnde producti pq differentiale erit $= pdq + qdp + dpdq$; vbi cum pdq & qdp sint infinite parua primi ordinis, at $dpdq$ secundi ordinis, vltimus terminus euanescet, eritque igitur $d.pq = pdq + qdp$. Differentiale ergo producti pq constat ex duobus membris, quae obtinentur,

si

ſi vterque factor per differentiale alterius factoris multiplicetur. Hinc facile deducitur differentiatio producti pqr ex tribus factoribus conſtantis: ponatur enim $qr = z$, fiet $pqr = pz$, & $d.pqr = pdz + zdp$, verum ob $z = qr$ erit $dz = qdr + rdq$, quibus valoribus loco z & dz ſubſtitutis erit

$$d.pqr = pqdr + prdq + qrdp,$$

Simili modo ſi quantitas differentianda quatuor habeat factores erit:

$$d.pqrs = pqrds + pqsdr + prsdq + qrsdp,$$

vnde quilibet differentiationem plurium factorum facile perſpiciet.

I. Si ergo fuerit $y = (a+x)(b-x)$, erit

$$dy = -dx(a+x) + dx(b-x) = -adx + bdx - 2xdx$$

quod idem differentiale quoque inuenitur, ſi quantitas propoſita euoluatur: fit enim $y = ab - ax + bx - xx$, ideoque per ſuperiora praecepta $dy = -adx + bdx - 2xdx$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{x}\sqrt{(aa - xx)}$.

Ponatur $\frac{1}{x} = p$ & $\sqrt{(aa - xx)} = q$, quia eſt $dp = \frac{-dx}{xx}$

& $dq = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, erit

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa - xx)}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{(aa - xx)};$$

quae ad eundem denominatorem reductae dabunt

$\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$. Hinc erit differentiale quaeſitum, $dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$.

III.

III. Si fuerit $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$.

Ponatur $xx = p$, & $\frac{1}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = q$; quia inuenimus $dp = 2xdx$ & $dq = \frac{-2x^3dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = \frac{2a^4xdx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc ergo erit differentiale quaesitum

$$dy = \frac{2a^4xdx}{(a^4 + x^4)\sqrt{(a^4 + x^4)}}.$$

IV. Si fuerit $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1 + xx)}}$.

Ponendo $x = p$ & $\frac{1}{x + \sqrt{(1 + xx)}} = q$, ob $dp = dx$ & $dq = \frac{-dx - xdx : \sqrt{(1 + xx)}}{(x + \sqrt{(1 + xx)})^2} = \frac{-dx(x + \sqrt{(1 + xx)})}{(x + \sqrt{(1 + xx)})^2\sqrt{(1 + xx)}}$ $= \frac{-dx}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}$, erit $pdq + qdp =$

$$= \frac{-xdx}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}} + \frac{dx}{x + \sqrt{(1 + xx)}} =$$

$$= \frac{dx(\sqrt{(1 + xx)} - x)}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}.$$ Fiet ergo differentiale quaesitum $dy = \frac{dx(\sqrt{(1 + xx)} - x)}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}$; cuius fractionis si numerator ac denominator multiplicetur per $\sqrt{(1-}$

$\sqrt{(1+xx)}-x$, fiet $dy = \frac{dx(1+2xx-2x\sqrt{(1+xx)})}{\sqrt{(1+xx)}}$
$= \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$

Idem differentiale alio modo commodius inueniri potest; cum enim sit $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$, multiplicetur numerator ac denominator per $\sqrt{(1+xx)} - x$, fietque

$$y = x\sqrt{(1+xx)} - xx = \sqrt{(x^2+x^4)} - xx,$$

cuius differentiale per priorem regulam est

$$dy = \frac{xdx+2x^3dx}{\sqrt{(xx+x^4)}} - 2xdx = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

V. Si fuerit $y = (a+x)(b-x)(x-c)$, erit

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Si fuerit $y = x(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}$.

Ob tres factores ergo reperietur

$$dy = dx(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)} + 2xxdx\sqrt{(aa-xx)}$$
$$- \frac{xxdx(aa+xx)}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dx(a^4+aaxx-4x^4)}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

164. Quanquam etiam fractiones in factoribus comprehendi possunt, tamen commodius vtemur regula fractionibus differentiandi inseruiente. Sit ergo proposita haec fractio $\frac{p}{q}$, cuius differentiale inueniri oporteat. Quoniam posito $x+dx$ loco x fractio illa abit in

$p+$

$$\frac{p+dp}{q+dq} = (p+dp)\left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq}\right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq},$$

vnde ſi fractio ipſa $\frac{p}{q}$ ſubtrahatur, remanet eius differentiale $d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, ob euaneſcentem terminum $\frac{dpdq}{qq}$. Hinc ergo erit $d.\frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{qq}$, vnde haec regula pro differentiatione cuiusque fractionis enaſcitur. *A differentiali numeratoris per denominatorem multiplicato ſubtrahatur differentiale denominatoris per numeratorem multiplicatum, reſiduum dividatur per quadratum denominatoris, quotusque erit differentiale fractionis quaeſitum.* Cuius regulae vſus per ſequentia exempla illuſtrabitur.

I. Si fuerit $y = \frac{x}{aa+xx}$, erit per hanc regulam

$$dy = \frac{(aa+xx)dx - 2xxdx}{(aa+xx)^2} = \frac{(aa-xx)dx}{(aa+xx)^2}.$$

II. Si fuerit $y = \frac{V(aa+xx)}{aa-xx}$; reperitur

$$dy = \frac{(aa-xx)xdx : V(aa+xx) + 2xdx\, V(aa+xx)}{(aa-xx^2)},$$

& facta reductione $dy = \frac{(3aa+xx)xdx}{(aa-xx)^2 V(aa+xx)}$.

Saepenumero expedit ea regula vti, quae ſequitur ex formula priori $d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, qua differentiale fractionis aequale reperitur differentiali numeratoris per denominatoris

nominatorem diuiſo, demto differentiali denominatoris per numeratorem multiplicato at per quadratum denominatoris diuiſo. Ita

III. Si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}$, erit

$$dy = \frac{-2xdx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aaxdx + 4x^3dx)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

quae ad eundem determinatorem reuocata praebet.

$$dy = \frac{-2xdx(2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}.$$

165. Haec iam ſufficiunt ad cuiusque functionis rationalis ipſius x propoſitae differentiale inueſtigandum; ſi enim fuerit integra modus differentiandi iam ſupra eſt expoſitus. Sit igitur functio propoſita fracta, quae ſemper ad huiusmodi formam reducetur:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.}$$

Ponatur numerator $= p$ & denominator $= q$, vt fiat

$y = \frac{p}{q}$; eritque $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$. At cum ſit:

$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$

& $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.$

erit $dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \&c.$

& $dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\varepsilon x^3dx + \&c.$

vnde per multiplicationem obtinebitur:

$$\begin{aligned} qdp = {} & \alpha B\,dx + 2\alpha C x\,dx + 3\alpha D x^2 dx + 4\alpha E x^3 dx + \&c. \\ & + \beta B x\,dx + 2\beta C x^2 dx + 3\beta D x^3 dx + \&c. \\ & + \gamma B x^2 dx + 2\gamma C x^3 dx + \&c. \\ & + \delta B x^3 dx + \&c. \\ pdq = {} & \beta A\,dx + \beta B x\,dx + \beta C x^2 dx + \beta D x^3 dx + \&c. \\ & + 2\gamma A x\,dx + 2\gamma B x^2 dx + 2\gamma C x^3 dx + \&c. \\ & + 3\delta A x^2 dx + 3\delta B x^3 dx + \&c. \\ & + 4\varepsilon A x^3 dx + \&c. \end{aligned}$$

Ex his ita que obtinebitur differentiale quaesitum:

$$dy = \frac{\left.\begin{matrix} +\alpha B \\ -\beta A \end{matrix}\right\} dx \left.\begin{matrix} +2\alpha C \\ -2\gamma A \end{matrix}\right\} x\,dx \left.\begin{matrix} +3\alpha D \\ +\beta C \\ -\gamma B \\ -3\delta A \end{matrix}\right\} x^2 dx \left.\begin{matrix} +4\alpha E \\ +2\beta D \\ -2\delta B \\ -4\varepsilon A \end{matrix}\right\} x^3 dx \left.\begin{matrix} +5\alpha F \\ +3\beta E \\ +\gamma D \\ -\delta C \\ -3\varepsilon B \\ -5\zeta A \end{matrix}\right\} x^4 dx\ \&c.}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.)^2}$$

Quae expressio ad cuiusuis functionis rationalis differentiale expedite inueniendum maxime est accommodata. Quamadmodum enim numerator differentialis ex coefficientibus numeratoris ac denominatoris functionis propositae combinatur, ex inspectione mox intelligitur. Denominator vero differentialis est quadratum denominatoris functionis propositae.

166. Si fractionis propositae vel numerator vel denominator vel vterque ex factoribus constet, multiplicatione actu instituta orietur quidem forma, qualem modo differentiauimus; attamen facilius pro his casibus regula peculiaris formabitur. Sit igitur proposita huiusmodi fractio $y = \frac{pr}{q}$. Ponatur numerator $pr = P$, vt sit $dP = pdr + rdp$. Atque ob $y = \frac{P}{q}$, erit $dy = \frac{qdP - Pdq}{qq}$, substitutis autem loco P & dP valoribus, habebitur:

I. Si fuerit $y = \frac{pr}{q}$;

eius diff. $dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}$.

Si sit $y = \frac{p}{qs}$, posito denominatore $qs = Q$, erit $dQ = qds + sdq$, & $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$. Quare

II. Si fuerit $y = \frac{p}{qs}$,

erit $dy = \frac{qsdp - pqds - psdq}{qqss}$.

Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$; ponatur $pr = P$ & $qs = Q$, vt habeatur $y = \frac{P}{Q}$, & $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$. Cum autem sit $dP = pdr + rdp$ & $dQ = qds + sdq$, prodibit sequens differentiatio:

 III.

III. Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$,

erit $dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$,

seu $dy = \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qss}$.

Simili modo, ſi numerator ac denominator fractionis propoſitae plures habeant factores, differentialia eadem ratione inueſtigabuntur; neque ad hoc ampliori manuductione erit opus. Quamobrem quoque exempla huc pertinentia praetermitto, cum mox modus generalis has omnes differentiandi methodos particulares complectens afferetur.

167. Dantur autem caſus tam productorum quam fractionum, quibus differentiale commodius exprimi poteſt, quam per regulas generaliores hic expoſitas. Euenit hoc ſi factores, qui vel functionem ipſam, vel functionis numeratorem aut denominatorem conſtituunt, fuerint poteſtates.

Ponamus functionem differentiandam eſſe $y = p^m q^n$, ad cuius differentiale inueniendum ſit $p^m = P$ & $q^n = Q$, vt fiat $y = PQ$ & $dy = PdQ + QdP$: Cum autem ſit $dP = mp^{m-1}dp$ & $dQ = nq^{n-1}dq$, fiet his valoribus ſubſtitutis:

$dy = np^m q^{n-1}dq + mp^{m-1}q^n dp = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp)$; vnde ſequens oritur regula:

I. Si

I. Si fuerit $y = p^m q^n$;
erit $dy = p^{m-1} q^{n-1} (npdq + mqdp)$.

Simili modo si tres fuerint factores, differentiale inuenietur, ac reperietur hoc modo expressum.

II. Si fuerit $y = p^m q^n r^k$;
erit $dy = p^{m-1} q^{n-1} r^{k-1} (mqrdp + nprdq + kpqdr)$.

168. Sin autem fuerit proposita fractio, cuius vel numerator vel denominator habeat factorem, qui est potestas, regulae quoque particulares tradi poterunt. Sit primum proposita huiusmodi fractio $y = \frac{p^m}{q}$, erit per regulam fractionibus inseruientem $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq}$, quod differentiale commodius sic exprimetur.

I. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q}$,
erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}$.

Sit iam $y = \frac{p}{q^n}$, fiet per eandem superiorem regulam $dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1}dq}{q^{2n}}$, cuius expressionis si numerator ac denominator per q^{n-1} diuidatur, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$. Quamobrem.

II. Si fuerit $y = \frac{p}{q^n}$, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$.

Quod ſi vero proponatur $y = \frac{p^m}{q^n}$; inuenietur

$$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1} dq}{q^{2n}},$$ quae reducitur ad

$$dy = \frac{mp^{m-1}q dp - np^m dq}{q^{n+1}}.$$ Quocirca

III. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q^n}$;

erit $$dy = \frac{p^{m-1}(mq dp - np dq)}{q^{n+1}}.$$

Denique ſi propoſita fuerit huiusmodi fractio $y = \frac{r}{p^m q^n}$, habebitur per regulam fractionum generalem

$$dy = \frac{p^m q^n dr - mp^{m-1}q^n r dp - np^m q^{n-1} r dq}{p^{2m} q^{2n}},$$

cuius expreſſionis cum numerator & denominator ſit diviſibilis per $p^{m-1}q^{n-1}$:

IV. Si fuerit $y = \frac{r}{p^m q^n}$;

erit $$dy = \frac{pq dr - mqr dp - npr dq}{p^{m+1} q^{n+1}}.$$

Si plures occurrant factores, huiusmodi regulae ſpeciales, quas verbis exprimere ſuperfluum foret, facili negotio pro quouis caſus erui poterunt.

169. Regulae differentiandi quas hactenus expoſuimus tam late patent, vt nulla excogitari poſſit functio ipſius x algebraica, quae non earum ope differentiari que-

queat. Si enim functio ipsius x fuerit rationalis, vel erit integra vel fracta, priori casu §. 159. modum dedimus eiusmodi fructiones differentiandi, posteriori vero casu in §. 165. negotium absoluimus. Simul vero etiam compendia, si factores inuoluantur, differentiationis exhibuimus. Deinde vero etiam quantitates irrationales cuiusuis generis differentiare docuimus, quae quomodocunque functionem propositam afficiant, siue ei per additionem, siue per subtractionem siue multiplicationem, siue diuisionem sint implicatae, perpetuo ad casus iam tractatos reuocari poterunt. Intelligenda autem haec sunt de functionibus explicitis; nam de implicitis, quarum natura per aequationem datur, infra, postquam functiones duarum pluriumue variabilium differentiare docuerimus, tractandi locus erit.

170. Si regulas hic traditas singulas perpendamus atque inter se conferamus, eas omnes ad vnam maxime vniuersalem reducere poterimus; quam autem infra demum rigida demonstratione munire licebit; interim tamen & hoc loco non adeo difficile erit eius veritatem attendenti intueri. Functio quaecunque algebraica composita est ex partibus, quae vel additione vel subtractione vel multiplicatione vel diuisione inter se erunt complicatae; haeque partes erunt vel rationales vel irrationales. Vocemus ergo istas quantitates functionem quamvis constituentes eius partes. *Tum pro qualibet parte functio proposita seorsim ita differentietur, quasi ea pars sola esset variabilis, reliquae vero partes omnes constantes.*

Quo

Quo facto ſingula iſta differentialia, quae ex ſingulis partibus modo deſcripto eliciuntur, in vnam ſummam colligantur, ſicque obtinebitur differentiale functionis propoſitae. Huiusque regulae ope omnes omnino functiones differentiari poterunt, nequidem transcendentibus exceptis, vti infra oſtendetur.

171. Ad regulam hanc illuſtrandam ponamus functionem y duabus conſtare partibus, ſiue per additionem ſiue ſubtractionem connexis, ita vt ſit $y = p \pm q$. Ponatur primo ſola pars p variabilis, altera q conſtans erit differentiale $= dp$, deinde ponatur altera pars $\pm q$ ſola variabilis, altera vero p conſtans, eritque differentiale $= \pm dq$. Atque ex his differentialibus differentiale quaeſitum ita componetur, vt ſit $dy = dp \pm dq$, omnino vti idem iam ſupra inuenimus. Hinc vero ſimul liquet, ſi functio pluribus conſtet partibus, ſiue inuicem additis ſiue ſubtractis, nempe $q = p \pm q \pm r \pm s$, ope huius regulae inuentum iri $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$, plane vti & ſuperior regula docebat.

172. Si partes ſint in ſe inuicem multiplicatae, ita vt ſit $y = pq$; manifeſtum eſt poſita ſola parte p variabili, fore differentiale $= q\,dp$; at ſi altera pars q ſola variabilis ſtatuatur, erit differentiale $= p\,dq$. Addantur ergo haec duo differentialia inuicem, atque prodibit differentiale quaeſitum $dy = q\,dp + p\,dq$, quemadmodum ex iam allatis conſtat. Si plures fuerint partes per multiplicationem connexae, ſcilicet $y = pqrs$, ſi ſucceſſiue

vna-

vnaquaeque ſola variabilis ſtatuatur, orientur iſta differentialia $qrsdp$, $prsdq$, $pqsdr$, & $pqrds$, quorum ſumma dabit differentiale quaeſitum, nempe

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqrds,$$

prorſus vti iam ante inuenimus. Differentiale ergo ex totidem partibus componitur, ſiue partes functionem conſtituentes ſint inuicem additae ſubtractaeve, ſiue in ſe inuicem multiplicatae.

173. Si partes functionem formantes per diuiſionem ſint connexae, nempe $y = \frac{p}{q}$, ponatur ſecundum regulam primum ſola pars p variabilis, eritque ob q conſtans differentiale $= \frac{dp}{q}$; deinde ponatur ſola pars q variabilis ob $y = pq^{-1}$, erit differentiale $= -\frac{pdq}{qq}$, quae duo differentialia collecta dabunt differentiale functionis propoſitae $dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq}$, ſicut iam ſupra inuenimus. Simili modo ſi functio propoſita ſit $y = \frac{pq}{rs}$, ponendo ſucceſſiue ſingulas partes ſolas p, q, r & s variabiles, prodibunt ſequentia differentialia:

$$\frac{qdp}{rs}; \quad \frac{pdq}{rs}; \quad \frac{-pqdr}{rrs}; \quad \& \quad \frac{pqds}{rss},$$ vnde fit

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqsdr - pqrds}{rrss}.$$

174. Dummodo ergo ſingulae partes, ex quibus functio componitur, ita fuerint comparatae, vt earum differentialia exhiberi queant, ſimul quoque totius functionis differentiale inueniri poterit. Quodſi igitur partes fuerint functiones rationales, tum earum differentialia non ſolum ope praeceptorum ante iam datorum inueniuntur, ſed ea quoque ex hac ipſa regula generali erui poterunt: ſin autem partes fuerint irrationales, quia irrationalitas ad poteſtates, quarum exponentes ſunt numeri fracti, reducitur, eae per differentiationem poteſtatum, qua eſt $d.x^n = nx^{n-1}dx$ differentiabuntur. Atque ex eodem fonte haurietur quoque differentiatio eiusmodi formularum irrationalium, quae alias inſuper expreſſiones ſurdas inuoluunt. Vnde patet ſi cum regula generali hic data, infra vero demonſtranda, coniungatur regula differentiandi poteſtates, tum omnium omnino functionum algebraicarum differentialia exhiberi poſſe.

175. Ex his omnibus iam dilucide ſequitur, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, differentiale eius dy huiusmodi habiturum eſſe formam $dy = pdx$, in qua valor ipſius p per praecepta hic expoſita ſemper aſſignari queat. Erit autem p functio ipſius x quoque algebraica, cum in eius determinationem nullae aliae operationes ingrediantur, niſi conſuetae, quibus functiones algebraicae conſtitui ſolent. Hancobrem ſi y fuerit functio algebraica ipſius x, erit quoque $\frac{dy}{dx}$ functio algebraica ipſius x. Atque ſi z fuerit etiam functio algebraica ipſius x, ita vt

ſi dz

si $dz = q\,dx$, ob q functionem algebraicam ipsius x, erit quoque $\frac{dz}{dy}$ functio algebraica ipsius x, quippe quae est $= \frac{p}{q}$. Quare si huiusmodi formulae $\frac{dz}{dy}$ in expressionem cetera algebraicam ingrediantur, eae non impedient, quominus ea expressio sit algebraica, dummodo y & z fuerint functiones algebraicae.

176. Poterimus autem hoc ratiocinium extendere ad differentialia secunda & superiorem ordinum. Si enim manente y functione algebraica ipsius x, fuerit $dy = p\,dx$, atque $dp = q\,dx$; erit sumto differentiali dx constante, $ddy = q\,dx^2$ vti supra vidimus. Cum igitur ob rationes ante allegatas sit quoque q functio algebraica ipsius x, erit quoque $\frac{ddy}{dx^2}$ non solum quantitas finita, sed etiam functio algebraica ipsius x, dummodo y fuerit eiusmodi functio. Simili modo perspicietur, fore $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. functiones algebraicas ipsius x, modo y fuerit talis; atque si z sit quoque functio algebraica ipsius x, omnes expressiones finitae; quae ex differentialibus cuiusuis ordinis ipsarum y, z, & ex dx componuntur cuiusmodi sunt $\frac{ddy}{ddz}$; $\frac{d^3y}{dz\,ddy}$; $\frac{dx\,d^4y}{dy^3\,ddz}$; &c. simul erunt functiones algebraicae ipsius x.

177. Cum igitur nunc methodus ſit tradita cuiusque functionis ipſius x algebraicae differentiale primum inueniendi, eadem methodo poterimus quoque differentialia ſecunda altiorumque ordinum inueſtigare. Si enim y fuerit functio quaecunque algebraica ipſius x, ex eius differentiatione $dy = pdx$ innoteſcet valor ipſius p. Qui ſi denuo differentietur atque reperiatur $dp = qdx$, erit $ddy = qdx^2$, poſito dx conſtante, ſicque definietur differentiale ſecundum. Differentiando porro q, vt ſit $dq = rdx$, habebitur differentiale tertium $d^3y = rdx^3$; ſicque vlterius differentialia altiorum ordinum indagabuntur; quoniam quantitates p, q, r, &c. omnes ſunt functiones ipſius x algebraicae, ad quas differentiandas praecepta data ſufficiunt. Hoc ergo efficietur continua differentiatione; omiſſis enim dx, in differentiatione ipſius y, prodibit valor ipſius $\frac{dy}{dx} = p$, qui denuo differentiatus ac diuiſus per dx, quod fit dum vbique differentiale dx omittatur, dabit valorem ipſius $q = \frac{ddy}{dx^2}$. Simili modo porro inuenitur $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ &c.

I. Sit $y = \frac{aa}{aa+xx}$ cuius differentialia tam prima quam ſequentium ordinum requiruntur.

Primum ergo differentiando ſimulque per dx diuidendo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa+xx)^2}$, hincque porro

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa+xx)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4x - 24aax^3}{(aa+xx)^4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa+xx)^5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa+xx)^6}$$

&c.

II. Sit $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, eruntque differentialia primum & sequentia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-xx)^{\frac{13}{2}}}$$

&c.

Haec

Haec Differentialia facile vlterius continuantur; interim tamen lex, qua termini eorum progrediuntur, non cito patet. Coefficiens quidem supremarum ipsius x potestatum semper est productum numerorum naturalium ab 1 vsque ad ordinem differentialis, quod quaeritur. Interim si has formas vlterius continuemus atque perpendamus, deprehendemus fore generaliter, si $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3 \ldots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}} \left(x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\ 2\ \ldots\ 6} x^{n-6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-7)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ 8} x^{n-8} + \&c. \right)$$

Huiusmodi ergo exempla non solum inseruiunt, ad habitum in differentiationis negotio acquirendum, sed etiam leges, quae in differentialibus omnium ordinum obseruantur, per se sunt notatu dignissimae, atque ad alias inuentiones deducere possunt.

CAPUT

CAPUT VI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM TRANSCENDENTIUM.

178.

Praeter infinita quantitatum transcendentium ſeu non algebraicarum genera, quae calculus integralis ſuppeditabit, in Introductione ad analyſin infinitorum ad cognitionem aliquot huiusmodi quantitatum magis vſitatarum nobis peruenire licuit, quas doctrina de logarithmis & arcubus circularibus ſuggeſſerat. Quoniam igitur harum quantitatum naturam tam dilucide expoſuimus, vt fere eadem facilitate atque quantitates algebraicae in calculo tractari queant, earum quoque differentialia in hoc capite *inueſtigabimus*, quo earum indoles ac proprietates clarius *perſpiciantur*; hocque pacto aditus ad calculum integralem, qui quantitatum transcendentium eſt fons proprius, patefiat.

179. Primum igitur occurrunt quantitates logarithmicae, ſeu eiusmodi functiones ipſius x, quae praeter expreſſiones algebraicas quoque logarithmum ipſius x, ſeu cuiusuis ipſius functionis inuoluunt. Ad quas differentiandas, cum quantitates algebraicae nullum negotium amplius faceſſant, omnis difficultas in inueniendo differentiali logarithmi cuiusque ipſius x functionis erit poſita. Quia vero logarithmorum plurima dantur genera diuerſa, quae

quae tamen inter se constantes tenent rationes, hic logarithmos hyperbolicos potissimum contemplabimur, cum ex iis omnes reliqui logarithmi facile formentur. Si enim functionis p logarithmus hyperbolicus fuerit $= lp$, tum eiusdem functionis p logarithmus ex alio canone desumtus erit $= mlp$, denotante m numerum, quo relatio huius logarithmorum canonis ad hyperbolicos exprimitur. Hanc ob causam lp perpetuo hic designabit logarithmum hyperbolicum quantitatis p.

180. Quaeramus ergo differentiale logarithmi hyperbolici quantitatis x, ponaturque $y = lx$, ita vt differentialis dy valor definiri debeat. Ponatur $x + dx$ loco x, sicque transibit y in $y^{I} = y + dy$; quare habebitur $y + dy = l(x + dx)$ & $dy = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x})$. At iam supra logarithmum hyperbolicum huiusmodi expressionis $1 + z$ ita per seriem infinitam expressimus, vt esset $l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \&c.$ Posito ergo $\frac{dx}{x}$ pro z, obtinebimus:

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \&c.$$

Cum igitur huius seriei omnes termini prae primo euanescant, erit $d.\, lx = dy = \frac{dx}{x}$. Vnde alius cuiuscunque logarithmi, cuius ad hyperbolicum ratio est vt $n:1$, differentiale erit $= \frac{ndx}{x}$.

181. Si igitur cuiusque ipſius x functionis p logarithmus lp proponatur, eodem ratiocinio reperietur eius differentiale eſſe $= \frac{dp}{p}$, vnde ad logarithmorum differentialia inuenienda haec habetur regula. *Quantitatis* p, *cuius logarithmus proponitur, ſumatur differentiale, hocque per ipſam quantitatem* p *diuiſum dabit differentiale logarithmi quaeſitum.* Sequitur haec eadem regula quoque ex forma $\frac{p^0 - 1^0}{0}$, ad quam ſuperiori libro logarithmum ipſius p reduximus. Sit $\omega = 0$, & cum ſit

$lp = \frac{p^{\omega}-1}{\omega}$; erit $d.lp = d.\frac{1}{\omega}p^{\omega} = p^{\omega-1}dp = \frac{dp}{p}$ ob $\omega = 0$. Notandum autem eſt $\frac{dp}{p}$ eſſe differentiale logarithmi hyperbolici ipſius p; ita vt, ſi logarithmus vulgaris ipſius p proponeretur, differentiale illud $\frac{dp}{p}$ multiplicari deberet per hunc numerum 0,43429448 &c.

182. Ope huius ergo regulae, cuiuscunque functionis ipſius x logarithmus proponatur, eius differentiale facillime inueniri poterit, quemadmodum ex ſequentibus exemplis perſpicietur:

I. Si ſit $y = lx$; erit $dy = \frac{dx}{x}$.

II. Si ſit $y = lx^n$; ponatur $x^n = p$, vt ſit $y = lp$, eritque $dy = \frac{dp}{p}$. At eſt $dp = nx^{n-1}dx$, vnde fit $dy = \frac{n\,dx}{x}$.

Idem quoque ex logarithmorum natura colligitur; cum enim fit $lx^n = nlx$, erit $d.lx^n = nd.lx = \frac{n\,dx}{x}$.

III. Si fit $y = l(1+xx)$, erit $dy = \frac{2x\,dx}{1+xx}$.

IV. Si fit $y = l\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$; quia erit $y = -l\sqrt{(1-xx)} = -\frac{1}{2}l(1-xx)$, inuenitur $dy = \frac{x\,dx}{1-xx}$.

V. Si fit $y = l\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, ob $y = lx - \frac{1}{2}l(1+xx)$, fiet $dy = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+xx} = \frac{dx}{x(1+xx)}$.

VI. Si fit $y = l(x+\sqrt{(1+xx)})$, fiet

$$dy = \frac{dx + x\,dx : \sqrt{(1+xx)}}{x+\sqrt{(1+xx)}} = \frac{x\,dx + dx\sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}},$$

cuius fractionis cum numerator ac denominator per $x+\sqrt{(1+xx)}$ fit diuisibilis fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$.

VII. Si fit $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})$, ponatur $x\sqrt{-1} = z$. Atque ob $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(z+\sqrt{(1+zz)})$, erit per praecedens $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}}dz : \sqrt{(1+zz)}$.

Quare, ob $dz = dx\sqrt{-1}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Quamuis ergo logarithmus propositus imaginaria inuolvat, tamen eius differentiale fit reale.

183.

183. Si quantitas, cuius logarithmus proponitur, habeat factores, tum ipse logarithmus in plures alios resoluetur hoc modo: Si proponatur $y = lpqrs$, quia erit $y = lp + lq + lr + ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$. Haec resolutio pariter locum habet, si illa quantitas, cuius logarithmus differentiari debet, fuerit fractio. Sit enim $y = l\frac{pq}{rs}$, ob $y = lp + lq - lr - ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$. Neque etiam potestates difficultatem mouebunt, si enim fuerit $y = l\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$, ob $y = mlp + nlq - \mu lr - \nu ls$, erit $dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}$.

I. Si fuerit $y = l(a+x)(b+x)(c+x)$, quia erit $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$, fiet differentiale quaesitum

$$dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}.$$

II. Si fuerit $y = \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$, erit $y = \frac{1}{2}l(1+x) - \frac{1}{2}l(1-x)$, hincque $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}$.

III. Si sit $y = \frac{1}{2}l\frac{\surd(1+xx)+x}{\surd(1+xx)-x}$, ob $y = \frac{1}{2}l(\surd(1+xx)+x) - \frac{1}{2}l(\surd(1+xx)-x)$, erit $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{\surd(1+xx)} + \frac{\frac{1}{2}dx}{\surd(1+xx)} = \frac{dx}{\surd(1+xx)}$. Hoc idem facilius inuenitur, si in fractione

$\frac{V(1+xx)+x}{V(1+xx)-x}$, irrationalitas in denominatore tollatur multiplicando numeratorem ac denominatorem per

$V(1+xx)+x$, prodibit enim

$$y = \tfrac{1}{2}\, l(V(1+xx)+x)^2 = l(V(1+xx)+x),$$

cuius differentiale ante vidimus esse $dy = \frac{dx}{V(1+xx)}$.

IV. Si sit $y = l\frac{V(1+x)+V(1-x)}{V(1+x)-V(1-x)}$. Ponatur huius fractionis numerator $V(1+x)+V(1-x)=p$ & denominator $V(1+x)-V(1-x)=q$, erit $y=l\frac{p}{q}=lp-lq$, & $dy=\frac{dp}{p}-\frac{dq}{q}$. Est vero $dp=\frac{dx}{2V(1+x)}-\frac{dx}{2V(1-x)}=$ $\frac{-dx}{2V(1-xx)}(V(1+x)-V(1-x))=\frac{-q\,dx}{2V(1-xx)}$; & $dq=\frac{dx}{2V(1+x)}+\frac{dx}{2V(1-x)}=\frac{p\,dx}{2V(1-xx)}$. Hinc fiet

$$\frac{dp}{p}-\frac{dq}{q}=\frac{-q\,dx}{2pV(1-xx)}-\frac{p\,dx}{2qV(1-xx)}=\frac{-(pp+qq)dx}{2pqV(1-xx)}.$$

At est $pp+qq=4$ & $pq=2x$, vnde erit $dy=-\frac{dx}{xV(1-xx)}$. Hoc autem differentiale facilius inuenietur, si logarithmus propositus ita transformetur,

$$y=l\frac{1+V(1-xx)}{x}=l\left(\frac{1}{x}+V\left(\frac{1}{xx}-1\right)\right).$$

Posito

Posito enim $\frac{1}{x} + \surd\left(\frac{1}{xx} - 1\right) = p$, erit

$$dp = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3\surd(\frac{1}{xx}-1)} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx\surd(1-xx)}$$

$$= \frac{-dx(1+\surd(1-xx))}{xx\surd(1-xx)},$$ ideoque, ob $p = \frac{1+\surd(1-xx)}{x}$,

erit $dy = \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x\surd(1-xx)}$ vt ante.

184. Cum igitur logarithmorum differentialia prima, si per dx diuidantur, sint quantitates algebraicae, differentialia secunda ac sequentium ordinum per praecepta praecedentis capitis facile inueniuntur, siquidem differentiale dx assumatur constans. Sic posito

$$y = lx, \quad \text{erit}$$

$$dy = \frac{dx}{x}, \quad \& \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$ddy = \frac{-dx^2}{x^2}, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}, \quad \& \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4}, \quad \& \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4}$$

&c.

Atque ſi p fuerit quantitas algebraica, ſitque $y = lp$, etiamſi y non ſit quantitas algebraica, tamen $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. erunt functiones algebraicae ipſius x.

185. Expoſita logarithmorum differentiatione, functiones, quae ex algebraicis ac logarithmis ſunt permixtae, facile differentiabuntur, perinde atque eae, quae ex logarithmis ſolis componuntur; vti ex ſequentibus exemplis fiet perſpicuum.

I. Si ſit $y = (lx)^2$, ponatur $lx = p$, atque ob $y = p^2$ erit $dy = 2pdp$; verum $dp = \frac{dx}{x}$; ideoque erit $dy = \frac{2dx}{x} lx$.

II. Simili modo ſi ſit $y = (lx)^n$, erit $dy = \frac{ndx}{x}(lx)^{n-1}$, vnde, ſi ſit $y = \sqrt{lx}$, ob $n = \frac{1}{2}$, erit $dy = \frac{dx}{2x\sqrt{lx}}$.

III. Atque ſi p fuerit functio quaecunque ipſius x, ponaturque $y = (lp)^n$, erit $dy = \frac{ndp}{p}(lp)^{n-1}$. Quare cum differentiale dp per praecedentia aſſignari poſſit, erit quoque differentiale ipſius y cognitum.

IV. Si ſit $y = lp \cdot lq$, fuerintque p & q functiones quaecunque ipſius x, per regulam factorum ſupra datam erit $dy = \frac{dp}{p} lq + \frac{dq}{q} lp$.

V. Si ſit $y = xlx$; erit per eandem regulam $dy = dxlx + \frac{xdx}{x} = dxlx + dx$.

VI.

VI. Si fit $y = x^m lx - \frac{1}{m} x^m$, differentiatione fecundum partes inftituta, reperietur $d. x^m lx = m x^{m-1} dx lx + x^{m-1} dx$, & $d. \frac{1}{m} x^m = x^{m-1} dx$, vnde erit $dy = m x^{m-1} dx lx$.

VII. Si fit $y = x^m (lx)^n$, fiet $dy = m x^{m-1} dx (lx)^n + n x^{m-1} dx (lx)^{n-1}$.

VIII. Si logarithmi logarithmorum occurrant, vti fi fuerit $y = llx$, ponatur $lx = p$, erit $y = lp$, & $dy = \frac{dp}{p}$; at eft $dp = \frac{dx}{x}$; vnde fiet $dy = \frac{dx}{x lx}$.

IX. Atque fi fuerit $y = lllx$, fi ftatuatur $lx = p$, fiet $y = llp$, eritque per exemplum praecedens $dy = \frac{dp}{plp}$; at eft $dp = \frac{dx}{x}$, quibus valoribus fubftitutis habebitur $dy = \frac{dx}{xlx.llx}$.

186. Expofita logarithmorum differentiatione, progrediamur ad quantitates exponentiales, feu eiusmodi poteftates, quarum exponentes fint variabiles. Huiusmodi autem ipfius x functionum differentialia per logarithmorum differentiationem inueniri poffunt hoc modo. Quaeratur differentiale ipfius a^x, ad quod inueftigandum ponatur $y = a^x$, eritque logarithmis fumendis $ly = x la$. Sumantur iam differentialia, atque obtinebitur $\frac{dy}{y} = dx la$; vnde fit $dy = y dx la$, cum autem fit $y = a^x$, erit $dy = a^x dx la$, quod eft differentiale ipfius a^x. Simili mo-

modo, ſi ſit p functio quaecunque ipſius x, huius quantitatis exponentialis a^p differentiale erit $= a^p dp la$.

187. Hoc idem autem differentiale immediate ex natura quantitatum exponentialium in introductione expoſita deduci poteſt. Sit enim propoſita a^p, denotante p functionem quamcunque ipſius x, quae, poſito $x + dx$ loco x, abeat in $p + dp$. Vnde ſi ponatur $y = a^p$, ſi x abeat in $x + dx$, erit $y + dy = a^{p+dp}$, ideoque $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^{dp} - 1)$. Oſtendimus autem ſupra, quamuis quantitatem exponentialem a^z per huiusmodi ſeriem exprimi $1 + zla + \frac{z^2(la)^2}{2} + \frac{z^3(la)^3}{6} + \&c.$ vnde erit $a^{dp} = 1 + dpla + \frac{dp^2(la)^2}{2} + \&c.$, & $a^{dp} - 1 = dpla$, quia ſequentes termini prae $dpla$ omnes euaneſcunt. Conſequenter erit $dy = d \colon a^p = a^p dpla$. *Quare quantitatis exponentialis* a^p *differentiale erit productum ex ipſa quantitate exponentiali, exponentis differentiali* dp, *& logarithmo quantitatis conſtantis* a, *quae ad exponentem variabilem eſt euecta.*

188. Si igitur e ſit numerus, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, vt ſit $le = 1$, erit quantitatis e^x differentiale $= e^x dx$. Atque ſi dx ſumatur conſtans, erit huius differentiale $= e^x dx^2$, quod eſt differentiale ſecundum ipſius e^x. Simili modo differentiale tertium erit $= e^x dx^3$. Quare ſi ſit

$$y = e^{nx}, \text{ erit } \frac{dy}{dx} = ne^{nx}, \;\&\; \frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx}$$

$$\text{porroque } \frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}; \;\frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx}; \;\&c.$$

Vnde patet ipſius e^{nx} differentialia primum, ſecundum & reliqua ſequentia conſtituere progreſſionem geometricam : eritque ergo differentiale ordinis m ipſius $e^{nx} = y$, nempe $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$; hincque igitur $\frac{d^m y}{y\,dx^m}$ quantitas conſtans n^m.

189. Si ipſa quantitas, quae eleuatur, fuerit variabilis, eius differentiale ſimili modo inueſtigabitur. Sint p & q functiones quaecunque ipſius x, ac proponatur quantitas exponentialis $y = p^q$. Sumtis logarithmis erit $ly = qlp$, quibus differentiatis erit $\frac{dy}{y} = dqlp + \frac{qdp}{p}$, vnde fit $dy = ydqlp + \frac{yqdp}{p} = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$, ob $y = p^q$. Hoc ergo differentiale conſtat duobus membris, quorum prius $p^q dqlp$ oritur, ſi quantitas propoſita p^q ita differentietur, quaſi p eſſet quantitas conſtans, ſolusque exponens q variabilis : alterum vero membrum $qp^{q-1}dp$ oritur, ſi in quantitate propoſita p^q exponens q tanquam conſtans ſpectetur, ſolaque quantitas p, quaſi eſſet variabilis, tractetur. Hocque ergo differentiale per regulam generalem differentiandi ſupra traditam inueniri potuiſſet.

190. Eiusdem vero expressionis p^q differentiale quoque ex natura quantitatum exponentialium erui potest hoc modo: sit $y = p^q$, eritque, loco x posito $x + dx$, vtique $y + dy = (p + dp)^{q+dq}$, quae expressio, si more solito in seriem resoluatur, fiet

$$y + dy = p^{q+dq} + (q + dq)\, p^{q+dq-1} dp$$
$$+ \frac{(q + dq)(q + dq - 1)}{1 \cdot 2} p^{q+dq-2} dp^2 + \&c.$$

ideoque

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)\, p^{q+dq-1} dp,$$

sequentes enim termini, qui altiores ipsius dp potestates inuoluunt, prae $(q + dq) p^{q+dq-1} dp$ euanescunt. At est $p^{q+dq} - p^q = p^q(p^{dq} - 1) = p^q(1 + dq\,lp + \frac{dq^2 (lp)^2}{2} + \&c. - 1)$ $= p^q dq\,lp$. In altero vero termino $(q + dq) p^{q+dq-1} dp$, si loco $q + dq$ scribamus q, orietur $q p^{q-1} dp$, ideoque differentiale erit vt ante $dy = p^q dq\,lp + q p^{q-1} dp$.

191. Facilius vero hoc idem differentiale ex natura quantitatum exponentialium inuestigabitur, hoc modo: Cum, sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, sit $p^q = e^{qlp}$, vtriusque enim logarithmus est idem qlp; erit $y = e^{qlp}$. Quare, cum nunc quantitas eleuata e sit constans, erit $dy = e^{qlp}\left(dq\,lp + \frac{q\,dp}{p}\right)$, vti ante ostendimus in regula §. 187 data. Restituatur igitur p^q loco e^{qlp}, fietque

$$dy = p^q dq\,lp + p^q q\,dp : p = p^q dq\,lp + q p^{q-1} dp.$$

Si

Si igitur fuerit $y = x^x$, erit $dy = x^x dx lx + x^x dx$; atque hinc quoque eius vlteriora differentialia definientur: reperietur enim:

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x} + (1 + lx)^2\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x\left((1 + lx)^3 + \frac{3(1 + lx)}{x} - \frac{1}{xx}\right)$$

&c.

192. Inter differentialia huiusmodi functionum, quae quantitates exponentiales complectuntur, imprimis sunt notanda sequentia exempla, quae ex differentiatione formulae $e^x p$ originem habent; est autem

$$d.\, e^x p = e^x dp + e^x p dx = e^x(dp + pdx).$$

I. Si sit $y = e^x x^n$; erit $dy = e^x n x^{n-1} dx + e^x x^n dx$
seu $dy = e^x dx(nx^{n-1} + x^n)$

II. Si sit $y = e^x(x - 1)$
Erit $dy = e^x x dx$.

III. Si sit $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$
Erit $dy = e^x xx dx$.

IV. Si sit $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$
Erit $dy = e^x x^3 dx$.

193. Si ipsi exponentes fuerint denuo quantitates exponentiales, differentiatio secundum eadem praecepta in-

 sti-

ſtituetur. Sic ſi haec quantitas e^{e^x} differentiari debeat, ſtatuatur $e^x = p$, vt ſit $y = e^{e^x} = e^p$, erit $dy = e^p dp$; at eſt $dp = e^x dx$, vnde ſi fuerit

$$y = e^{e^x}; \text{ erit } dy = e^{e^x} e^x dx,$$

$$\text{atque ſi ſit } y = e^{e^{e^x}}; \text{ erit } dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx.$$

Quod ſi vero fuerit $y = p^{q^r}$, ſtatuatur $q^r = z$, erit $dy = p^z dz lp + z p^{z-1} dp$, at $dz = q^r dr lq + r q^{r-1} dq$, vnde $dy = p^z q^r dr lp.lq + p^z r q^{r-1} dq lp + p^z q^r dp : p$.

Quare ſi ſit:

$$y = p^{q^r}, \text{ erit } dy = p^{q^r} q^r \left(dr\, lp.lq + \frac{r dq lp}{q} + \frac{dp}{p} \right).$$

Hoc ergo modo, quaecunque occurrat quantitas exponentialis, eius differentiale inueniri poterit.

194. Pergamus ergo ad quantitates transcendentes, ad quarum cognitionem conſideratio arcuum circularium nos ſupra deduxit. Sit igitur in circulo, cuius radium conſtanter ponimus vnitati aequalem, propoſitus arcus, cuius ſinus ſit $= x$, quem arcum hoc modo exprimamus A ſin x; huiusque arcus differentiale inueſtigemus, ſeu incrementum quod accipit, ſi ſinus x differentiali ſuo dx au-

augeatur. Hoc autem ex differentiatione logarithmorum praeſtari poterit, quia in introductione oſtendimus hanc expreſſionem A ſin x reduci poſſe ad hanc logarithmicam: $\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$. Poſito ergo $y = \text{A ſin} x$, erit quoque $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$; quae differentiata dat

$$dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{-xdx}{\sqrt{(1-xx)}}+dx\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}} = \frac{dx(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})}{(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})\sqrt{(1-xx)}},$$

vnde fit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

195. Iſtud arcus circularis differentiale etiam hoc modo facilius ſine logarithmorum ſubſidio inueniri poteſt. Si enim ſit $y = \text{A ſin} x$, erit x ſinus arcus y, ſeu $x = \text{ſin} y$. Cum igitur, poſito $x + dx$ loco x, abeat y in $y + dy$, fiet $x + dx = \text{ſin}(y + dy)$. At quia eſt

$$\text{ſin}(a+b) = \text{ſin} a. \text{coſ} b + \text{coſ} a. \text{ſin} b, \quad \text{erit}$$

$$\text{ſin}(y+dy) = \text{ſin} y. \text{coſ} dy + \text{coſ} y. \text{ſin} dy:$$

arcus autem euaneſcentis dy ſinus ipſi illi arcui dy, eiusque coſinus ſinui toti aequatur, hanc ob rem fiet

$$\text{ſin}(y+dy) = \text{ſin} y + dy \,\text{cſ} y, \text{ ideoque } x + dx = \text{ſin} y + dy \,\text{cſ} y.$$

Quia vero eſt

$\text{ſin} y = x$, erit coſinus ipſius y ſeu $\text{coſ} y = \sqrt{(1-xx)}$, quibus valoribus ſubſtitutis, erit $dx = dy\sqrt{(1-xx)}$, ex qua obtinebitur $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Arcus ergo, cuius ſinus proponitur, differentiale aequatur differentiali ſinus per coſinum diuiſo.

196. Cum igitur, ſi p fuerit functio quaecunque ipſius x, atque y denotet arcum, cuius ſinus eſt $= p$, ſeu $y = A\,\text{ſin}\,p$, ſit huius arcus differentiale $dy = \frac{dp}{V(1-pp)}$, vbi $V(1-pp)$ exprimit coſinum eiusdem arcus, inueniri quoque poterit differentiale arcus, cuius coſinus proponitur. Sit enim $y = A\,\text{coſ}\,x$, erit eiusdem arcus ſinus $= V(1-xx)$, ideoque $y = A\,\text{ſin}\,V(1-xx)$. Facto ergo $p = V(1-xx)$, erit $dp = \frac{-x\,dx}{V(1-xx)}$, & $V(1-pp) = x$; vnde fiet $dy = \frac{-dx}{V(1-xx)}$. *Arcus ergo, cuius coſinus proponitur, differentiale aequatur differentiali coſinus negatiue ſumto, atque per ſinum eiusdem arcus diuiſo.* Quod etiam hoc modo oſtendi poteſt: ſi ſit $y = A\,\text{coſ}\,x$, ponatur $z = A\,\text{ſin}\,x$, erit $dz = \frac{dx}{V(1-xx)}$; at arcus $y + z$ ſimul ſumti dant arcum conſtantem $90°$, eritque $y + z =$ conſtans ideoque $dy + dz = 0$, ſeu $dy = -dz$; vnde fit $dy = \frac{-dx}{V(1-xx)}$, vt ante.

197. Si arcus proponatur differentiandus, cuius tangens detur, ita vt ſit $y = A\,\text{tang}\,x$. Arcus autem cuius tangens eſt x, ſinus erit $= \frac{x}{V(1+xx)}$, & coſinus $= \frac{1}{V(1+xx)}$. Poſito ergo $\frac{x}{V(1+xx)} = p$, vt ſit $V(1-pp) = \frac{1}{V(1+xx)}$,

fiet

fiet $y = A \sin p$: vnde per regulam modo datam erit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. At, ob $p = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, erit $dp = \frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$; quibus valoribus ſubſtitutis fiet $dy = \frac{dx}{1+xx}$. *Arcus ergo, cuius tangens proponitur, differentiale aequatur differentiali tangentis per quadratum ſecantis diuiſo.* Eſt enim $\sqrt{(1+xx)}$ ſecans, ſi x ſit tangens.

198. Simili modo ſi proponatur arcus, cuius cotangens datur, ita vt ſit $y = A \cot x$; quia eiusdem arcus tangens eſt $= \frac{1}{x}$, poſito $\frac{1}{x} = p$, erit $y = A \operatorname{tang} p$, ac propterea $dy = \frac{dp}{1+pp}$. Cum nunc ſit $dp = \frac{-dx}{xx}$, facta ſubſtitutione, erit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, quod eſt differentiale cotangentis negatiue ſumtum, atque per quadratum coſecantis diuiſum. Porro ſi proponatur $y = A \sec. x$, quia eſt $y = A \cos \frac{1}{x}$, fiet $dy = \frac{dx}{xx\sqrt{\left(1 - \frac{1}{xx}\right)}} = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$.

Atque, ſi ſit $y = A \operatorname{cosec}. x$, erit $y = A \sin \frac{1}{x}$, ideoque $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Saepe etiam ſinus verſus occurrit, ita ſi proponatur $y = A \operatorname{sv}. x$, quia eſt $y = A \cos(1-x)$, huiusque arcus ſinus eſt $= \sqrt{(2x-xx)}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$.

199. Quanquam ergo arcus, cuius ſinus, vel coſinus, vel tangens, vel cotangens, vel ſecans, vel coſecans, vel denique ſinus verſus datur, eſt quantitas transcendens, tamen eius differentiale, ſi per dx diuidatur, erit quantitas algebraica, ac propterea quoque eius differentialia ſecunda, tertia, quarta &c. ſi per poteſtates ipſius dx conuenientes diuidantur. Ceterum, quo haec differentiatio melius percipiatur, adiunximus ſequentia exempla.

I. Si ſit $y = \text{A ſin } 2x\sqrt{(1-xx)}$, ponatur $p = 2x\sqrt{(1-xx)}$, vt ſit $y = \text{A ſin } p$, eritque $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. At eſt $dp = 2dx\sqrt{(1-xx)} - \frac{2xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2dx(1-2xx)}{\sqrt{(1-xx)}}$, & $\sqrt{(1-pp)} = 1-2xx$, quibus valoribus ſubſtitutis, erit $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Quod etiam inde patet, quod $2x\sqrt{(1-xx)}$ ſit ſinus arcus dupli, dum x eſt ſinus ſimpli, erit ergo $y = 2\text{ A ſin } x$, ideoque $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

II. Si ſit $y = \text{A ſin } \frac{1-xx}{1+xx}$; ponatur $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, erit $dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2}$ & $\sqrt{(1-pp)} = \frac{2x}{1+xx}$. Quare cum ſit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$, erit $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

III.

III. Si sit $y = \text{A}\,\text{sin}\,\sqrt{\frac{1-x}{2}}$, ponatur $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$, erit $\sqrt{(1-pp)} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, & $dp = \frac{-dx}{4\sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)}}$, vnde fit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$.

IV. Si sit $y = \text{A}\,\text{tang}\,\frac{2x}{1-xx}$, facto $p = \frac{2x}{1-xx}$, erit $1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$, & $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$ per regulam tangentium (197), erit $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

V. Si sit $y = \text{A}\,\text{tang}\,\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, posito $p = \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, fiet $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx}$, & $1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx} = \frac{2(\sqrt{(1+xx)}-1)\sqrt{(1+xx)}}{xx}$. Atqui $dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-1)}{xx\sqrt{(1+xx)}}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$, fiet $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$; quod etiam inde intelligitur, quod sit $\text{A}\,\text{tang}\,\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x} = \frac{1}{2}\,\text{A}\,\text{tang}\,x$.

VI. Si ſit $y = e^{A\,\text{ſin}\,x}$, haec formula quoque per praecedentia differentiabitur: fiet enim $dy = e^{A\,\text{ſin}\,x} \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Hoc ergo modo omnes functiones ipſius x, in quas praeter logarithmos atque exponentiales quantitates etiam arcus circulares ingrediuntur, differentiari poterunt.

200. Quoniam differentialia arcuum per dx diuiſa ſunt quantitates algebraicae, eorum differentialia ſecunda & ſequentia per ea, quae de functionum algebraicarum differentiatione expoſuimus, inuenientur. Sit $y = A\,\text{ſin}\,x$, quia eſt $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, cuius differentiale dabit valorem pro $\frac{ddy}{dx^2}$, ſi quidem dx ſumatur conſtans: vnde differentialia ipſius y cuiuſuis ordinis ita ſe habebunt.

Si ſit $y = A\,\text{ſin}\,x$; erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}};\quad \text{\& ſumto } dx \text{ conſtante}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

d^5y

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}}$$

&c.

vnde concludimus vt supra §. 177 fore generaliter:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1.2.3 \ldots \ldots n}{(1 - xx)^{n+\frac{1}{2}}} \text{ in}$$

$$\left(x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4}\right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} x^{n-6} + \&c.\right)$$

201. Supersunt quantitates, quae ex harum inuersione nascuntur, scilicet sinus, tangentesue arcuum datorum, quas quomodo differentiare oporteat, ostendamus. Sit igitur x arcus circuli, & $\sin x$ denotet eius sinum, cuius differentiale inuestigemus. Ponamus $y = \sin x$, ac posito $x + dx$ loco x, quia y abit in $y + dy$, erit

$$y + dy = \sin(x + dx), \ \& \ dy = \sin(x + dx) - \sin x.$$

Est autem $\sin(x + dx) = \sin x . \cos dx + \cos x . \sin dx$, atque cum sit, vti in introductione ostendimus

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

 erit

erit reiectis terminis euanescentibus $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, vnde fit $\sin(x+dx) = \sin x + dx \cos x$. Quare, posito $y = \sin x$, erit $dy = dx \cos x$. *Differentiale ergo sinus arcus cuiusuis aequatur differentiali arcus per cosinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x, erit simili modo $d.\sin p = dp \cos p$.

202. Similiter si proponatur $\cos x$, seu cosinus arcus x, cuius differentiale inuestigari oporteat. Ponatur $y = \cos x$, & posito $x+dx$ loco x, fiet $y+dy = \cos(x+dx)$. Est vero $\cos(x+dx) = \cos x.\cos dx - \sin x.\sin dx$, & quia vt modo vidimus est $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, erit $y+dy = \cos x - dx \sin x$, ideoque $dy = -dx \sin x$. *Quare differentiale cosinus cuiusque arcus aequatur differentiali arcus negatiue sumto per sinum eiusdem arcus multiplicato.* Sic si p fuerit functio quaecunque ipsius x, erit $d.\cos p = -dp \sin p$. Hae differentiationes quoque ex antecedentibus elici possunt hoc modo: si fuerit $y = \sin p$, erit $p = A \sin y$; & $dp = \frac{dy}{\surd(1-yy)}$; at ob $y = \sin p$, erit $\cos p = \surd(1-yy)$, quo valore substituto erit $dp = \frac{dy}{\cos p}$ & $dy = dp \cos p$, vt ante. Pari modo si sit $y = \cos p$, erit $\surd(1-yy) = \sin p$, & $p = A \cos y$, ideoque $dp = \frac{-dy}{\surd(1-yy)} = \frac{-dy}{\sin p}$, vnde fit vt ante $dy = -dp \sin p$.

203. Si fuerit $y = \tang x$, erit $dy = \tang(x+dx) - \tang x$; at est $\tang(x+dx) = \frac{\tang x + \tang.dx}{1 - \tang x.\tang dx}$, a qua

a qua fractione si tangens x subtrahatur, remanebit $dy = \frac{\text{tang}\, dx (1 + \text{tang}\, x. \text{tang}\, x)}{1 - \text{tang}\, x. \text{tang}\, dx}$. Verum arcus euanescentis dx tangens ipsi arcui est aequalis, ideoque tang $dx = dx$, & denominator $1 - dx$ tang x, abit in vnitatem: quocirca fiet $dy = dx (1 + \text{tang}\, x^2)$. Est vero $1 + \text{tang}\, x^2 = \text{sec.}\, x^2 = \frac{1}{\text{cos}\, x^2}$, denotante cos x^2 quadratum cosinus ipsius x: consequenter si fuerit $y = \text{tang}\, x$, erit $dy = dx\, \text{sec}\, x^2 = \frac{dx}{\text{cos}\, x^2}$. Quod differentiale quoque per differentiationem sinuum & cosinuum inueniri potest; cum enim sit tang $x = \frac{\text{sin}\, x}{\text{cos}\, x}$, erit

$$dy = \frac{dx\, \text{cos}\, x. \text{cos}\, x + dx\, \text{sin}\, x. \text{sin}\, x}{\text{cos}\, x^2} = \frac{dx}{\text{cos}\, x^2},$$

ob $\text{sin}\, x^2 + \text{cos}\, x^2 = 1$.

204. Aliter etiam hoc differentiale inuenitur. Cum sit $y = \text{tang}\, x$, erit $x = \text{A tang}\, y$, & per praecepta superiora fiet $dx = \frac{dy}{1 + yy}$. At cum sit $y = \text{tang}\, x$, erit $\sqrt{(1 + yy)} = \text{sec}\, x = \frac{1}{\text{cos}\, x}$, ideoque $dx = dy\, \text{cos}\, x^2$, & $dy = \frac{dx}{\text{cos}\, x^2}$, vt ante. *Tangentis ergo cuiusuis arcus differentiale aequatur differentiali arcus diuiso per quadratum cosinus eiusdem arcus.* Simili modo si proponatur

$y = \cot x$, fiet $x = \mathrm{A}\cot y$, & $dx = \frac{-dy}{1+yy}$. At vero erit $\sqrt{(1+yy)} = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, vnde habebitur $dx = -dy \sin x^2$, & $dy = \frac{-dx}{\sin x^2}$. *Cotangentis ergo cuiusuis arcus differentiale aequatur differentiali arcus negatiue sumto ac per quadratum sinus eiusdem arcus diuiso.* Vel quia est $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, fiet hanc fractionem differentiando:

$$dy = \frac{-dx \sin x^2 - dx \cos x^2}{\sin x^2} = \frac{-dx}{\sin x^2},$$

vti modo inuenimus.

205. Si proponatur secans arcus, vt sit $y = \sec. x$, quia erit $y = \frac{1}{\cos x}$, erit $dy = \frac{dx \sin x}{\cos x^2} = dx \operatorname{tang} x . \sec. x$. Simili modo si fuerit $y = \operatorname{cosec}. x$, ob $y = \frac{1}{\sin x}$, erit $dy = \frac{-dx \cos x}{\sin x^2} = -dx \cot x \operatorname{cosec}. x$, pro quibus casibus peculiares regulas formare superfluum foret. Si sinus versus arcus proponatur $y = \mathrm{sv}. x$, quia est $y = 1 - \cos x$, erit $dy = dx \sin x$. Omnes ergo casus, quibus linea quaepiam recta ad arcum relata proponitur, quia semper per sinum cosinumue exprimi potest, sine difficultate differentiari poterunt. Neque vero tantum differentialia prima, sed etiam secunda & sequentia per regulas datas inuenientur. Ponamus esse $y = \sin x$ & $z = \cos x$, atque dx esse constans: erit vt sequitur:

$y =$

$y = \sin x$	$z = \cos x$
$dy = dx \cos x$	$dz = - dx \sin x$
$ddy = - dx^2 \sin x$	$ddz = - dx^2 \cos x$
$d^3y = - dx^3 \cos x$	$d^3z = dx^3 \sin x$
$d^4y = dx^4 \sin x$	$d^4z = dx^4 \cos x$
&c.	&c.

206. Simili modo inueniri poterunt differentialia omnium ordinum tangentis arcus x. Sit enim $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, & ponatur dx constans, erit

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{\cos x^4} - \frac{4}{\cos x^2}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \sin x}{\cos x^5} - \frac{8 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{\cos x^6} - \frac{120}{\cos x^4} + \frac{16}{\cos x^2}$$

d^6y

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720\,\text{fin}\,x}{\text{cof}\,x^7} - \frac{480\,\text{fin}\,x}{\text{cof}\,x^5} + \frac{32\,\text{fin}\,x}{\text{cof}\,x^3}$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{\text{cof}\,x^8} - \frac{6720}{\text{cof}\,x^6} + \frac{2016}{\text{cof}\,x^4} - \frac{64}{\text{cof}\,x^2}.$$

&c.

207. Functiones ergo quaecunque, in quas finus vel cofinus arcuum ingrediuntur, per haec praecepta differentiari poterunt, vti ex fequentibus exemplis videre licet.

I. Si fit $y = 2\,\text{fin}\,x.\,\text{cof}\,x = \text{fin}\,2x$
Erit $dy = 2dx\,\text{cof}\,x^2 - 2dx\,\text{fin}\,x^2 = 2dx\,\text{cof}\,2x.$

II. Si fit $y = V\frac{1-\text{cof}\,x}{2}$, vel $y = \text{fin}\,\frac{1}{2}x$
Erit $dy = \frac{dx\,\text{fin}\,x}{2V2(1-\text{cof}\,x)}$. Cum autem fit $V2(1-\text{cof}\,x) = 2\,\text{fin}\,\frac{1}{2}x$, & $\text{fin}\,x = 2\,\text{fin}\,\frac{1}{2}x.\text{cof}\,\frac{1}{2}x$; fiet $dy = \frac{1}{2}dx.\,\text{cof}\,\frac{1}{2}x$, vti ex forma $y = \text{fin}\,\frac{1}{2}x$ immediate fequitur.

III. Si fit $y = \text{cof}\,l\frac{1}{x}$; erit, pofito $l\frac{1}{x} = p$, $y = \text{cof}\,p$, & $dy = -dp\,\text{fin}\,p$. At, ob $p = l1 - lx$, erit $dp = \frac{-dx}{x}$; ideoque $dy = \frac{dx}{x}\,\text{fin}\,l\frac{1}{x}$.

IV. Si fit $y = e^{\text{fin}\,x}$; erit $dy = e^{\text{fin}\,x}dx\,\text{cof}\,x$.

V. Si

V. Si sit $y = e^{\frac{-n}{\cos x}}$; erit $dy = -\frac{e^{\frac{-n}{\cos x}} n\,dx \sin x}{\cos x^2}$.

VI. Si sit $y = l\left(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)$; ponatur $e^{\frac{-n}{\sin x}} = p$; atque ob $y = l(1 - \sqrt{(1 - p)})$, erit

$$dy = \frac{dp}{2(1 - \sqrt{(1-p)})\sqrt{(1-p)}}.$$ At est $dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin x}} n\,dx \cos x}{\sin x^2}$.

Quo valore substituto prodibit

$$dy = \frac{-n\,e^{\frac{-n}{\sin x}}\,dx \cos x}{2 \sin x^2 \left(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)\sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}}.$$

CAPUT VII.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM DUAS PLURESUE VARIABILES INUOLUENTIUM.

208.

Si duae pluresue quantitates variabiles x, y, z, a se inuicem prorſus non pendeant, fieri poteſt, vt etiamſi omnes ſint variabiles, tamen dum vna creſcit decreſcitue, reliquae maneant inuariatae: quia enim nullum nexum inter ſe habere ponuntur, immutatio vnius reliquas non afficit. Neque ergo differentialia quantitatum y & z pendebunt a differentiali ipſius x; ideoque dum x differentiali ſuo dx augetur, quantitates y & z, vel eaedem manere, vel quomodocunque pro lubitu variari poſſunt. Quodſi igitur differentiale quantitatis x ſtatuatur dx, reliquarum quantitatum differentialia dy & dz manent indeterminata, atque pro arbitrio noſtro vel prorſus nihil, vel infinite parua ad dx quamuis rationem tenentia denotabunt.

209. Plerumque autem litterae y & z functiones ipſius x vel incognitas, vel quarum relatio ad x non ſpectatur, ſignificare ſolent, hocque caſu earum differentialia dy & dz certam ad dx relationem habebunt. Siue autem y & z pendeant ab x ſiue ſecus, ratio differentiationis; quam hic ſpectamus, eodem redit. Quaerimus

enim

enim functionis, quae ex pluribus variabilibus x, y, & z vtcunque sit formata, differentiale, quod accipit, dum singulae variabiles x, y, & z suis differentialibus dx, dy, & dz crescunt. Ad hoc ergo inueniendum in functione proposita vbique loco variabilium quantitatum x, y, z scribatur respectiue $x+dx$; $y+dy$; $z+dz$, & ab expressione hoc modo resultante auferatur ipsa functio proposita: residuum dabit ipsum differentiale, quod quaeritur, quemadmodum ex natura differentialium luculenter constat.

210. Sit X functio ipsius x, eiusque differentiale, seu augmentum, dum x differentiali suo dx crescit, sit $=Pdx$. Deinde sit Y functio ipsius y, eiusque differentiale $=Qdy$, quod augmentum Y accipit, dum y abit in $y+dy$: atque Z sit functio ipsius z, eiusque differentiale sit $=Rdz$, quae differentialia Pdx, Qdy, Rdz ex natura functionum X, Y & Z ope praeceptorum supra datorum inueniri poterunt. Quod si ergo proposita fuerit haec quantitas $X+Y+Z$, quae vtique erit functio trium variabilium x, y, & z, eius differentiale erit $=Pdx+Qdy+Rdz$. Vtrum autem haec tria differentialia sint inter se homogenea nec ne? perinde est. Termini enim qui continent potestates ipsius dx prae Pdx aeque euanescunt, ac si reliqua membra Qdy & Rdz abessent, similique est ratio terminorum, qui in differentiatione functionum Y & Z sunt neglecti.

211. Retineant X, Y & Z easdem significationes, sitque proposita ista functio XYZ ipsarum x, y & z, cu-

ius differentiale inueſtigari oporteat. Quoniam, ſi $x+dx$ loco x, $y+dy$ loco y, & $z+dz$ loco z ſcribatur, abit X in $X+Pdx$; Y in $Y+Qdy$; & Z in $Z+Rdz$, ipſa functio propoſita XYZ abibit in

$$(X+Pdx)(Y+Qdy)(Z+Rdz)$$
$$=XYZ+YZPdx+XZQdy+XYRdz$$
$$+ZPQdxdy+YPRdxdz+XQRdydz+PQRdxdydz.$$

At quia dx, dy, & dz ſunt infinite parua, ſiue inter ſe ſint homogenea ſiue non; vltimus terminus prae uno quoque praecedentium euaneſcit. Deinde terminus $ZPQdxdy$ tam prae $YZPdx$ quam prae $XZQdy$ euaneſcit; atque ob eandem rationem termini $YPRdxdz$ & $XQZdydz$ euaneſcent. Ablata ergo ipſa functione propoſita XYZ, erit eius differentiale $=YZPdx+XZQdy+XYRdz$.

212. Exempla haec functionum trium variabilium x, y, & z, quibus pro lubitu quisque plura adiicere poteſt, ſufficiunt ad oſtendendum, ſi functio quaecunque trium variabilium x, y, & z proponatur, vtcunque etiam hae variabiles inter ſe fuerunt permixtae, eius differentiale ſemper huiusmodi formam eſſe habiturum $pdx+qdy+rdz$: vbi p, q, & r futurae ſint ſingulae functiones, vel omnium trium variabilium x, y, & z, vel binarum, vel vnius tantum, prout ratio compoſitionis, qua functio propoſita ex variabilibus x, y, & z atque conſtantibus formatur, fuerit comparata. Simili modo, ſi proponatur functio quatuor pluriumue variabilium

lium x, y, z, & v, eius differentiale ſemper huius modi formam habebit $pdx + qdy + rdz + sdv$.

213. Conſideremus primum functionem duarum tantum variabilium x & y, quae ſit $= V$, cuius ergo differentiale ita ſe habebit, vt ſit $dV = pdx + qdy$. Si igitur quantitas y aſſumeretur conſtans, foret $dy = 0$, ideoque functionis V differentiale eſſet pdx: ſin autem x ſtatueretur conſtans, vt eſſet $dx = 0$, ſolaque y maneret variabilis, tum ipſius V differentiale prodiret $= qdy$. Cum igitur vtraque quantitate x & y variabili poſita ſit $dV = pdx + qdy$, iſta regula pro differentianda functione V duas variabiles x & y inuoluente reſultabit: *Ponatur primum ſola* x *variabilis, altera vero* y *tanquam conſtans tractetur, & quaeratur ipſius* V *differentiale, quod ſit* $= pdx$. *Deinde ponatur ſola quantitas* y *variabilis, altera* x *pro conſtanti habita, & quaeratur ipſius* V *differentiale, quod ſit* $= qdy$. *Quibus factis, poſita vtraque quantitate* x *&* y *variabili, fiet* $dV = pdx + qdy$.

214. Simili modo, cum functionis trium variabilium x, y, & z, quae ſit $= V$, differentiale huiusmodi habeat formam $dV = pdx + qdy + rdz$, manifeſtum eſt, ſi ſola quantitas x fuiſſet variabilis poſita, reliquae vero y & z conſtantes manſiſſent, ob $dy = 0$ & $dz = 0$, prodiiſſet ipſius V differentiale $= pdx$. Pari modo inueniretur differentiale ipſius $V = qdy$, ſi x & z eſſent conſtantes ſolaque y poneretur variabilis; atque ſi x & y tanquam conſtantes tractarentur ſolaque z ſtatueretur variabilis, pro-

diret differentiale ipſius $V = r dz$. Quare ad functionem trium pluriumue variabilium differentiandam, conſideretur ſeorſim quaelibet quantitas variabilis, & functio pro qualibet differentietur, quaſi reliquae omnes eſſent conſtantes; tum ſingula haec differentialia, quae ex ſingulis quantitatibus variabilibus ſunt inuenta, colligantur, eritque aggregatum differentiale quaeſitum functionis propoſitae.

215. In hac regula, quam pro differentiatione functionis quotcunque variabilium inuenimus, continetur demonſtratio regulae ſupra §. 170 datae generalis, cuius ope functio quaecunque vnicam variabilem complectens differentiari poteſt. Si enim pro ſingulis partibus ibi commemoratis totidem litterae diuerſae collocentur, functio ſpeciem induet functionis totidem diuerſarum variabilium, atque adeo modo hic praeſcripto differentiabitur, ſucceſſiue vnamquamque partem, quaſi ſola eſſet variabilis, tractando, cunctaque differentialia, quae ex ſingulis partibus oriuntur, in vnam ſummam coniiciendo: quae ſumma erit differentiale quaeſitum, poſtquam pro ſingulis litteris valores fuerint reſtituti. Haec ergo regula latiſſime patet, atque etiam ad functiones plurium variabilium, quomodocunque fuerint comparatae, extenditur. Vnde eius vſus per vniuerſum calculum differentialem eſt ampliſſimus.

216. Inuenta ergo regula generali, cuius ope functiones quotcunque variabilium differentiari poſſunt, eius vſum in nonnullis exemplis oſtendiſſe iuuabit.

I. Si

I. Si fuerit $V = xy$; erit $dV = xdy + ydx$.

II. Si fuerit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$.

III. Si fuerit $V = \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$; erit

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{yxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. Si fuerit $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$;

erit

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n(\alpha dx + \beta dy)$$
$$+ n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}(\delta dx + \varepsilon dy),$$

siue

$$dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} \quad \text{in}$$

$$\left(\begin{matrix} m\alpha\delta \\ n\alpha\delta \end{matrix} xdx \begin{matrix} + m\beta\delta \\ + n\alpha\varepsilon \end{matrix} xdy \begin{matrix} + m\alpha\varepsilon \\ + n\beta\delta \end{matrix} ydx \right.$$
$$\left. \begin{matrix} + m\beta\varepsilon \\ + n\beta\varepsilon \end{matrix} ydy \begin{matrix} + m\alpha\zeta \\ + n\gamma\delta \end{matrix} dx \begin{matrix} + m\beta\zeta \\ + n\gamma\varepsilon \end{matrix} dy \right).$$

V. Si fuerit $V = ylx$; erit $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$.

VI. Si fuerit $V = x^y$; erit $dV = yx^{y-1}dx + x^y dylx$.

VII. Si fuerit $V = \mathrm{A\,tang}\,\frac{y}{x}$; erit $dV = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$.

VIII. Si fuerit $V = \sin x . \cos y$; erit

$$dV = dx \cos x \cos y - dy \sin x . \sin y.$$

IX. Si fuerit $V = \frac{e^z y}{V(xx+yy)}$; erit

$$dV = \frac{e^z y dz}{V(xx+yy)} + \frac{e^z(xxdy - yxdx)}{(xx+yy)V(xx+yy)}.$$

X. Si fuerit $V = e^z A\sin\frac{x - V(xx-yy)}{x + V(xx-yy)}$,

reperietur $dV = e^z dz A\sin\frac{x - V(xx-yy)}{x + V(xx-yy)}$

$$+ e^z \frac{xydy - yydx}{(x + V(xx-yy))(xx-yy)^{\frac{3}{4}} Vx}.$$

217. Quoniam vidimus, si V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x & y, eius differentiale huiusmodi habiturum esse formam $dV = Pdx + Qdy$, in qua sint P & Q functiones a functione V pendentes per eamque determinatae: sequitur has duas quantitates P & Q certo quodam modo etiam a se inuicem pendere, propterea quod vtraque ab eadem functione V pendet. Quicunque igitur sit iste nexus inter quantitates finitas P & Q, quem deinceps inuestigabimus, perspicuum est, non omnes formulas differentiales huiusmodi $Pdx + Qdy$, in quibus P & Q pro lubitu sint ex x & y formatae, posse esse differentialia cuiuspiam functionis finitae V ipsarum x & y. Nisi enim ea relatio inter functiones P & Q intercedat, quam natura differentiationis requirit, huiusmodi differentiale $Pdx + Qdy$ oriri plane per differentiationem non potuit, ideoque vicissim integrale non habebit.

218. In integratione igitur plurimum intereſt noſſe hanc relationem inter quantitates P & Q, vt differentialia, quae reuera ex differentiatione functionis cuiuspiam finitae ſunt orta, dignoſci queant ab iis, quae ad libitum ſunt formata, atque nulla integralia admittunt. Quanquam autem hic nondum integrationis negotium ſuſcipimus, tamen ad naturam differentialium realium penitius inſpiciendam conueniet hanc relationem inueſtigari; quippe cuius cognitio non ſolum ad calculum integralem, ad quem hic viam paramus, eſt maxime neceſſaria, ſed etiam in ipſo calculo differentiali inſignem lucem accendit. Primum igitur patet, ſi V ſit functio duarum variabilium x & y, in eius differentiali $Pdx + Qdy$ vtriusque differentiale dx & dy ineſſe oportere. Neque ergo poteſt eſſe $P = 0$ neque $Q = 0$. Hinc ſi P fuerit functio ipſarum x & y, formula Pdx nullius quantitatis finitae poterit eſt differentiale, ſeu nulla extat quantitas finita, cuius differentiale ſit Pdx.

219. Sic nulla datur quantitas finita V ſiue algebraica ſiue transcendens, cuius differentiale ſit $yxdx$, ſi quidem ſit y quantitas variabilis ab x non pendens. Si enim ponamus dari eiusmodi quantitatem finitam V, quia y in eius differentiale ingreditur, neceſſe eſt, vt y quoque in ipſa quantitate V inſit; verum ſi V contineret y, ob variabilitatem ipſius y neceſſario quoque in differentiali ipſius V differentiale dy ineſſe deberet. Quod tamen cum non adſit, fieri nequit, vt differentiale $yxdx$ ex cuiuspiam quantitatis finitae differentiatione ſit ortum. Cum

igitur pateat formulam $Pdx + Qdy$, si Q sit o, & P contineat y, differentiale reale esse non posse, simul intelligitur, quantitati Q non pro lubitu valorem tribui posse, sed eum a valore ipsius P pendere.

220. Quo igitur hanc relationem inter P & Q in differentiali $dV = Pdx + Qdy$ inuestigemus, ponamus primo V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x & y: a casibus enim particularibus ad relationem generalem ascendamus. Quod si ergo ponamus $y = tx$, ex functione V quantitas x prorsus euanescet, prodibitque functio ipsius t tantum, quae sit $= T$, cuius differentiale erit $= \Theta dt$, existente Θ functione ipsius t. Ponamus igitur quoque in differentiali $Pdx + Qdx$, vbique $y = tx$, & $dy = tdx + xdt$; quo facto prodibit

$$Pdx + Qtdx + Qxdt;$$

in quo cum dx non contineatur, necesse est vt sit $P + Qt = o$; ideoque $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, seu erit $Px + Qy = o$, vnde relatio inter P & Q pro hoc casu innotescit. Deinde debet esse $\Theta = Qx$, ideoque $Qx =$ functioni ipsius t, hoc est functioni nullius dimensionis ipsarum x & y. Atque ob $Q = \frac{\Theta}{x}$ fiet $P = -\frac{\Theta y}{xx}$, & tam Px quam Qy erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x & y.

221. Si igitur functio nullius dimensionis ipsarum x & y, quae sit $= V$, differentietur, eius differentiale

$dV =$

$dV = Pdx + Qdy$, semper ita erit comparatum, vt sit $Px + Qy = 0$. Hoc est si in differentiali loco differentialium dx & dy scribantur x & y, resultabit quantitas $= 0$: vti in his exemplis vsu venire patet:

I. Sit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$, atque posito x loco dx & y loco dy, erit $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Sit $V = \frac{x}{\sqrt{(xx - yy)}}$, erit $dV = -\frac{yydx + yxdy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}$, vnde fit $\frac{-yyx + yyx}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$.

III. Sit $V = \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{-y + \sqrt{(xx + yy)}}$, quae est functio nullius dimensionis ipsarum x & y; erit

$$dV = \frac{2xxdy - 2xydx}{(\sqrt{(xx + yy)} - y)^2 \sqrt{(xx + yy)}},$$

quae forma positis x & y loco dx & dy fit $= 0$.

IV. Sit $V = l\frac{x + y}{x - y}$; erit $dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$, atque $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$.

V. Sit $V = A\sin\frac{\sqrt{(x - y)}}{\sqrt{(x + y)}}$, erit $dV = \frac{ydx - xdy}{(x + y)\sqrt{2y(x - y)}}$, quae formula eadem proprietate gaudet.

222. Contemplemur nunc alias functiones homogeneas, sitque V functio n dimensionum ipsarum x & y. Quare si ponatur $y = tx$, induet V huiusmodi formam Tx^n, existente T functione ipsius t, sitque

$$dT = \Theta dt, \text{ erit } dV = x^n \Theta dt + nTx^{n-1}dx.$$

Quodsi ergo statuamus:

$$dV = Pdx + Qdy, \text{ ob } dy = tdx + xdt,$$

fiet $$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt:$$

quae forma quoniam cum illa congruere debet, erit

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}, \text{ ob } V = Tx^n.$$

Hancobrem ob $t = \frac{y}{x}$, fiet $Px + Qy = nV$, quae aequatio relationem inter P & Q ita definit, vt si altera sit cognita, altera facile inueniatur. Quia porro est $Qx = x^n \Theta$, erit Qx, ideoque etiam Qy & Px functio n dimensionum ipsarum x & y.

223. Si ergo in differentiali cuiusuis functionis homogeneae ipsarum x & y, loco dx & dy, ponatur x & y, quantitas oriunda aequabitur ipsi functioni, cuius differentiale proponebatur, per numerum dimensionum multiplicatae.

I. Si sit $V = \sqrt{(xx + yy)}$; erit $n = 1$, & ob

$$dV = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy)}}, \text{ fiet } \frac{xx + yy}{\sqrt{(xx + yy)}} = V = \sqrt{(xx + yy)}.$$

II. Si

II. Si sit $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$; erit $n = 2$, &

$$dV = \frac{2y^3 dy - 3yyx dy + 3yxx dx - 2x^3 dx + y^3 dx - x^3 dy}{(y - x)^2}.$$

Ponatur x pro dx & y pro dy orietur:

$$\frac{2y^4 - 2y^3 x + 2yx^3 - 2x^4}{(y - x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y - x} = 2V.$$

III. Si sit $V = \frac{1}{(yy + xx)^2}$, erit $n = -4$, atque $dV = -\frac{4y dy - 4x dx}{(yy + xx)^3}$. Quae formula positis x & y loco dx & dy abit in $-\frac{4yy - 4xx}{(yy + xx)^3} = -4V$.

IV. Si sit $V = xx\, l \frac{y + x}{y - x}$; erit $n = 2$, atque $dV = 2x dx\, l \frac{y + x}{y - x} + \frac{2xx(y dx - x dy)}{yy - xx}$, facta autem memorata substitutione oritur $2xx\, l \frac{y + x}{y - x} = 2V$.

224. Similis proprietas obseruabitur, si V fuerit functio homogenea plurium variabilium: sit ergo V functio quantitatum x, y, z, quae coniunctim vbique n dimensiones adimpleant; atque differentiale huiusmodi habebit formam $P dx + Q dy + R dz$. Ponatur iam $y = tx$ & $z = sx$, vt sit $dy = t dx + x dt$, & $dz = s dx + x ds$, atque functio V induet hanc formam Ux^n, existente U

functione binarum variabilium t & s; hinc ergo si statuatur $dU = p\,dt + q\,ds$, fiet

$$dV = x^n p\,dt + x^n q\,ds + nUx^{n-1}dx.$$

Prior autem forma dabit

$$dV = P\,dx + Qt\,dx + Qx\,dt + Rs\,dx + Rx\,ds:$$

quae cum illa collata praebet

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x},$$

vnde obtinetur $Px + Qy + Rz = nV$; quae eadem proprietas ad quotcunque plures variabiles extenditur.

225. Si igitur proposita fuerit functio homogenea quotcunque variabilium x, y, z, v, &c. eius differentiale perpetuo hanc habebit proprietatem, vt si loco differentialium dx, dy, dz, dv, &c. scribantur respective quantitates finitae x, y, z, v, &c. prodeat ipsa functio proposita per numerum dimensionum multiplicata. Haecque regula etiam valet, si V fuerit functio homogenea vnicae tantum variabilis x: Hoc enim casu erit V potestas ipsius x, puta $V = ax^n$, quae est functio homogenea n dimensionum: nulla scilicet alia datur functio ipsius x, in qua x vbique n dimensiones constituat praeter potestatem x^n. Cum igitur sit $dV = nax^{n-1}dx$, ponatur x loco dx, atque prodibit nax^n, hoc est nV. Ista ergo functionum homogenearum insignis proprietas diligenter notari meretur, cum in calculo integrali maximam afferat vtilitatem.

226. Quo nunc in genere in relationem inter quantitates P & Q, quae differentiale $Pdx + Qdy$ functionis cuiuscunque V duarum variabilium x & y constituunt, inquiramus, ad sequentia attendi oportebit. Sit igitur V functio quaecunque ipsarum x & y; atque ponamus V abire in R, si loco x ponatur $x + dx$; posito autem $y + dy$ loco y abeat V in S: quodsi autem simul $x + dx$ loco x, & $y + dy$ loco y scribatur, mutetur V in V^{I}. Cum itaque R oriatur ex V, posito $x + dx$ loco x, manifestum est si vlterius in R ponatur $y + dy$ loco y, tum prodire V^{I}; idem enim est, ac si in V statim poneretur $x + dx$ loco x, & $y + dy$ loco y. Simili modo si in S ponatur $x + dx$ loco x, quia S iam orta est ex V posito $y + dy$ loco y, denuo prodibit V^{I}; vti ex hoc schematismo clarius perspicitur.

Quantitas	abit in	si loco	ponatur.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^{I}	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	V^{I}	y	$y + dy$
S	V^{I}	x	$x + dx$

227. Si igitur V ita differentietur, vt tantum x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur, quia posito $x + dx$ loco x, functio V abit in R, eius differentiale erit $= R - V$; at ex forma $dV = Pdx + Qdy$, sequitur idem differentiale fore $= Pdx$, vnde erit $R - V = Pdx$. Quod si iam loco y ponatur $y + dy$, x vero tanquam constans tractetur, quia R abit in V^I & V in S, quantitas $R - V$ abibit in $V^I - S$; ideoque ipsius $R - V = Pdx$ differentiale, quod oritur si sola y variabilis assumatur, erit $V^I - R - S + V$. Simili modo, cum posito $y + dy$ loco y, abeat V in S, erit $S - V$ differentiale ipsius V posita sola y variabili, eritque propterea $S - V = Qdy$; nunc quia loco x posito $x + dx$, transit S in V^I & V in R, quantitas $S - V$ abibit in $V^I - R$; atque ipsius $S - V = Qdy$ differentiale, quod oritur si sola x variabilis statuatur, erit $= V^I - R - S + V$, quod prorsus congruit cum differentiali ante inuento.

228. Ex hac conuenientia deducitur sequens conclusio: Si functionis V cuiuscunque binarum variabilium x & y differentiale fuerit $dV = Pdx + Qdy$, tum differentiale ipsius Pdx, quod oritur si sola quantitas y tanquam variabilis, x vero tanquam constans tractetur, aequale erit differentiali ipsius Qdy, quod oritur si sola quantitas x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur. Si scilicet posita sola y variabili fuerit $dP = Zdy$ erit differentiale ipsius Pdx praescripto modo sumtum $= Zdxdy$; atque posita sola x variabili erit quoque $dQ = Zdx$; sic enim differentiale ipsius Qdy praescripto modo

modo sumtum fiet quoque $= Z dx dy$. Hacque ratione intelligitur relatio, quae inter quantitates P & Q intercedit, atque paucis verbis in hoc consistit, vt differentiale ipsius $P dx$ posito x constante aequale sit differentiali ipsius $Q dy$ posito y constante.

229. Ista insignis proprietas clarius perspicietur, si eam nonnullis exemplis illustremus.

I. Sit igitur $V = yx$; erit $dV = y dx + x dy$, ideoque $P = y$ & $Q = x$; vnde posito x constante erit $d.P dx = dx dy$, & posito y constante erit $d.Q dy = dx dy$, sicque haec duo differentialia inter se aequantur.

II. Sit $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$; erit $dV = \frac{x dx + y dx + y dy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, ideoque $P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, & $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, vnde posito x constante erit $d.P dx = \frac{xy dx dy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, & posito y constante erit $d.Q dy = \frac{xy dx dy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

III. Sit $V = x \sin A y + y \sin A x$; eritque

$$dV = dx \sin A y + x dy \cos y + dy \sin A x + y dx \cos x.$$

Quare erit

$$P dx = dx \sin A y + y dx \cos x,$$

$$\& \quad Q dy = dy \sin A x + x dy \cos y.$$

Posito ergo x constante erit

$$d.Pdx = dxdy \cos y + dxdy \cos x,$$

& posito y constante erit

$$d.Qdy = dxdy \cos y + dxdy \cos x.$$

IV. Sit $V = x^y$; erit $dV = x^y dy lx + y x^{y-1} dx$, atque

$$Pdx = y x^{y-1} dx, \quad \& \quad Qdy = x^y dy lx.$$

Quamobrem posito x constante habebitur

$$d.Pdx = x^{y-1} dxdy + y x^{y-1} dxdy lx,$$

& posito y constante erit

$$d.Qdy = y x^{y-1} dxdy lx + x^{y-1} dxdy.$$

230. Ista proprietas etiam hoc modo enunciari potest, vnde eximia omnium functionum, quae duas variabiles inuoluunt, indoles cognoscetur. Si functio quaecunque V duarum variabilium x & y differentietur posita sola x variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola y variabili, tum post duplicem hanc differentiationem idem prodibit, ac si ordine inuerso functio V primum posita sola y variabili differentiaretur, hocque differentiale posita sola x variabili denuo differentiaretur: vtroque scilicet casu prodibit eadem expressio huius formae $Z dxdy$. Ratio huius identitatis ex praecedente proprietate manifesto sequitur: si enim V differentietur posita sola x variabili, prodit Pdx; &, si V differentietur posita sola y variabili, prodit Qdy, horum differentia-

tialium vero differentialia modo indicato sumta inter se aequalia esse, ante demonstrauimus. Caeterum haec indoles immediate sequitur ex ratiocinio (§. 227) allato.

231. Relatio inter P & Q, si $Pdx + Qdy$ fuerit differentiale functionis V sequenti etiam modo indicari potest. Quoniam P & Q sunt functiones ipsarum x & y, differentientur ambae posita vtraque x & y variabili:

Si scilicet fuerit $dV = Pdx + Qdy$

sit $dP = pdx + rdy$

& $dQ = qdx + sdy$.

Posito ergo x constante erit

$dP = rdy$, & $d.Pdx = rdxdy$.

Deinde posito y constante erit

$dQ = qdx$, & $d.Qdy = qdxdy$.

Cum igitur haec duo differentialia $rdxdy$ & $qdxdy$ sint inter aequalia, sequitur fore $q = r$. Functiones ergo P & Q ita inuicem connectuntur, vt si ambae differentientur, vti fecimus, quantitates q & r inter se fiant aequales. Breuitatis gratia autem hoc saltem capite quantitates r & q ita commode denotari solent, vt r indicetur per $\left(\frac{dP}{dy}\right)$, quae scriptura designatur P ita differentiari, vt sola y tanquam variabilis tractetur, atque differentiale istud per dy diuidatur: sic enim prodibit quantitas finita r. Simili modo significabit $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ quantitatem

finitam q, quia hac ratione indicatur functionem Q sola x posita variabili differentiari, tumque differentiale per dx diuidi debere.

232. Vtamur ergo hoc scribendi modo, etiamsi alias ambiguitatem afferre possit, quae tamen hic per clausulas euitatur, vt ambages in describendis differentiandi conditionibus euitemus, sicque breuiter relationem inter P & Q ita verbis exprimere poterimus, vt dicamus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. In huiusmodi scilicet fractionibus denominator praeter propriam significationem, qua numerator per eum diuidi debet, indicat numeratoris differentiale ita esse capiendum, vt ea sola quantitas cuius differentiale denominatorem constituit, tanquam variabilis spectetur. Hoc enim modo per diuisionem differentialia prorsus ex calculo egredientur, istaeque fractiones $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ exhibebunt quantitates finitas, quae in praesenti casu erunt inter se aequales. Hoc itaque modo recepto quantitates quoque p & s ita denotare licebit, vt sit $p = \left(\frac{dP}{dx}\right)$ & $s = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$, si quidem vt monitum est, differentiatio numeratoris per denominatorem restringatur.

233. Consentit haec proprietas mirifice cum proprietate, quam ante in functionibus homogeneis inesse ostendimus. Sit enim V functio homogenea n dimensio-

ſionum ipſarum x & y, ponaturque $dV = Pdx + Qdy$, atque demonſtrauimus fore $nV = Px + Qy$, ideoque

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}. \text{ Sit } dP = pdx + rdy;$$

eritque $\left(\frac{dP}{dy}\right) = r$, cui aequale eſſe $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ita oſtendetur. Differentietur Q poſita ſola x variabili, & quia in hac hypotheſi eſt $dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y}$, fiet $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}$, debebitque eſſe

$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r \text{ ſeu } (n-1)P = px + ry.$$

Quae aequalitas inde fit perſpicua, quod P ſit functio homogenea $n-1$ dimenſionum ipſarum x & y, vnde eius differentiale $dP = pdx + rdy$, ob proprietatem functionum homogenearum, ita debet eſſe comparatum, vt ſit $(n-1)P = px + ry$.

234. Iſta proprietas, quod ſit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, quam omnibus functionibus duarum variabilium x & y communem eſſe oſtendimus, nobis quoque patefaciet naturam functionum trium pluriumue variabilium. Sit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, ac ponatur $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Quod ſi igitur in hac differentiatione z tanquam conſtans tractaretur, foret vtique $dV = Pdx + Qdy$; hoc autem caſu per

 an-

antecedentia debet esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Deinde si quantitas y constans assumeretur, foret $dV = Pdx + Rdz$, erit ergo $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Denique posito x constante reperietur $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. In differentiali ergo $Pdx + Qdy + Rdz$ functionis V quantitates P, Q, & R ita a se inuicem pendent, vt sit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right);\ \&\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

235. Sequitur hinc ista functionum, quae tres pluresue variabiles inuoluunt, proprietas analoga ei, quam supra (230) de functionibus duarum variabilium ostendimus. Si fuerit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, eaque continuo ter differentietur, ita vt primum vna quantitatum, puta x, sola variabilis ponatur, in differentiatione secunda sola y, atque in tertia sola z variabilis assumatur, prodibit expressio huius formae $Z\,dx\,dy\,dz$, quae eadem reperietur, quocunque alio ordine quantitates x, y, & z collocentur. Sex igitur diversis modis post triplicem differentiationem ad eandem expressionem $Z\,dx\,dy\,dz$ peruenietur, quoniam ordo quantitatum x, y, & z sexies variari potest. Quicunque ergo ordo eligatur, si functio V differentietur posita sola prima variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola secunda variabili, atque differentiale hoc iterum

rum differentietur posita sola tertia variabili, eadem prodibit expressio, vtcunque ordo quantitatum x, y, & z varietur.

236. Quo ratio huius proprietatis clarius perspiciatur, ponamus esse $dV = Pdx + Qdy + Rdz$; deinde etiam quantitates P, Q, & R differentiemus, eruntque earum differentialia per ante demonstrata, ita comparata:

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdy + udy + rdz.$$

Differentietur nunc V posito solo x variabili prodibit Pdx; quod differentiale iterum differentietur posito solo y variabili atque habebitur $sdxdy$; quod si differentietur posito solo z variabili, postquam per $dxdydz$ fuerit diuisum, obtinebitur $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Collocentur nunc variabiles hoc ordine y, x, z, atque prima differentiatio dabit Qdy, secunda $sdxdy$, & tertia (facta diuisione per $dxdydz$) dabit $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ vt ante. Disponantur variabiles hoc ordine z, y, x, ac prima differentiatio dabit Rdz secunda $udydz$, tertia vera post diuisionem per $dxdydz$ praebet $\left(\frac{du}{dx}\right)$. At cum posito y constante sit $dQ = sdx + udz$; erit $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, vti pariter est demonstratum.

237. Ponamus esse $V = \frac{xxy}{aa - zz}$; hancque functionum toties ter differentiemus, quoties ordo variabilium x, y, z variari potest:

	I. DIFFER.	II. DIFFER.	III. DIFFER.
posito variabili	solo x	solo y	solo z
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	solo x	solo z	solo y
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	solo y	solo x	solo z
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	solo y	solo z	solo x
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	solo z	solo x	solo y
	$\frac{2xxyzdz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	solo z	solo y	solo x
	$\frac{2xxyzdz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$

ex quo exemplo patet, quocunque ordine tres variabiles fuerint assumtae, post triplicem differentiationem semper eandem prodire expressionem $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.

238. Vti autem post triplicem differentiationem ad eandem expressionem est peruentum, ita quoque consensus deprehenditur in differentialibus, quae secunda differentiatio suppeditauit. In iis scilicet expressio quaeuis bis occurrit; vnde patet, quae formulae iisdem differentialibus sint affectae, easdem quoque inter se esse aequales, atque differentialia tertia ideo esse omnia inter se aequalia, quia iisdem differentialibus $dx\,dy\,dz$ sunt affecta. Hinc igitur concludimus, si V fuerit functio quotcunque variabilium x, y, z, v, u, &c. eaque successiue aliquoties differentietur, vt semper vnica tantum quantitas variabilis assumatur; tum quoties ad expressiones perueniatur, quae iisdem differentialibus sint affectae, eas quoque inter se aequales fore. Sic duplici differentiatione orietur huiusmodi expressio $Z\,dx\,dy$, dum in altera sola x, in altera sola y assumta est variabilis: perindeque est vtra prius, posteriusue sit variabilis assumta. Simili modo sex variis modis per triplicem differentiationem eadem exsurget expressio $Z\,dx\,dy\,dz$; atque viginti quatuor variis modis peruenietur post quadruplicem differentiationem ad eandem expressionem huius formae $Z\,dx\,dy\,dz\,dv$, atque ita porro.

239. Veritatem horum Theorematum quilibet adhibita leui attentione ex ante explicatis principiis facile agnoscet, atque propria meditatione facilius intuebitur, quam tantis verborum ambagibus, sine quibus demonstrationes proferri non possent. Quia vero harum proprietatum cognitio maximi est momenti in calculo integrali, Tyrones sunt monendi, vt non solum has proprietates ipsi diligen-

ter meditentur, earumque veritatem ſcrutentur, ſed etiam pluribus exemplis comprobent; quo hoc pacto ſibi hanc materiam familiariorem reddant, fructusque inde natos poſtmodum facilius percipere queant. Neque vero ſolum tyrones, ſed etiam ii, qui principiis calculi differentialis iam ſunt imbuti, ad hoc ſunt cohortandi; quoniam in omnibus fere manuductionibus ad hanc Analyſeos partem hoc argumentum penitus praetermitti ſolet. Plerumque enim Auctores ſolas differentiationis regulas praeſcripſiſſe, earumque vſum in Geometria ſublimiori oſtendiſſe fuerunt contenti, neque in naturam atque proprietates differentialium inquiſiuerunt; vnde tamen maxima ſubſidia in calculum integralem redundant. Quam ob cauſam hoc argumentum fere nouum in iſto Capite fuſius perſequi viſum eſt, quo ſimul via ad integrationes alias difficiliores pararetur, atque negotium poſtea ſuſcipiendum ſubleuaretur.

240. Cognitis igitur his proprietatibus, quibus differentialia functionum duas pluresue variabiles inuoluentium gaudent, facile poterimus dignoſcere, vtrum formula differentialis propoſita, in qua occurrunt duae pluresue variabiles, ſit orta ex differentiatione cuiuspiam functionis finitae an ſecus? Si enim in formula $P dx + Q dy$ non fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, certo poterimus affirmare, nullam exiſtere functionem ipſarum x & y, cuius differentiale ſit $= P dx + Q dy$: neque ergo infra in calculo integrali huiusmodi formulae integrale indagari poteſt. Sic cum

cum in $yxdx + xxdy$ requiſita conditio non adſit, nulla datur functio, cuius differentiale eſt $= yxdx + xxdy$. Vtrum autem ſemper, quoties eſt $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, formula ex differentiatione cuiuspiam functionis ſit orta? quaeſtio eſt, quae demum ex integrationis principiis ſolide affirmari poterit.

241. Si in formula differentiali propoſita tres pluresue inſint variabiles, vti $Pdx + Qdy + Rdz$; tum ea ex differentiatione ortum traxiſſe omnino nequit, niſi tres iſtae conditiones in ea locum habeant, vt ſit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \& \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Quarum conditionum, ſi vna tantum deſit, certo affirmare debemus, nullam extare functionum ipſarum x, y, & z, cuius differentiale ſit $Pdx + Qdy + Rdz$; huiusmodi ergo formularum differentialium nequidem requiri poſſunt integralia, hincque integrationem prorſus non recipere dicuntur. Facile autem intelligitur in calculo integrali formulas differentiales ante dignoſci oportere, vtrum integrationis ſint capaces, quam inueſtigatio integralis actu ſuſcipiatur.

CAPUT VIII.

DE FORMULARUM DIFFERENTIALIUM VLTERIORI DIFFERENTIATIONE.

242.

Si vnica variabilis adſit, eiusque differentiale primum conſtans aſſumatur, ſupra iam methodus eſt tradita differentialia cuiusque gradus inueniendi. Scilicet ſi functionis cuiusuis differentiale denuo differentietur, oritur eius differentiale ſecundum, hocque iterum differentiatum dat functionis differentiale tertium, atque ita porro. Haec vero eadem regula locum quoque habet, ſiue functio plures inuoluat variabiles ſiue vnicam tantum, cuius differentiale primum non ponitur conſtans. Sit igitur V functio quaecunque ipſius x, neque vero dx ſit conſtans, ſed vtcunque variabile, ita vt ipſius dx differentiale ſit $= ddx$, huiusque differentiale $= d^3x$, & ita porro, atque inueſtigemus differentialia ſecundum & ſequentia functionis V.

243. Ponamus differentiale primum functionis V eſſe $= Pdx$, vbi erit P functio quaepiam ipſius x pendens ab V. Si iam functionis V differentiale ſecundum inuenire velimus, eius differentiale primum Pdx denuo differentiari oportet; quod cum ſit productum ex duabus quantitatibus variabilibus P & dx, quarum illius differentiale ſit $dP = pdx$, huius vero dx differentiale

ddx,

ddx, per regulam de factoribus datam erit differentiale secundum $ddV = Pddx + pdx^2$. Deinde si ponatur $dp = qdx$, cum differentiale ipsius dx^2 sit $2dxddx$, erit iterum differentiando

$$d^3V = Pd^3x + dPddx + 2pdxddx + dpdx^2,$$

iam ob $dP = pdx$ & $dp = qdx$; erit

$$d^3V = Pd^3x + 3pdxddx + qdx^3,$$

similique modo vlteriora differentialia inuenientur.

224. Applicemus haec ad potestates ipsius x, quarum singula differentialia inuestigemus, si dx non ponatur constans:

I. Sit igitur $V = x$; erit $dV = dx$; $d^2V = d^2x$;

$$d^3V = d^3x;\quad d^4V = d^4x;$$

&c.

II. Sit $V = x^2$; erit $dV = 2xdx$; &

$$ddV = 2xddx + 2dx^2$$
$$d^3V = 2xd^3x + 6dxddx$$
$$d^4V = 2xd^4x + 8dxd^3x + 6ddx^2$$
$$d^5V = 2xd^5x + 10dxd^4x + 20ddxd^3x$$

&c.

III. Si in genere fuerit $V = x^n$; erit

$$dV = nx^{n-1}dx$$
$$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$$
$$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx$$
$$+ n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$$

 d^4V

$$d^4V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dx\,d^3x$$
$$+ 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2$$
$$+ 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$
&c.

Si igitur fuerit dx conſtans, ac propterea

$$ddx = 0,\quad d^3x = 0,\quad d^4x = 0,\quad \&c.$$

orientur eadem differentialia, quae iam ſupra pro hac hypotheſi ſunt inuenta.

245. Quoniam igitur differentialia cuiusque ordinis ipſius x eadem lege differentiantur, qua quantitates finitae, expreſſiones quaecunque, in quibus praeter quantitatem finitam eius differentialia occurrunt, ſecundum praecepta ſupra data differentiari poterunt. Quam operationem, cum nonnunquam occurrat, hic aliquot exemplis illuſtrabimus.

I. Si fuerit $V = \frac{x\,ddx}{dx^2}$, differentiando prodibit

$$dV = \frac{x\,d^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2x\,ddx^2}{dx^3}.$$

II. Si fuerit $V = \frac{x}{dx}$; erit $dV = 1 - \frac{x\,ddx}{dx^2}$,

vbi nihil impedit, quod pro V quantitatem infinite magnam poſuimus.

III. Si fuerit $V = xx\,l\frac{ddx}{dx^2}$, quia transmutatur

$$V \text{ in } xxlddx - 2xxldx;$$

erit ſecundum regulas conſuetas differentiando:

$$dV = 2xdx\,lddx + \frac{xxd^3x}{ddx} - 4xdx\,l\,dx - \frac{2xx\,ddx}{dx}.$$

Simili autem modo differentialia altiora ipſius V reperientur.

246. Si expreſſio propoſita duas variabiles inuoluat, nempe x & y, vel vnius differentiale ponitur conſtans vel neutrius; arbitrarium enim eſt alterutrius differentiale conſtans aſſumi, quia ab arbitrio noſtro pendet, quemadmodum vnius valores ſucceſſiuos creſcere ſtatuere velimus. Neque vero vtriusque variabilis differentialia ſimul ſtatui poſſunt conſtantia, hoc ipſo enim relatio inter variabiles x & y aſſumeretur, quae tamen vel nulla eſt, vel incognita ponitur. Si enim, dum x aequabiliter creſcere ponimus, y quoque aequalia incrementa capere ſtatueretur, tum eo ipſo indicaretur fore $y = ax + b$; ſicque y ab x penderet, quod tamen aſſumere non licet. Hancobrem vel vnius tantum variabilis differentiale conſtans aſſumi poteſt vel nullum. Quodſi autem differentiationes abſoluere nouerimus nullo differentiali aſſumto conſtante, ſimul quoque differentialia conſtabunt, ſi alterutrum differentiale ponatur conſtans: tantum enim opus eſt, vt ſi dx conſtans ſtatuatur, vbique termini continentes ddx, d^3x, d^4x, &c. deleantur.

247. Denotet ergo V functionem quamcunque finitam ipſarum x & y, ſitque $dV = P\,dx + Q\,dy$. Ad diffe-

differentiale ipſius V ſecundum inueniendum aſſumamus vtrumque differentiale dx & dy variabile, & cum P & Q ſint functiones ipſarum x & y ſtatuamus:

$$dP = p\,dx + r\,dy$$
$$dQ = r\,dx + q\,dy$$

ſupra enim vidimus eſſe $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r.$

His poſitis differentietur $dV = Pdx + Qdy$, & reperietur:

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2.$$

Si igitur differentiale dx ſtatuatur conſtans, erit

$$ddV = pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2,$$

ſin autem differentiale dy ſtatueretur conſtans, foret

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + qdy^2.$$

248. Si igitur functio quaecunque ipſarum x & y bis differentietur, nullo differentiali poſito conſtante, eius differentiale ſecundum ſemper huiusmodi formam habebit:

$$ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy$$

pendebunt autem quantitates P, Q, R, S, & T ita a ſe inuicem, vt ſit ſignandi modo Capite praecedente adhibito:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ R = \left(\frac{dP}{dx}\right);\ S = \left(\frac{dQ}{dy}\right);$$
$$\&\ T = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\left(\frac{dP}{dy}\right),$$

quarum conditionum ſi vel vnica deſit, certo affirmare poteri-

terimus, formulam propoſitam nullius functionis eſſe differentiale ſecundum. Statim ergo dignoſci poterit, vtrum huiusmodi formula ſit cuiuspiam quantitatis differentiale ſecundum an minus?

242. Simili modo differentialia tertia ac ſequentia inuenientur, quod in exemplo particulari oſtendiſſe expediet, quam formulas generales adhibendo.

Sit igitur $V = xy$;

Erit $dV = y\,dx + x\,dy$

$ddV = y\,ddx + 2\,dx\,dy$

$d^3V = y\,d^3x + 3\,dy\,ddx + x\,d^3y$

$d^4V = y\,d^4x + 4\,dy\,d^3x + 6\,ddx\,ddy + 4\,dx\,d^3y + x\,d^4y$

&c.

in quo exemplo coefficientes numerici legem poteſtatum binomii ſequuntur, indeque quousque libuerit continuari poſſunt.

At ſi fuerit $V = \frac{y}{x}$;

Erit $dV = \frac{dy}{x} - \frac{y\,dx}{xx}$

$ddV = \frac{ddy}{x} - \frac{2\,dx\,dy}{xx} + \frac{2\,y\,dx^2}{x^3} - \frac{y\,ddx}{x^2}$

$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3\,dx\,ddy}{xx} + \frac{6\,dx^2\,dy}{x^3} - \frac{3\,dy\,ddx}{x^2}$

$+ \frac{6\,y\,dx\,ddx}{x^3} - \frac{6\,y\,dx^3}{x^4} - \frac{y\,d^3x}{x^2}$

&c.

in quo exemplo progreſſio differentialium non tam facile patet quam in praecedente.

250. Neque vero tantum haec differentiandi methodus ad functiones finitas adſtringitur, ſed etiam eodem negotio cuiusuis expreſſionis, quae iam differentialia in ſe continet, differentiale inueniri poteſt, ſiue vnum quoddam differentiale aſſumitur conſtans ſiue minus. Cum enim ſingula differentialia aeque & eadem lege differententur ac quantitates finitae, regulae in praecedentibus capitibus traditae, etiam hic valent atque obſeruari debent. Denotet igitur V eam expreſſionem, quam differentiari oportet, ſiue ſit finita, ſiue infinite magna ſiue infinite parua; atque ratio differentiationis ex his exemplis perſpicietur:

I. Sit $V = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$;

Erit $dV = \dfrac{dxddx + dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

II. Sit $V = \dfrac{ydx}{dy}$;

Erit $dV = dx + \dfrac{yddx}{dy} - \dfrac{ydxddy}{dy^2}$.

III. Sit $V = \dfrac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$;

Erit $dV = \dfrac{(3dxddx + 3dyddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dxddy - dyddx}$

$- \dfrac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}(dxd^3y - dyd^3x)}{(dxddy - dyddx)^2}$.

quae

quae differentialia cum ſint generaliſſime ſumta, nullo differentiali pro conſtante habito, hinc facile ea differentialia deriuari poterunt, quae oriuntur, ſi vel dx vel dy ſtatuatur conſtans.

251. Quia nullo differentiali conſtante aſſumto, nulla etiam lex, ſecundum quam ſucceſſiui variabilium valores progrediantur, praeſcribitur, differentialia ſecunda & ſequentium ordinum non erunt determinata, neque quicquam certi ſignificabunt. Hinc formula, in qua differentialia ſecunda atque altiora continentur, nullum determinatum habebit valorem, niſi quodpiam differentiale conſtans ſit aſſumtum; ſed eius ſignificatio erit vaga, atque variabitur, prouti aliud atque aliud differentiale fuerit conſtans poſitum. Interim tamen dantur quoque eiusmodi expreſſiones differentialia ſecunda continentes, quae, etiamſi nullum differentiale poſitum ſit conſtans, tamen ſignificatum determinatum complectuntur, qui perpetuo idem maneat, quodcunque differentiale conſtans ſtatuatur. Huiusmodi autem formularum naturam infra diligentius ſcrutabimur, modumque trademus eas ab aliis, quae valores determinatos non includunt, dignoſcendi.

252. Quo haec ratio formularum, in quibus differentialia ſecunda vel altiora inſunt, facilius perſpiciatur, contemplemur primum formulas vnicam variabilem continentes, atque facile patet, ſi in quapiam formula inſit eius variabilis x differentiale ſecundum ddx, nullumque differentiale conſtans ſtatuatur, formulam nullum valo-

 rem

rem fixum habere posse. Si enim statuatur differentiale ipsius x constans, fiet $ddx = 0$; sin autem ipsius xx differentiale $2xdx$ seu xdx constans ponatur, cum ipsius xdx differentiale $xddx + dx^2$ sit $= 0$, fiet $ddx = -\frac{dx^2}{x}$. Verum si potestatis cuiuscunque x^n differentiale $nx^{n-1}dx$ seu $x^{n-1}dx$ debeat esse constans; erit eius differentiale secundum $x^{n-1}ddx + (n-1)x^{n-2}dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$. Alii valores pro ddx prodibunt, si aliarum ipsius x functionum differentialia constantia ponantur. Manifestum autem est, formulam, in qua ddx occurrat, diuersissimos induere valores, prout loco ddx scribatur vel o vel $-\frac{dx^2}{x}$ vel $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ vel alia huiusmodi expressio. Scilicet si proponatur formula $\frac{xxddx}{dx^2}$, quae ob ddx & dx^2 infinite parua homogenea finitum valorem habere deberet; ea posito dx constante abit in o, si sit $d.x^2$ constans, ea abit in $-x$; si sit $d.x^3$ constans, ea abit in $-2x$; si $d.x^4$ sit constans, ea abit in $-3x$, & ita porro. Neque ergo determinatum valorem habere potest, nisi definiatur, cuiusmodi differentiale constans sit assumtum.

253. Ista inconstantia significationis simili ratione ostenditur, si differentiale tertium in quapiam formula insit. Consideremus hanc formulam $\frac{x^3 d^3x}{dx\,ddx}$, quae pariter

riter finitum valorem prae se fert. Si differentiale dx sit constans, abit ea in $\frac{0}{0}$, cuius valor mox patebit. Sit $d.x^2$ constans, erit $ddx = -\frac{dx^2}{x}$; & denuo differentiando

$$d^3x = -\frac{2\,dx\,ddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}, \text{ ob } ddx = -\frac{dx^2}{x}:$$

hoc ergo casu formula proposita $\frac{x^3 d^3 x}{dx\,ddx}$ abit in $-3x^2$. At si fuerit $d.x^n$ constans, erit $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$, hincque

$$d^3x = -\frac{2(n-1)dx\,ddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2 dx^3}{xx}$$
$$+ \frac{(n-1)\,dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)\,dx^3}{xx}.$$

Hoc ergo casu erit

$$\frac{d^3x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x}, \;\&\; \frac{x^3 d^3 x}{dx\,ddx} = -(2n-1)\,x^2,$$

vnde patet si sit $n = 1$, seu dx constans, valorem formulae fore $= -x^2$. Ex quo manifestum est, si in quapiam formula differentialia tertia vel altiora occurrant, neque simul indicetur, cuiusmodi differentiale assumtum sit constans, eam formulam nullum certum valorem habere, atque adeo nihil prorsus significare; quamobrem tales expressiones in calculo occurrere non possunt.

254. Simili modo ſi formula contineat duas pluresue variabiles, in eaque occurrant differentialia ſecundi altiorisue gradus, intelligetur valorem determinatum locum habere non poſſe, niſi differentiale quodpiam conſtans ſtatuatur, iis tantum exceptis caſibus, quos mox perpendemus. Quum primum enim ddx in quapiam formula ineſt, quoniam pro variis differentialibus, quae conſtantia ponuntur, valor ipſius ddx perpetuo variatur, fieri nequit, vt formula ſtatum obtineat valorem; hocque idem valet de quouis differentiali altiori ipſius x, atque etiam de differentialibus reliquarum variabilium ſecundis & altioribus. Sin autem duarum pluriumue variabilium differentialia ſecunda inſint, fieri poteſt, vt inconſtantia ab vno oriunda per inconſtantiam reliquarum deſtruatur; hincque naſcitur ille caſus, cuius meminimus, quo formula huiusmodi differentialia ſecunda duarum pluriumue variabilium inuoluens valorem definitum habere poteſt, non obſtante quod nullum differentiale conſtans ſit poſitum.

255. Haec igitur formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, ſtatam atque fixam ſignificationem habere nequit, niſi quodpiam differentiale primum conſtans ſtatuatur. Nam ſi dx conſtans ponatur habebitur $\frac{xddy}{dxdy}$; ſin autem dy conſtans ponatur, habebitur $\frac{yddx}{dxdy}$; manifeſtum autem eſt has formulas non neceſſario inter ſe eſſe aequales. Si enim ne-

necessario essent aequales, tales manere deberent, quaecunque functio ipsius x loco y substitueretur. Ponamus tantum esse $y = xx$, & cum posito dx constante, sit $ddy = 2dx^2$, formula $\frac{xddy}{dxdy}$ abibit in 1, sin autem dy seu $2xdx$ ponatur constans, fiet $ddy = 2xddx + 2dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{dx^2}{x}$, vnde formula $\frac{yddx}{dxdy}$ abit in $-\frac{1}{2}$. Cum igitur in vnico casu reperiatur discrepantia, multo minus in genere erit $\frac{xddy}{dxdy}$ posito dx constante aequalis $\frac{yddx}{dxdy}$ posito dy constante. Deinde quia formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ sibi non constat, dummodo vel dx vel dy constans ponatur, multo minus sibi constabit, si functionis cuiusuis vel ipsius x vel ipsius y vel vtriusque differentiale constans ponatur.

256. Hinc apparet huiusmodi formulam statum valorem habere non posse, nisi ita sit comparata, vt postquam loco variabilium y, & z, quae praeter x insunt, functiones quaecunque ipsius x fuerint substitutae, differentialia secunda & altiora ipsius x, nempe ddx, d^3x, &c. penitus ex calculo excedant. Si enim post talem substitutionem quamcunque in formula adhuc relinqueretur ddx, vel d^3x, vel d^4x, &c. quia haec differentialia, prout alia aliaque constantia assumuntur, significationem suam variant, valor quoque ipsius formulae erit vagus. Sic comparata est for-

formula ante propoſita $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, quae ſi ſtatum haberet valorem, quicquid y ſignificet, ſtatum quoque habere deberet valorem, ſi y denotaret functionem quampiam ipſius x. At ſi tantum ponamus $y = x$, formula abit in $\frac{2xddx}{dx^2}$, quae vtique ob ddx in ea contentum eſt vaga, atque alios aliosque valores induit, prouti alia atque alia differentialia conſtantia ponuntur, vti ex §. 252 ſatis eſt manifeſtum.

257. Dubium autem hic ſubnaſcetur, vtrum dentur tales formulae duo pluraue differentialia ſecundi altiorisue gradus continentia, quae hac proprietate gaudeant, vt ſi loco reliquarum variabilium quaecunque functiones vnius ſubſtituantur, differentialia ſecundi gradus prorſus ſe deſtruant. Huic dubio primum ita occurramus, vt huiusmodi formulam proponamus, quae iſta proprietate ſit praedita, quo per explorationem vis quaeſtionis melius percipiatur. Dico igitur hanc formulam $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ memoratam proprietatem poſſidere: quaecunque enim functio ipſius x loco y ſubſtituatur, ſemper differentialia ſecundi gradus penitus euaneſcent; quam proprietatem ſequentibus exemplis comprobemus.

I. Sit $y = x^2$; erit $dy = 2xdx$,
& $ddy = 2xddx + 2dx^2$,

qui

qui valores in formula $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx^3}$ subſtituti dabunt,

$$\frac{2\,xdx\,ddx - 2\,xdx\,ddx - 2\,dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Sit $y = x^n$; erit $dy = nx^{n-1}dx$,

&

$$ddy = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2,$$

qui valores ſubſtituti formulam $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx^3}$ transmutabunt in hanc

$$\frac{nx^{n-1}\,dx\,ddx - nx^{n-1}\,dx\,ddx - n(n-1)\,x^{n-2}\,dx^3}{dx^3}$$

$$= -n(n-)x^{n-2}.$$

III. Sit $y = -\surd(1-xx)$; erit $dy = \frac{xdx}{\surd(1-xx)}$,

&

$$ddy = \frac{xddx}{\surd(1-xx)} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

atque formula $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx^3}$, abit in

$$\frac{xddx}{dx^2\surd(1-xx)} - \frac{xddx}{dx^2\surd(1-xx)} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

In his igitur omnibus exemplis differentialia ſecunda ddx ſe mutuo tollunt, hocque ita eueniet, quaecunque aliae functiones loco y ſubſtituantur.

258. Cum iſta exempla iam probauerint veritatem noſtrae propoſitionis, quod formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ fixum habeat valorem, etiamſi nullum differentiale conſtans ſit aſſumtum, demonſtrationem eo facilius adornare poterimus. Sit y functio quaecunque ipſius x, eiusque differentiale dy huiusmodi erit, vt ſit $dy = pdx$, atque p erit functio quaepiam ipſius x, eiusque differentiale propterea huiusmodi formam habebit $dp = qdx$, eritque q iterum functio ipſius x. Cum igitur ſit $dy = pdx$, erit differentiando $ddy = pddx + qdx^2$, & $dyddx - dxddy = pdxddx - pdxddx - qdx^3 = - qdx^3$; in qua expreſſione cum nullum inſit differentiale ſecundum, habebit ea valorem fixum, atque $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ erit $= - q$. Quomodocunque igitur y pendeat ab x, differentialia ſecunda in hac formula ſemper ſe mutuo tollent, hancque ob cauſam eius valor, qui alioquin eſſet vagus, fiet ſtatus ac fixus.

259. Quanquam hic poſuimus y eſſe functionem ipſius x, tamen veritas aeque ſubſiſtit, ſi y ab x prorſus non pendeat, vti aſſumſimus. Dum enim pro y functionem quamcunque ſubſtituimus, neque qualis ſit determinauimus, nullam pendentiam ab x ipſi y tribuimus. Interim tamen ſine functionis mentione demonſtratio formari poteſt; quaecunque enim y ſit quantitas ſiue pendens ab x ſiue non pendens, eius differentiale dy homoge-

geneum erit cum dx, ſicque $\frac{dy}{dx}$ quantitatem finitam denotabit, cuius differentiale, quod capit, dum x in $x+dx$ & y in $y+dy$ abit, erit fixum, neque a differentialium ſecundorum lege pendebit. Sit igitur $\frac{dy}{dx}=p$; erit $dy=pdx$, & $ddy=pddx+dpdx$, vnde fit

$$dxddy-dyddx=dpdx^2,$$

cuius valor non eſt vagus, quia tantum differentialia prima continet; ac propterea idem manet, ſiue quodpiam differentiale conſtans accipiatur, qualecunque id demum ſit, ſiue nullum differentiale poſitum ſit conſtans.

260. Quia igitur $dyddx-dxddy$ non obſtantibus differentialibus ſecundis, quae potentia ſe mutuo deſtruere cenſeri poſſunt, ſignificationem habet fixam; expreſſio quaecunque, in qua nulla alia differentialia ſecunda praeter formulam $dyddx-dxddy$ inſunt, pariter ſignificationem habebit fixam. Seu ſi ponatur $dyddx-dxddy=\omega$, atque V fuerit quantitas ex x, y, earum differentialibus primis dx, dy atque ex ω vtcunque compoſita, ea valorem habebit fixum. Cum enim in differentialibus primis dx & dy nulla ratio habeatur eius legis arbitrariae, qua valores ſucceſſiui ipſius x creſcere ponuntur, in ω differentialia ſecunda ſe mutuo tollunt, etiam ipſa quantitas V non erit vaga ſed fixa. Sic iſta expreſſio $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy-dyddx}$ valorem obtinet fixum,

 quam-

quamuis ea differentialibus secundis inquinata videatur, atque insuper, quia numerator est homogeneus denominatori, valorem obtinet finitum, nisi is casu vel infinite magnus vel infinite paruus euadat.

261. Quemadmodum formula $dxddy - dyddx$ valorem fixum habere ostensa est, ita quoque si tertia variabilis z accedat, hae formulae $dxddz - dzddx$ & $dyddz - dzddy$ valores fixos habebunt. Hinc expressiones, quas tres variabiles x, y, & z inuoluunt, si in eis nulla alia differentialia secunda occurrant, praeter haec assignata, tum perinde erunt fixae, ac si nulla plane differentialia secunda inessent. Ita haec expressio:

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)\,ddy - (dy + dz)\,ddx + (dx - dy)\,ddz}$$

non obstantibus differentialibus secundis, fixa gaudet significatione. Similique modo formulae exhiberi possunt, plures variabiles continentes, in quibus differentialia secunda non impediunt, quominus earum significatio sit fixa.

262. Exceptis ergo huius generis formulis, quae differentialia secunda complectuntur, reliquae omnes significationes habebunt vagas, neque propterea in calculo locum habere possunt, nisi quodpiam differentiale primum definiatur, quod constans sit assumtum. Statim vero atque differentiale quodpiam primum constans assumitur, omnes expressiones quotcunque variabiles contine-

tineant, & cuiuscunque ordinis differentialia post primum in eas ingrediuntur, fixas obtinebunt significationes, neque amplius ex calculo excluduntur. Si enim verbi gratia dx assumtum sit constans, ipsius x differentialia secunda & sequentia euanescunt; & quaecunque functiones ipsius x loco reliquarum variabilium y, z, &c. substituantur, earum differentialia secunda per dx^2, tertia per dx^3, &c. determinabuntur, sicque inconstantia a differentialibus secundis oriunda tollitur. Idem euenit, si alius variabilis seu functionis cuiuscunque differentiale primum constans ponatur.

263. Ex his igitur sequitur differentialia secunda & altiorum ordinum reuera nunquam in calculum ingredi, atque ob vagam significationem prorsus ad Analysin esse inepta. Quando enim differentialia secunda adesse videntur, vel differentiale quodpiam primum constans assumitur, vel nullum. Priori casu differentialia secunda prorsus ex calculo euanescunt, dum per differentialia prima determinantur. Posteriori casu autem nisi se mutuo destruant, significatio erit vaga, & propterea in Analysi locum nullum inueniunt; sin autem se mutuo destruunt, tantum apparenter adsunt, & reuera solae quantitates finitae cum suis differentialibus primis adesse censendae sunt. Quoniam tamen saepissime apparenter tantum in calculo vsurpantur, necesse fuit, vt methodus eas tractandi exponeretur. Modum autem mox ostendemus, cuius ope differentialia secunda & altiora semper exterminari queant.

264. Si expreſſio vnicam contineat variabilem x, eiusque differentialia altiora ddx, d^3x, d^4x, &c. in ea occurrant, ea ſignificatum fixum habere nequit, niſi quodpiam differentiale primum conſtans ſit poſitum. Sit igitur t illa quantitas variabilis, cuius differentiale dt ſit conſtans poſitum, ita vt ſit $ddt = 0$, $d^3t = 0$, $d^4t = 0$, &c. Ponatur $dx = pdt$; eritque p quantitas finita, cuius differentiale vaga ſignificatione differentialium ſecundorum non afficietur, hincque etiam $\frac{dp}{dt}$ erit quantitas finita. Sit $dp = qdt$, ſimilique modo vlterius $dq = rdt$; $dr = sdt$; &c. erunt q, r, s, &c. quantitates finitae fixos ſignificatus habentes. Cum igitur ſit $dx = pdt$; erit

$$ddx = dp\,dt = qdt^2 \;;\quad d^3x = dqdt^2 = rdt^3 \;;$$
$$d^4x = drdt^3 = sdt^4 \;;\quad \&c.$$

qui valores ſi loco ddx, d^3x, d^4x, &c. ſubſtituantur, tota expreſſio meras quantitates finitas cum differentiali primo dt continebit, ideoque non amplius vagam ſignificationem habebit.

265. Si x ſit functio ipſius t, poterit hoc modo quantitas x prorſus eliminari, ita vt ſola quantitas t cum ſuo differentiali dt in expreſſione remaneat: ſin autem t ſit functio ipſius x, viciſſim quoque x erit ipſius t functio. Interim tamen ipſa quantitas x cum ſuo differentiali primo dx, in calculo retineri poteſt, dummodo poſt ſubſtitutiones ante factas vbique loco t & dt earum valores per x & dx expreſſi reſtituantur. Quod quo

pla-

planius fiat, ponamus t esse $= x^n$, ita vt differentiale primum ipsius x^n constans sit positum. Quia igitur est

$$dt = nx^{n-1}dx \; ; \text{ erit } p = \frac{1}{nx^{n-1}} \; ; \quad \&$$

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx \; ;$$

$$\text{vnde fit} \quad q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}} \; ; \quad \&$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = rdt = nrx^{n-1}dx.$$

Hinc porro fit

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}} \; ; \; \& \; s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}.$$

Quare si differentiale ipsius x^n ponatur constans, erit:

$$ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$$

$$d^3x = \frac{(n-1)(2n-1)dx^3}{xx}$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)(2n-1(3n-1)dx^4}{x^3}$$

&c.

266. Si expressio duas contineat variabiles x & y, earumque vnius x differentiale positum sit constans, ob $ddx = 0$, alia differentialia secunda & altiora non inerunt, praeter ddy, d^3y, &c. Haec autem eodem modo, quo ante vsi sumus, tolli poterunt ponendo

$dy =$

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c.

fiet enim

$ddy = qdx^2$; $d^3y = rdx^3$; $d^4y = sdx^4$ &c.

quibus ſubſtitutis expreſſio orietur, quae praeter quantitates finitas x, y, p, q, r, s, &c. nonniſi differentiale primum dx continebit. Sic ſi propoſita fuerit haec expreſſio

$$\frac{ydx^4 + xdyd^3y + xd^4y}{(xx+yy)\,ddy},$$

in qua dx eſt conſtans aſſumtum; ponatur

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dy = rdx$; & $dr = sdx$;

quibus valoribus ſubſtitutis expreſſio propoſita transmutabitur in hanc: $\frac{(y + xpr + xs)\,dx^2}{(xx+yy)\,q}$, quae nulla amplius differentialia ſecunda altioraue continet.

267. Simili modo differentialia ſecunda & altiora tollentur, ſi dy fuerit conſtans aſſumtum. Verum ſi aliud differentiale primum quodcunque dt ſtatuatur conſtans, tum primum modo ante indicato differentialia ipſius x altiora ex calculo tollantur, ponendo

$dx = pdt$; $dp = qdt$; $dq = rdt$; $dr = sdt$; &c.

vnde fit

$ddx = qdt^2$; $d^3x = rdt^3$; $d^4x = sdt^4$; &c.

Deinde ſimili modo differentialia altiora ipſius y ponendo

$dy =$

$dy = Pdt$; $dP = Qdt$; $dQ = Rdt$; $dR = Sdt$; &c.
vnde fiet

$ddy = Qdt^2$; $d^3y = Rdt^3$; $d^4y = Sdt^4$; &c.

quibus ſubſtitutis obtinebitur expreſſio, quae praeter quantitates finitas, x, p, q, r, s, &c. y, P, Q, R, S, &c. ſolum differentiale dt complectetur, neque propterea vagam habebit ſignificationem.

268. Si differentiale primum, quod conſtans ponitur, vel ab x vel ab y vel ab vtroque ſimul pendet, tum non opus eſt, vt duplex quantitatum finitarum p, q, r, &c. ſeries introducatur. Si enim dt ab x tantum pendet, tum litterae p, q, r, &c. fient functiones ipſius x, ſolaeque litterae P, Q, R, &c. ingrediuntur; idemque euenit, ſi differentiale conſtans dt ab y tantum pendeat. At ſi dt ab vtraque pendeat, operatio aliquantum immutari debet. Ponamus exempli gratia hoc differentiale ydx conſtans eſſe aſſumtum, eritque $yddx + dxdy = 0$; vnde fit $ddx = -\frac{dxdy}{y}$. Sit nunc $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dy = rdx$ &c. eritque $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$; vlteriusque differentiando

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y},$$

ſubſtituatur hic loco ddx eius valor $-\frac{pdx^2}{y}$; fiet

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy}; \text{ porroque}$$

$$d^4x = -\frac{r\,dx^4}{y} + \frac{pq\,dx^4}{yy} + \frac{6pq\,dx^4}{yy} - \frac{6p^3\,dx^4}{y^3}$$
$$+ \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right) 3\,dx^2\,ddx;$$

& pro ddx ſubſtituto valore $-\frac{p\,dx^2}{y}$ emerget

$$d^4x = \left(\frac{-r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right) dx^4 \text{ \&c.}$$

Deinde cum ſit $dy = p\,dx$; erit

$$ddy = q\,dx^2 + p\,ddx = \left(q - \frac{pp}{q}\right) dx^2;$$

& continuo pro ddx valore $-\frac{pdx^2}{y}$ ſubſtituendo fiet

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right) dx^3, \text{ \&}$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right) dx^4 \text{ \&c.}$$

qui valores loco differentialium altiorum ipſarum x & y ſubſtituti mutabunt expreſſionem propoſitam in eiusmodi formam, quae nulla amplius differentialia altiora continebit, hincque conſideratione cuiuſpiam differentialis conſtantis exuetur. Facta enim hac transformatione, quia differentialia ſecunda non inſunt, nequidem opus eſt, vt quale differentiale ſumtum ſit conſtans, commemoretur.

269. Saepiſſime autem in calculo ad lineas curuas applicato euenire ſolet, vt hoc differentiale primum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ conſtans aſſumatur: quare quemadmodum hoc caſu differentialia ſecunda & altiora eliminari de-

debeant, ostendamus. Sic enim simul via patebit ad idem negotium absoluendum, si aliud quodcunque differentiale assumendum sit constans. Ponatur iterum

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c.

atque differentiale $\surd(dx^2 + dy^2)$ induet hanc formam $dx\surd(1+pp)$, quae cum sit constans fiet

$$ddx\surd(1+pp) + \frac{pqdx^2}{\surd(1+pp)} = 0,$$

ideoque $$ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp};$$

vnde iam ipsius ddx valor habebitur: hinc porro erit

$$d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}.$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}.$$

Deinde fiet

$$d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2} - \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Quia autem assumsimus $dy = pdx$, fiet differentiando

$$ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp},$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{2pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp},$$ ideoque

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2};$$

 por-

porroque differentiando:

$$d^4y = \frac{s\,dx^4}{1+pp} - \frac{13pqr\,dx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Omnia ergo differentialia altiora vtriusque variabilis x & y per quantitates finitas & poteſtates ipſius dx exprimentur, atque poſt has ſubſtitutiones factas reſultabit expresſio a differentialibus ſecundis prorſus libera.

270. Expoſito igitur modo differentialia ſecunda & altiora exuendi, conueniet hoc negotium aliquot exemplis illuſtrari.

I. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{x\,ddy}{dx^2}$, in qua dx poſitum eſt conſtans. Poſito ergo $dy = p\,dx$, & $dp = q\,dx$, ob $ddy = q\,dx^2$, expreſſio propoſita abit in hanc finitam xq.

II. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua poſitum ſit dy conſtans. Ponatur $dx = p\,dy$; $dp = q\,dy$, ob $ddx = q\,dy^2$, orietur $\frac{1+pp}{q}$. Sin autem vt ante ſtatuere velimus $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$; ob dy conſtans erit $0 = p\,ddx + dp\,dx$ & $ddx = -\frac{q\,dx^2}{p}$; vnde expreſſio propoſita transibit in $\frac{-p(1+pp)}{q}$.

III. Sit propoſia haec expreſſio $\frac{y\,ddx - x\,ddy}{dx\,dy}$ in qua $y\,dx$ poſitum ſit conſtans. Ponatur $dy = p\,dx$ & $dp =$

$dp = q\,dx$, eritque ex §. 268: $ddx = -\frac{p\,dx^2}{y}$, $ddy = q\,dx^2 - \frac{pp\,dx^2}{y}$, quibus substitutis expressio proposita transmutatur in hanc: $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$.

IV. Sit proposita ista expressio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua constans sit positum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Ponatur iterum $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, & ex paragrapho praecedente erit $ddy = \frac{q\,dx^2}{1+pp}$; vnde expressio proposita abibit in $\frac{(1+pp)^2}{q}$.

Ex his autem exemplis satis intelligitur, quemadmodum in quouis casu oblato, quodcunque differentiale primum assumtum sit constans, differentialia secunda atque altiora eliminari debeant.

271. Cum igitur hoc modo introducendis quantitatibus finitis p, q, r, s, &c. differentialia secunda & altiora ita eliminari queant, vt tota expressio praeter quantitates finitas x, y, p, q, r, s, &c. solum differentiale dx complectatur: vicissim si huiusmodi expressio reducta proponatur, ea iterum in formam priorem transmutari poterit loco litterarum p, q, r, s, &c. introducendis differentialibus secundis & altioribus. Nunc autem perinde erit, quodnam differentiale primum constans assumatur; atque vel id ipsum, quod ante fuit assumtum constans po-

poni poteſt, vel aliud quodcunque. Quin etiam prorſus nullum differentiale conſtans aſſumi poterit, hocque modo prodibunt expreſſiones differentialia ſecunda altioraue continentes, quae etiamſi nullum differentiale conſtans ſit aſſumtum, tamen fixas ſignificationes obtineant, cuiusmodi expreſſiones dari ſupra oſtendimus.

272. Sit ergo propoſita expreſſio quaecunque continens litteras finitas x, y, p, q, r, &c. vna cum differentiali dx, in qua ſit $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dy}{dx}$; &c. Si enim has litteras p, q, r, &c. ita eliminare velimus, vt earum loco introducamus differentialia ſecunda & altiora ipſarum x & y, nullo differentiali conſtante aſſumto: fiet $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, hincque $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, quae formula differentiata dabit

$$dq = \frac{dx^2 d^3y - 3\,dx\,ddx\,ddy + 3\,dy\,ddx^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^4},$$

vnde fit

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3\,dx\,ddx\,ddy + 3\,dy\,ddx^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5}.$$

Quod ſi inſuper littera s, quae denotat valorem $\frac{dr}{dx}$, inſit, pro ea ſubſtitui debebit hic valor $s =$

$$\frac{dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y - 4dx^2ddyd^3x + 15dxddx^2ddy + 10dxdyddxd^3x - 15dyddx^3 - dx^2dyd^4x}{dx^7}$$

His

His igitur valoribus loco quantitatum p, q, r, s, &c. ſubſtitutis expreſſio propoſita transmutabitur in aliam differentialia altiora ipſarum x & y continentem, quae etiamſi nullum differentiale primum conſtans ſit aſſumtum, tamen non vagam ſed fixam habebit ſignificationem.

273. Hoc ergo modo quaeuis formula differentialis altioris gradus, in qua quodpiam differentiale primum aſſumtum eſt conſtans, transmutari poterit in aliam formam, in qua nullum differentiale conſtans ponitur, quae hoc non obſtante eundem valorem fixum habeat. Primum ſcilicet ope methodi ante traditae aſſumtis valoribus $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dy = rdx$; $dr = sdx$; &c. differentalia altiora eliminentur, tum loco p, q, r, s, &c. valores nunc inuenti ſubſtituantur; atque orietur expresſio priori aequalis nullum differentiale conſtans inuoluens: quam transformationem exempla ſequentia illuſtrabunt.

I. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{xddy}{dx^2}$, in qua dx poſitum conſtans, quae transmutari debeat in aliam formam nullum differentiale conſtans inuoluentem.

Ponatur $dy = pdx$; $dp = qdx$; atque vt ante (270) vidimus expreſſio propoſita transibit in hanc: qx. Nunc loco q ſubſtituatur valor, quem obtinet nullo differentiali conſtanti aſſumto $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ atque reperietur haec expreſſio $\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$ propoſitae aequalis, & nullum amplius differentiale conſtans inuoluens.

II. Sit

II. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua dy aſſumtum eſt conſtans. Ponatur $dy = pdx$ & $dp = qdx$; eaque transibit in hanc: $-\frac{p(1+pp)}{q}$, ſtatuatur nunc $p = \frac{dy}{dx}$ & $q = \frac{dxddy - dyddy}{dx^3}$, atque inuenietur: $\frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dyddx - dxddy}$ quae nullo differentiali aſſumto eundem fixum habet valorem, quem propoſita.

III. Sit propoſita haec expreſſio: $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$, in qua differentiale ydx conſtans eſt aſſumtum. Ponatur $dy = pdx$, atque vti ſupra (270) vidimus haec expreſſio transmutatur in hanc: $-1 - \frac{xy}{p} + \frac{xp}{y}$, quae nullo differentiali conſtante aſſumto transformabitur in iſtam:

$$-1 - \frac{xdxddy + xdyddx}{dx^2dy} + \frac{xdy}{ydx}$$
$$= \frac{xdxdy^2 - ydx^2dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2dy}$$

IV. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua conſtans aſſumtum eſt differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Poſito $dy = pdx$, & $dp = qdx$, orietur haec expreſſio $\frac{(1+pp)^2}{q}$, (loco citato). Statuatur nunc $p = \frac{dy}{dx}$, & $q =$

$q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, atque nullo aſſumto differentiali conſtante nanciſcemur iſtam expreſſionem $\frac{(dx^2 + dy)^2}{dx^2 ddy - dx dy ddx}$ propoſitae aequiualentem.

V. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx d^3 y}{x ddy}$, in qua differentiale dx conſtans ſit aſſumtum. Ponatur

$$dy = p dx \; ; \quad dp = q dx \quad \& \quad dq = r dx \; ;$$

atque ob

$$ddy = q dx^2 \quad \& \quad d^3 y = r dx^3$$

formula propoſita abibit in hanc $\frac{r dx^2}{xq}$. Nunc loco q & r ſubſtituantur valores, quos nullo differentiali conſtante aſſumto recipiunt ſcilicet: $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, &

$$r = \frac{dx^2 d^3 y - 3 dxddxddy + 3 dyddx^2 - dxdyd^3 x}{dx^5},$$

atque obtinebitur ſequens expreſſio propoſitae aequiualens:

$$\frac{dx^2 d^3 y - 3 dxddxddy + 3 dyddx^2 - dxdyd^3 x}{dxddy - dyddx}$$

$$= \frac{dx (dxd^3 y - dyd^3 x)}{dxddy - dyddx} - 3 ddx .$$

274. Si has transformationes diligentius intueamur, methodum eas perficiendi colligere poterimus expeditiorem, ita vt non opus ſit litteras p, q, r, &c. introducere

cere. Varii autem modi hoc opus abſoluendi occurrent, prout aliud atque aliud differentiale in formula propoſita conſtans fuerit aſſumtum. Ponamus primum in formula propoſita differentiale dx conſtans eſſe aſſumtum; & quia loco dy poſuimus pdx, rurſusque $\frac{dy}{dx}$ loco p: differentialia prima dx & dy, vbicunque in expreſſione occurrunt, ſine alteratione relinquuntur. Vbi autem occurrit ddy, quia eius loco ſcribitur qdx^2, & porro loco q valor $\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, transmutatio abſoluetur, ſi vbique loco ddy ſtatim ponatur $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$ ſeu $ddy - \frac{dyddx}{dx}$. Si inſuper in expreſſione propoſita occurrat d^3y, quia eius loco ponitur rdx^3, ob valorem ipſius r ante inuentnm, vbique loco d^3y ſcribi debebit

$$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx},$$

quo facto expreſſio propoſita transmutabitur in aliam, quae nullum differentiale conſtans inuoluit. Sic ſi proponatur iſta expreſſio $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx poſitum eſt conſtans, ei aequalis erit poſito $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ loco ddy, haec nullum differentiale conſtans inuoluens:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}.$$

275. Hinc facile colligitur, ſi in expreſſione quapiam propoſita aſſumtum fuerit differentiale dy conſtans, tum vbique loco ddx ſcribi debere $ddx - \frac{dxddy}{dy}$, & loco d^3x hoc $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$; vt obtineatur expreſſio aequiualens, in qua nullum differentiale conſtans ponatur. Sin autem in expreſſione propoſita conſtans fuerit aſſumtum ydx, quoniam fit

$$ddx = -\frac{pdx^2}{y}, \quad \& \quad ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y};$$

loco ddx vbique ſcribi debebit $-\frac{dxdy}{y}$, & loco ddy vbique $ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$: ad altiora differentialia, quia in hoc negotio rariſſime occurrere ſolent, non progredior. Quod ſi vero in expreſſione propoſita hoc differentiale $V(dx^2 + dy^2)$ aſſumtum fuerit conſtans, quia inuenimus $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$ & $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$: pro ddx vbique ſcribi debet $\frac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$, & loco ddy vbique $\frac{dx^2ddy - dxdyddx}{dx^2 + dy^2}$. Sic ſi propoſita fuerit expreſſio $\frac{dyV(dx^2 + dy^2)}{ddx}$, in qua $V(dx^2 + dy^2)$ aſſumtum ſit conſtans, ea transmutabitur in hanc:

$\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dy\,ddx - dx\,ddy}$, in qua nullum differentiale conſtans aſſumitur.

276. Quo iſtae reductiones facilius ad vſum accommodari queant, eas in ſequenti tabella complecti viſum eſt.

Formulæ igitur differentialis altioris gradus in aliam nullum differentiale conſtans inuoluentem transmutabitur ope ſubſtitutionum ſequentium :

I. Si differentiale dx fuerit conſtans aſſumtum

loco	ſcribatur
ddy	$ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$
d^3y	$d^3y - \frac{3\,ddx\,ddy}{dx} + \frac{3\,dy\,ddx^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx}$

II. Si differentiale dy fuerit conſtans aſſumtum

loco	ſcribatur
ddx	$ddx - \frac{dx\,ddy}{dy}$
d^3x	$d^3x - \frac{3\,ddx\,ddy}{dy} + \frac{3\,dx\,ddy^2}{dy^2} - \frac{dx\,d^3y}{dy}$

III.

III. Si differentiale ydx fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$-\frac{dxdy}{y}$
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
d^3x	$\frac{dyddx}{y} - \frac{dxddy}{y} + \frac{3dxdy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ $- \frac{4dyddy}{y} + \frac{4dy^2ddx}{ydx} + \frac{3dy^3}{yy}$.

IV. Si differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ fuerit constans assumtum.

loco	scribatur
ddx	$\frac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$
ddy	$\frac{dx^2ddy - dxdyddx}{dx^2 + dy^2}$
d^3x	- - - - $\frac{dy^2d^3x - dxdyd^3y}{dx^2 + dy^2}$ $+ \frac{(dxddy - dyddx)(3dy^2ddy - dx^2ddy + 4dxdyddx)}{(dx^2 + dy^2)^2}$
d^3y	- - - - $\frac{dx^2d^3y - dxdyd^3x}{dx^2 + dy^2}$ $+ \frac{(dyddx - dxddy)(3dx^2ddx - dy^2ddx + 4dxdyddy)}{(dx^2 + dy^2)^2}$

277. Expreſſiones ergo iſtae, quae nullum differentiale conſtans includunt, ita erunt comparatae, vt pro lubitu quoduis differentiale conſtans aſſumi queat. Hincque expreſſiones differentiales altiorum graduum, in quibus nullum differentiale conſtans aſſumtum perhibetur, examinari poſſunt, vtrum ſignificatio earum ſit vaga an fixa? Ponatur enim pro lubitu quodpiam differentiale puta dx conſtans, tum per regulam §. praeced. priorem reducatur expreſſio iterum ad formam, in qua nullum differentiale conſtans ſit aſſumtum, quae ſi cum propoſita conueniat, ea erit fixa, neque ab inconſtantia differentialium ſecundorum pendebit: ſin autem expreſſio prodeat diuerſa, tum propoſita vagam habet ſignificationem. Sic ſi ponatur haec expreſſio $yddx - xddy$, in qua nullum differentiale poſitum ſit conſtans; ad inueſtigandum, vtrum ſignificationem fixam habeat an vagam? ponatur dx conſtans, eaque abibit $-xddy$: nunc per regulam primam §. praeced. loco ddy ponat,

$$ddy - \frac{dyddx}{dx} \text{ ac prodibit } -xddy + \frac{xdyddx}{dx},$$

cuius a propoſita diſcrepantia indicat, propoſitam expreſſionem fixam ſtatamque ſignificationem non habere.

278. Simili modo ſi proponatur expreſſio generalis huiusmodi $Pddx + Qdxdy + Rddy$, conditio definiri poterit, ſub qua ea nullo differentiali conſtante aſſumto valorem fixum habeat. Ponatur enim dx conſtans, atque expreſſio propoſita abibit in hanc $Qdxdy + Rddy$: nunc haec iterum transformetur in aliam formam, vt eius

eius significatus idem maneat, etiamsi nullum differentiale constans fingatur, sicque prodibit $Qdxdy+Rddy-\frac{Rdyddx}{dx}$, quae forma cum proposita congruet, si fuerit $Pdx+Rdy=0$; hocque solo casu valor eius erit fixus. Verum si non fuerit $P=-\frac{Rdy}{dx}$ seu $R=-\frac{Pdx}{dy}$ tum expressio proposita $Pddx+Qdxdy+Rddy$ valorem fixum non habebit, sed eius significatio erit vaga atque diuersa, prout aliud atque aliud differentiale constans assumitur.

279. Ex his principiis etiam facile erit expressionem differentialem, in qua quodpiam differentiale constans est positum, transmutare in aliam formam, in qua aliud differentiale constans assumatur. Reducatur enim primum ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans inuoluat, quo facto illud alterum differentiale constans ponatur. Sic si in expressione proposita differentiale dx assumtum sit constans, eaque transmutanda sit in aliam, quae differentiale dy constans implicet: in formulis supra loco ddy & d^3y substituendis ob dy constans ponatur $ddy=0$, $d^3y=0$, atque quaesito satisfiet, si loco ddy substituatur $-\frac{dyddx}{dx}$ & $\frac{3dyddx^2}{dx^2}-\frac{dyddx}{dx}$ loco d^3y. Hoc modo ista formula $-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx positum est constans, transmutabitur in hanc $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$, in qua dy ponitur constans.

280. Si contra formula, in qua dy conſtans eſt poſitum, transmutari debeat in aliam, in qua dx ſit conſtans, tum loco ddx ſubſtitui debet $-\frac{dxddy}{dy}$ & loco d^3x haec expreſſio $\frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$. Simili modo ſi formula, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ poſitum eſt conſtans, transmutari debeat in aliam, in qua dx ſit conſtans, tum loco ddx ſcribatur $-\frac{dxdyddy}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{dx^2ddy}{dx^2+dy^2}$ loco ddy. At ſi formula, qua dx conſtans eſt aſſumtum, transmutari debeat in aliam, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ſit conſtans, quia ob dx^2+dy^2 conſtans fit $dxddx+dyddy=0$, & $ddx=-\frac{dyddy}{dx}$, hoc valore loco ddx aſſumto, pro ddy ſcribi debebit $ddy+\frac{dy^2ddy}{dx^2}=\frac{(dx^2+dy^2)ddy}{dx^2}$. Sic haec formula $-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx eſt conſtans, transmutabitur in aliam, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ponitur conſtans, quae erit $-\frac{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{ddy}$.

CAPUT IX.

DE AEQUATIONIBUS DIFFERENTIALIBUS.

281.

In hoc Capite imprimis eſt propoſitum earum functionum ipſius x, quae non explicite, ſed implicite per aequationem, qua relatio functionis iſtius y ad x continetur, definiuntur, differentiationem explicare: quo facto naturam aequationum differentialium in genere perpendemus, & quemadmodum ex aequationibus finitis oriantur, oſtendemus. Cum enim in calculo integrali ſummum negotium conſiſtat in integratione aequationum differentialium, ſeu in inuentione eiusmodi aequationum finitarum, qua cum differentialibus conueniant; neceſſe eſt, vt hoc loco indolem ac proprietates aequationum differentialium, quae ex earum origine ſequuntur, diligentius ſcrutemur, ſicque viam ad calculum integralem praeparemus.

282. Vt igitur hoc negotium abſoluamus, ſit y functio eiusmodi ipſius x, quae per hanc aequationem quadratam $yy + Py + Q = 0$ definiatur. Cum ergo haec expreſſio $yy + Py + Q$ ſit $= 0$, quicquid x ſignificet, nihilo quoque aequalis erit, ſi loco x ſcribatur $x + dx$, quo caſu y abit in $y + dy$. Facta autem hac ſubſtitutione, ſi a quantitate reſultante ſubtrahatur prior

$yy + Py + Q$, remanebit eius differentiale, quod propterea quoque erit $= 0$. Hinc patet si expressio quaecunque fuerit $= 0$, eius etiam differentiale fore aequale 0; atque si duae quaecunque expressiones inter se fuerint aequales, earum quoque differentialia fore aequalia. Cum igitur sit $yy + Py + Q = 0$, erit quoque

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0:$$

quia vero P & Q sunt functiones ipsius x, earum differentialia huiusmodi formam habebunt,

$$dP = pdx, \quad \& \quad dQ = qdx;$$

vnde fiet

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0$$

ex qua oritur $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp - q}{2y + P}$.

283. Quemadmodum ergo *aequatio finita* $yy + Py + Q = 0$ exponit relationem inter y & x, ita aequatio differentialis exprimit relationem seu rationem, quam dy tenet ad dx. Quoniam vero est $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp - q}{2y + P}$, haec ratio $dy : dx$ cognosci non potest, nisi ipsa functio y sit cognita: neque vero res aliter se habere potest; cum enim ex aequatione finita y geminum obtineat valorem, vterque suum peculiare habebit differentiale, & vtriusque differentiale reperietur, prouti hic vel ille valor in expressione $-\frac{yp - q}{2y + P}$ loco y substituatur. Simili modo functio y per aequatio-

tionem cubicam definiatur, valor functionis $\frac{dy}{dx}$ erit triplex; triplici scilicet ipsius y valori respondens. Si in aequatione proposita finita y quatuor pluresue habeat dimensiones, necesse est vt $\frac{dy}{dx}$ totidem significationes sortiatur.

284. Interim tamen ipsa functio y ex aequatione eliminari poterit, cum duae habeantur aequationes y continentes, finita scilicet & differentialis: tum autem eius differentiale dy ad totidem dimensiones assurget, quot ante habuerat y, sicque ista aequatio omnes diuersas rationes ipsius dy ad dx simul complectetur. Sumamus praecedens exemplum aequationis $yy + Py + Q = 0$, cuius differentialis est:

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0,$$

ex qua fit $y = -\frac{Pdy - dQ}{2dy + dP}$, qui valor loco y in priori aequatione substitutus dabit:

$$(4Q-PP)dy^2 + (4Q-PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0,$$

cuius radices sunt:

$$dy = -\tfrac{1}{2}dP \pm \frac{(\tfrac{1}{2}PdP - dQ)}{\sqrt{(PP - 4Q)}},$$

quae sunt bina differentialia binorum ipsius y valorum ex aequatione finita:

$$y = -\tfrac{1}{2}P \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(PP - 4Q)}.$$

285. Inuento valore ipſius dy per repetitam differentiationem reperietur valor ipſius ddy, porroque ipſorum d^3y, d^4y, &c. qui autem, cum determinati non ſint, niſi aliquod differentiale primum conſtans ſtatuatur. Ponamus commoditatis ergo dx conſtans, atque ad hoc oſtendendum ſumamus hoc exemplum $y^3 + x^3 = 3axy$, vnde per differentiationem oritur

$$3yydy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx,$$

hincque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$, ſumantur denuo differentialia poſito dx conſtante atque inuenietur $\frac{ddy}{dx} =$

$$= \frac{ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

ſubſtituatur loco dy eius valor modo inuentus $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$, atque diuiſione per dx facta habebitur

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3}$$

$$+ \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - ax)^2}$$

ſeu

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

$$= - \frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

cum ex aequatione finita ſit $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$: hocque modo ope aequationis finitae his valores in innumeras formas transmutari poſſunt.

286.

286. Aequatio etiam differentialis prima infinitis modis poteſt variari, dum cum aequatione finita permiſcetur. Sic cum exemplo praecedente inuenta eſſet aequatio differentialis

$$yydy + xxdx = axdy + aydx,$$

ſi ea multiplicetur per y, orietur

$$y^3dy + xxydx = axydy + ayydx,$$

in qua ſi loco y^3 ſubſtituatur eius valor $3axy - x^3$ orietur haec aequatio noua

$$2axydy - x^3dy + xxydx = ayydx;$$

quae denuo per y multiplicata, poſtquam loco y^3 eius valor fuerit ſubſtitutus, praebebit

$$2axy^2dy - x^3ydy + xxyydx = 3aaxydx - ax^3dx.$$

Generaliter autem ſi P, Q, R, denotent functiones quascunque ipſarum x & y. Si aequatio differentialis multiplicetur per P erit

$$Pyydy + Pxxdx = aPxdy + aPydx.$$

Tum cum ſit $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ erit quoque

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0,$$

quae aequationes inuicem additae dabunt aequationem differentialem generalem ex propoſita aequatione finita natam

$$\begin{aligned} &Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy + \\ &Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0. \end{aligned}$$

287. Poſſunt vero etiam per ipſam differentiationem infinitae aequationes differentiales ex eadem aequatio-

tione finita inueniri, dum ea, antequam differentietur, per quantitatem quamcunque aut multiplicatur aut diuiditur. Sic ſi P fuerit functio quaecunque ipſarum x & y, vt ſit $dP = p\,dx + q\,dy$, ſi aequatio finita per P multiplicetur, atque tum demum differentietur, obtinebitur aequatio differentialis generalis, quae infinitas formas diuerſas induet, prouti pro P aliae atque aliae functiones aſſumuntur. Tum vero multiplicitas adhuc in infinitum augebitur, ſi ad hanc aequationem differentialem inuentam addatur ipſa aequatio finita per huiusmodi formulam $Q\,dx + R\,dy$ multiplicata, vbi pro Q & R functiones quascunque ipſarum x & y aſſumere licet. Quanquam autem in his omnibus aequationibus relatio inter dy & dx, quam differentiale functionis y aequatione finita per x determinatae ad dx tenet, comprehenditur; tamen plerumque multo latius patent, & differentiale ipſius y per alias aequationes finitas determinati exprimit; cuius rei ratio in calculo integrali potiſſimum explicabitur.

288. Non ſolum autem ex eadem aequatione finita innumerabiles aequationes differentiales deduci poſſunt, ſed etiam plures imo infinitae exhiberi poſſunt aequationes finitae, quae ad easdem aequationes differentiales deducantur. Sic hae duae aequationes $yy = ax + ab$ & $yy = ax$ omnino ſunt diuerſae, dum in priori quaecunque quantitas conſtans in locum ipſius b collocatur. Interim tamen hae ambae aequationes differentiatae eandem dant aequationem differentialem $2y\,dy = a\,dx$; quin etiam omnes aequationes in hac forma $yy = ax$ conten-

tentae, quicunque valor ipſa a tribuatur, in vna aequatione differentiali, in qua a non inſit, comprehendi poſſunt. Diuidatur enim aequatio illa per x vt ſit $\frac{yy}{x} = a$, haecque differentia dabit $2xdy - ydx = 0$. Poſſunt quoque aequationes transcendentes & algebraicae ad eandem aequationem differentialem perduci, vti fit in iſtis aequationibus

$$yy - ax = 0 \quad \& \quad yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}},$$

ſi enim vtraque per $e^{\frac{x}{a}}$ diuidatur, vt habeantur iſtae aequationes:

$$e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0 \quad \& \quad e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb,$$

ex vtriusque differentiatione orietur eadem differentialis

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

289. Ratio huius diuerſitatis in hoc conſiſtit, quod quantitatis conſtantis differentiale ſit $= 0$. Quodſi ergo aequatio finita ad eiusmodi formam reducatur, vt quantitas quaepiam conſtans ſola adſit, neque per variabiles vel multiplicetur vel diuidatur; tum per differentiationem eruetur aequatio, in qua illa quantitas conſtans prorſus non adſit. Hoc modo quaelibet quantitas conſtans, quae in aequationem finitam ingreditur, per differentiationem tolli poteſt. Sic ſi propoſita fuerit aequatio $x^3 + y^3 = 3axy$; ſi ea per xy diuidatur vt habeatur

$\frac{x^3 + y^3}{xy} = 3a$, haec aequatio differentiata dabit:

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

quam conſtans a amplius non ingreditur.

290. Si plures quantitates conſtantes, quae in aequatione finita inſunt, tolli debeant, id fiet per differentiationem bis pluriesue repetitam; ſicque tandem obtinebuntur aequationes differentiales altiorum graduum iis conſtantibus prorſus carentes. Sit propoſita haec aequatio $yy = maa - nxx$, ex qua per differentiationem conſtantes maa & n tolli debeant. Prima quidem tolletur prima differentiatione, vnde fit $ydy + nxdx = 0$, hinc porro formetur aequatio $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, quae ſumto dx conſtante, per differentiationem dabit:

$$xyddy + xdy^2 - ydxdy = 0,$$

quae etſi nullam conſtantem complectitur, tamen omnes aequationes in hac forma $yy = maa - nxx$ contentas, quicunque valores litteris m, n & aa tribuantur, in ſe aeque comprehendit.

291. Non ſolum vero quantitates conſtantes, quae in aequationem finitam ingrediuntur, per differentiationem tolli poſſunt, ſed etiam altera variabilis, eius ſcilicet, cuius differentiale conſtans aſſumitur, per differentiationem eliminari poterit. Ex aequatione enim inter x & y propoſita quaeratur valor x, vt ſit $x = Y$ denotante Y func-

functionem ipſius y; eritque $dx = dY$, & ſumto dx conſtante, fiet differentiando $0 = ddY$. Sin autem fuerit $xx + ax + b = Y$, fiet ter differentiando $0 = d^3Y$, & aequatio $x^3 + axx + bx + c = Y$ quater differentiata dat $0 = d^4Y$. Quanquam autem in his aequationibus vna tantum variabilis ineſſe videtur, quae propterea variabilis eſſe ceſſaret, dum vnica variabilis in nulla aequatione adeſſe poteſt; tamen quia differentiale dx conſtans eſt aſſumtum, eiusque ratio in aequatione haberi debet, reuera in aequationem ingredi cenſendum eſt. Hinc mirandum non eſt, ſi ſaepius aequationes differentiales ſecundi altiorisue gradus occurrant, in quibus vnica tantum variabilis ineſſe videatur.

292. Praecipue autem notandum eſt, per differentiationem quantitates irrationales ac transcendentes ex aequatione tolli poſſe. Quod quidem ad irrationales attinet, quoniam per reductiones cognitas irrationalitas eliminari poteſt, hoc facto, per differentiationem aequatio obtinetur ab irrationalitate libera. Verum hoc ſaepenumero commodius ſine iſta reductione fieri poteſt, dum per comparationem aequationis differentialis cum finita formula irrationalis, ſi vna tantum inſit, eliminari poteſt. Sin autem duae pluresue partes irrationales in aequatione finita contineantur, tum eius aequatio differentialis denuo differentietur, ſicque aequationes differentiales altiorum graduum tot quaerantur, quot requiruntur ad ſingulas partes irrationales eliminandas. Hoc modo etiam exponentes indefiniti pariter atque fracti tolli poterunt.

runt. Vti ſi fuerit $y^m = (aa - xx)^n$, poſt differentiationem habebitur

$$my^{m-1}dy = -2n(aa - xx)^{n-1}xdx,$$

quae per finitam diuiſa dat $\frac{mdy}{y} = -\frac{2nxdx}{aa-xx}$, in qua nullus amplius exponens indefinitus occurrit. Hinc ergo patet aequationem differentialem ab omni irrationalitate liberam ortam eſſe poſſe ex aequatione finita irrationali, atque adeo quantitates transcendentes inuolvente.

293. Vt autem intelligatur, quomodo per differentiationem quantitates transcendentes eliminentur, incipiamus a logarithmis, quorum differentialia cum ſint algebraica, negotium ſine difficultate abſoluetur. Sit enim $y = xlx$: erit $\frac{y}{x} = lx$, vnde differentiando fit $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dx}{x}$, ideoque $xdy - ydx = xdx$. Si bini inſint logarithmi duplici differentiatione erit opus: ſit enim $ylx = xly$; erit $\frac{ylx}{x} = ly$, & differentiando, $\frac{xdylx + ydx - ydxlx}{xx} = \frac{dy}{y}$, ex qua concluditur fore $lx = \frac{xxdy - yydx}{yxdy - yydx}$. Haec aequatio iam iterum differentietur poſito dx conſtante, atque prodibit

$$\frac{dx}{x} = \frac{xx\,ddy + 2x\,dx\,dy - 2y\,dx\,dy}{yx\,dy - yy\,dx}$$

$$+ \frac{(yy\,dx - xx\,dy)(yx\,ddy + x\,dy^2 - y\,dx\,dy)}{(yx\,dy - yy\,dx)^2}$$

seu $\frac{dx}{x} =$

$$\frac{y^3 x\,dx\,ddy - yyxx\,dx\,ddy + 3yxx\,dx\,dy^2 - y^2 x\,dx\,dy^2 + y^3\,dx^2\,dy - 2xyy\,dx^2\,dy - x^3\,dy^3}{(yx\,dy - yy\,dx)^2}$$

quae reducta dabit:

$$y^3 x\,dx\,ddy - yyxx\,dx\,ddy + 3yxx\,dx\,dy^2 - 2xyy\,dx\,dy^2$$

$$+ 3y^3\,dx^2\,dy - 2xyy\,dx^2\,dy - x^3\,dy^3 - \frac{y^4\,dx^3}{x} = 0$$

seu

$$yyxx\,(y - x)\,dx\,ddy + 3yx\,dx\,dy\,(xx\,dy + yy\,dx)$$

$$- 2yyxx\,dx\,dy\,(dx + dy) = x^4\,dy^3 + y^4\,dx^3.$$

294. Quantitates exponentiales ex aequatione eodem modo, quo logarithmi per differentiationem tolluntur. Si enim huiusmodi propoſita fuerit $P = e^Q$, vbi P & Q functiones quascunque ipſarum x & y denotent; ea aequatio transmutari poterit in hanc logarithmicam $lP = Q$; cuius differentialis eſt $\frac{dP}{P} = dQ$ ſeu $dP = P\,dQ$. Neque obſtat, ſi quantitates exponentiales magis fuerint complicatae, tum enim ſi vna differentiatio non ſufficit, duabus pluribusue negotium abſoluetur.

I. Sit $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; multiplicetur huius fractionis numerator ac denominator per e^x eritque $y = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$, vnde fit

$$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \quad \& \quad 2x = l\frac{y+1}{y-1},$$

cuius differentiale est

$$dx = -\frac{dy}{yy-1} = \frac{dy}{1-yy}.$$

II. Sit $y = l\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, fiet per primam differentiationem $dy = \frac{(e^x - e^{-x})dx}{e^x + e^{-x}}$, seu $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, atque $e^{2x} = \frac{dy+dx}{dx-dy}$. Ergo $2x = l\frac{dy+dx}{dx-dy}$. Sumto ergo dx constante erit

$$dx = \frac{dx\,ddy}{dx^2 - dy^2} \quad \text{seu} \quad dx^2 = ddy + dy^2.$$

295. Simili modo quantitates transcendentes a circulo pendentes ex aequatione ope differentiationis tollentur, vti ex his exemplis intelligetur.

I. Sit $y = a\,\mathrm{A}\sin\frac{x}{a}$; erit $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

II. Sit $y = a\cos\frac{y}{x}$; erit

$\frac{y}{a} = \cos\frac{y}{x}$, & $\frac{dy}{a} = -\frac{x\,dy + y\,dx}{xx}\sin\frac{y}{x}$. At

At cum ſit

$$\cos\frac{y}{x} = \frac{y}{a};\ \text{erit}\ \sin\frac{y}{x} = \frac{V(aa-yy)}{a},$$

quo valore ſubſtituto habebitur

$$\frac{dy}{a} = \frac{(ydx - xdy)V(aa-yy)}{axx}$$

ſeu $xxdy = (ydx - xdy)V(aa-yy)$.

III. Sit $y = m\sin x + n\cos x$, erit poſt differentiationem primam $dy = mdx\cos x - ndx\sin x$: quae denuo differentiata poſito dx conſtante dabit

$$ddy = -mdx^2\sin x - ndx^2\cos x,$$

haec autem per primam diuiſa dat

$$\frac{ddy}{y} = -dx^2\ \text{ſeu}\ ddy + ydx^2 = 0,$$

ex qua non ſolum ſinus & coſinus, ſed etiam conſtantes m & n euanuerunt.

IV. Sit $y = \sin lx$; erit $A\sin y = lx$, vnde per differentiationem fit $\frac{dy}{V(1-yy)} = \frac{dx}{x}$; quae ſumtis quadratis dat $xxdy^2 = dx^2 - yydx^2$, haecque poſito dx conſtante vlterius differentiata praebet,

$$2xxdyddy + 2xdxdy^2 = -2ydx^2dy$$

ſeu $xxddy + xdxdy + ydx^2 = 0$.

V. Sit $y = ae^{mx}\sin nx$, erit differentiando

$$dy = mae^{mx}dx\sin nx + nae^{mx}dx\cos nx,$$

 quae

quae per propositam diuisa dat:

$$\frac{dy}{y} = m\,dx + \frac{n\,dx \operatorname{cos} nx}{\operatorname{sin} nx} = m\,dx + n\,dx \operatorname{cot} nx.$$

Erit ergo $\mathrm{A}\operatorname{cot}\left(\frac{dy}{ny\,dx} - \frac{m}{n}\right) = nx$. Quae aequatio posito dx constante differentiata dat:

$$n\,dx = \frac{n\,dx\,dy^2 - ny\,dx\,ddy}{m^2y^2dx^2 + n^2y^2dx^2 - 2my\,dx\,dy}$$

seu $(m^2 + n^2)y^2dx^2 - 2my\,dx\,dy = dy^2 - y\,ddy$.

Perspicuum igitur est, etiamsi in aequatione differentiali nullae quantitates transcendentes insint, eam tamen ex aequatione finita oriri potuisse, quae a quantitatibus transcendentibus vtcunque sit affecta.

296. Quoniam igitur aequationes differentiales siue primi siue altioris gradus, quae duas variabiles x & y continent, ex aequationibus finitis oriuntur; iis etiam relatio inter binas istas variabiles exprimitur. Proposita scilicet aequatione differentiali quacunque binas variabiles x & y complectente, ea significatur certa quaedam relatio inter x & y, qua y fit functio quaedam ipsius x. Hinc natura aequationis differentialis perspicitur, si loco y ea ipsius x functio assignari poterit, quae per aequationem illam indicatur; seu quae sit ita comparata, vt si ea vbique loco y, eiusque differentiale loco dy, atque eius altiora differentialia loco ddy, d^3y, &c. substituantur, aequatio resultet identica. In huius autem functionis

nis inueſtigatione verſatur calculus integralis, cuius finis eo tendit, vt propoſita aequatione differentiali quacunque, functio illa ipſius x, cui altera variabilis y eſt aequalis, definiatur; ſeu quod eodem redit, vt aequatio finita inveniatur, qua relatio inter x & y contineatur.

297. Si exempli gratia proponatur aequatio haec

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0$$

ad quam ſupra §. 288 peruenimus, eiusmodi relatio inter x & y ea definitur, quae ſimul hac aequatione finita $yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$ continetur. Cum igitur hinc ſit

$$yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}, \text{ patet } \sqrt{(ax + bbe^{\frac{x}{a}})} = y$$

eam eſſe functionem ipſius x, cui variabilis y vi propoſitae aequationis differentialis ſit aequalis. Namque ſi in aequatione loco yy, hunc valorem $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ & loco $2ydy$ eius differentiale $adx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx$ ſubſtituamus, orietur aequatio identica:

$$adx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx - adx - xdx - \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx + xdx = 0.$$

Sicque patet omnem aequationem differentialem aeque ac finitam certam relationem inter variabiles x & y exhibere, quae autem ſine ſubſidio calculi integralis reperiri nequeat.

298. Quo haec facilius intelligantur, ponamus cognitam esse eam functionem ipsius x, quae ipsi y vi cuiuscunque aequationis differentialis siue primi siue altioris gradus, conueniat; sitque

$$dy = p\,dx\,;\quad dp = q\,dx\,;\quad dq = r\,dx\,;\quad \&c.$$

atque si in aequatione differentiale dx assumtum sit constans, erit $ddy = q\,dx^2$, $d^3y = r\,dx^3$, &c. qui valores postquam in aequatione erunt substituti, ob omnes eius terminos homogeneos, differentialia dx per diuisionem euanescent, orieturque aequatio finitas tantum quantitates x, y, p, q, r, &c. complectens. Cum igitur sint p, q, r, &c. quantitates a natura functionis y pendentes, aequatio reuera tantum inter duas variabiles x & y subsistet; sicque vicissim constat, omni aequatione differentiali certam quantam relationem inter variabiles x & y determinari. Quamobrem si in solutione cuiusuis problematis ad aequationem differentialem inter x & y perveniatur, per eam aeque relatio inter x & y exprimi censenda est, ac si ad aequationem finitam esset perventum.

299. Hoc igitur modo aequatio quaeuis differentialis ita ad formam finitam reduci potest, vt in ea nonnisi quantitates finitae contineantur, differentialia autem seu infinite parua prorsus excedant. Cum enim sit y certa functio ipsius x, si ponatur

$$dy = p\,dx\,;\quad dp = q\,dx\,;\quad dq = r\,dx\,;\quad \&c.$$

quodcunque differentiale fuerit constans acceptum, differentia-

tialia ſecunda & altiora per poteſtates ipſius dx exprimentur, quae deinceps per diuiſionem penitus tollentur. Vt ſi proponeretur haec aequatio

$$xyd^3y + xxdyddy + yydxddy - xydx^3 = 0$$

in qua dx ponitur conſtans; facto

$$dy = pdx, \quad dp = qdx, \quad \& \quad dq = rdx,$$

ea abibit in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0,$$

poſtquam ſcilicet tota aequatio per dx^3 eſt diuiſa. Haecque aequatio finita relationem inter x & y determinat.

300. Omnes ergo aequationes differentiales, cuiuscunque ſint ordinis, his ſubſtitutionibus

$$dy = pdx; \quad dp = qdx; \quad dq = rdx; \quad \&c.$$

ad meras quantitates finitas reducuntur. Atque ſi aequatio differentialis fuerit primi ordinis, ita vt differentialia prima eam tantum ingrediantur, per iſtam reductionem praeter variabiles y & x inſuper quantitas p introducetur. Sin autem aequatio differentialis fuerit ſecundi ordinis, continens differentialia ſecunda, praeterea quantitas q; ac, ſi fuerit differentialis tertii ordinis, introducetur inſuper quantitas r, ſicque porro. Quoniam igitur hoc modo differentialia prorſus ex calculo exterminantur, ratio illa differentialis conſtantis penitus ceſſat; neque amplius, etiamſi inſint quantitates q, r, ex differentialibus ſecundis oriundae, opus erit indicare, an quodpiam differentiale conſtans ſit aſſumtum. Perinde enim eſt, vtrum

in euolutione aliquod differentiale pro lubitu conſtans ſtatuatur, an nullum.

301. Si igitur aequatio differentialis ſecundi vel altioris gradus proponatur, in qua nullum differentiale primum conſtans eſſe aſſumtum perhibetur, hoc modo ſtatim explorari poterit, vtrum ea determinatam relationem inter variabiles x & y contineat, nec ne? Quia enim nullum differentiale conſtans aſſumitur, in arbitrio noſtro relinquitur, quodnam differentiale conſtans ponere velimus; hincque tantum erit diſpiciendum, vtrum diverſis differentialibus conſtantibus poſitis aequatio eandem relationem inter x & y exhibeat. Quodſi non eueniat, certum eſt ſignum, aequationem nullam determinatam relationem exprimere, ideoque in ſolutione nullius problematis locum habere poſſe. Tutiſſimus autem modus ſimulque facillimus hoc explorandi erit is ipſe, quem ſupra in ſimili negotio pro expreſſionibus differentialibus altiorum ordinum, num fixos habeant ſignificatus? dignoſcendis tradidimus.

302. Propoſita ergo huiusmodi aequatione differentiali ſecundi altiorisue ordinis, in qua nullum differentiale conſtans ſit poſitum, ſtatuatur differentiale dx conſtans; deinde haec aequatio, vti ſupra de expreſſionibus differentialibus oſtendimus, iterum reducatur ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale conſtans ſupponat, ſtatuendo ſcilicet $ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$ loco ddy;

&

& $d^3y - \frac{3ddx\,ddy}{dx} + \frac{3dy\,ddx^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx}$ loco d^3y,

&c.

Quo facto dispiciatur, vtrum aequatio hoc modo resultans conueniat cum aequatione proposita; quod si eueniat, aequatio proposita determinatam relationem inter x & y complectetur; sin autem secus accidat, aequatio erit vaga, neque definitam rationem inter variabiles x & y exprimet: quemadmodum hoc iam ante fusius est demonstratum.

303. Sit, quo hoc plenius explicetur, haec aequatio proposita, quae nullo differentiali constante posito reperta esse perhibeatur.

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ponatur dx constans, atque ea transibit in hanc:

$$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ex hac nunc iterum consideratio differentialis constantis exuatur, modo ante praescripto, & obtinebitur:

$$-\frac{Qdy\,ddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

quae, quoniam a proposita tantum ratione primi termini discrepat, videndum est, vtrum sit $P = -\frac{Qdy}{dx}$. Quod si deprehendatur, aequatio proposita fixam relationem inter x & y exhibebit, quae per regulas in calculo integrali tradendas reperietur, quodcunque differentiale pri-

 mum

mum constans accipiatur. At, si fieri nequeat $P = -\frac{Qdy}{dx}$, aequatio proposita erit impossibilis.

304. Nisi igitur haec proposita aequatio:

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$$

sit absurda, necesse est vt sit $Pdx + Qdy = 0$, quod duplici modo euenire potest: vel enim actu erit

$$P = -\frac{Qdy}{dx}, \text{ seu aequatio } Pdx + Qdy = 0$$

identica; vel erit $Pdx + Qdy = 0$ ipsa illa aequatio differentialis primi gradus, ex cuius differentiatione proposita est orta: quo posteriore casu aequatio $Pdx + Qdy = 0$ congruet cum proposita, eandemque relationem inter x & y continebit, sicque sine auxilio calculi integralis haec relatio erui poterit. Cum enim sit $Pdx + Qdy = 0$, erit differentiando

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

quae ab aequatione proposita subtracta relinquet:

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy.$$

Cum autem sit $dy = -\frac{Pdx}{Q}$, differentialia prorsus extingui poterunt, nasceturque aequatio finita inter x & y earum relationem indicans.

305. Ponamus in solutione problematis nullo differentiali constante assumto peruentum esse ad hanc aequationem:

$$x^3ddx + xxyddy - yydx^2 + xxdy^2 + aadx^2 = 0.$$

Erit

Erit ergo, cum aequationem abſurdum non continere conſtet: $x^3dx + xxydy = 0$, ſeu $xdx + ydy = 0$:
cuius differentiale erit

$$x^3ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydxdy + xxdy^2 = 0$$

quae aequatio a propoſita ſubtracta relinquit:

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydxdy = 0, \text{ ſeu}$$
$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Cum autem ſit

$$xdx + ydy = 0; \text{ erit } 2xydy = -2xxdx;$$

ideoque

$$aadx - yydx - xxdx = 0 \text{ ſeu } yy + xx = aa;$$

quae aequatio veram relationem inter x & y exprimit, ſiquidem ea conſentit cum differentiali primum inuenta $xdx + ydy = 0$. Qui conſenſus, niſi ſe manifeſtaſſet, aequatio propoſita pro impoſſibili eſſet habenda; cum autem hoc caſu locum habuerit, aequationem finitam $xx + yy = aa$ ſine calculo integrali elicere licuit.

306. Vt vero etiam exemplum aequationis impoſſibilis afferamus, propoſita ſit haec aequatio:

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0,$$

in qua nullum differentiale conſtans ſit aſſumtum. Foret ergo $yydx - xxdy = 0$, ideoque differentiando

$$yyddx - xxddy + 2ydxdy + 2xdxdy = 0,$$

quae propoſitae aequalis poſita dabit:

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy.$$

 Cum

Cum vero ſit $dy = \frac{yydx}{xx}$, extinguendis differentialibus obtinebitur:

$$y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x} \quad \text{ſeu}$$

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy,$$

quae vtrum cum differentiali $yydx - xxdy = 0$ conſentiat, eam differentiando, facile patebit, fiet enim:

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

$$\text{ſeu} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{9yy - ax + 4xy - 2xx},$$

at ex illa eſt $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$, foretque ergo

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

$$\text{ſeu} \quad axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y} =$$

$$= 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3.$$

Verum ex aequatione finita primum inuenta eſt

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

quae ab iſta ſubtracta relinquit:

$$0 = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3,$$

quae reſoluitur in has:

$$0 = y - x; \quad \& \quad 2yy + yx + 2xx = 0.$$

Quarum illa $y = x$ quidem cum differentiali $dy = \frac{yydx}{xx}$ conſtare poteſt, at vero aequationi finitae primum inuen-

tae

tae aduerſatur, niſi ſtatuatur $a = 0$, vel niſi vtraque variabilis x & y conſtans ſtatuatur, quo quidem caſu ob $dx = 0$ & $dy = 0$ omnibus aequationibus differentialibus ſatisfit, aequatio propoſita ſubſiſtere nequit.

307. Conſideremus nunc etiam aequationes differentiales tres variabiles x, y, & z inuoluentes, quae erunt vel primi, vel ſecundi, vel altioris gradus. Ad quarum naturam ſcrutandam notari oportet, aequationem finitam tres variabiles complectentem determinare relationem, quam vnaquaeque ad binas reliquas teneat; definitur ergo, qualis functio ſit z ipſarum x & y. Quemadmodum igitur aequatio huiusmodi finita reſoluitur, ſi reperiatur qualis functio ipſarum x & y loco z ſubſtitui debeat, vt aequationi ſatisfiat, ita quoque aequatio differentialis tres variabiles complectens determinabit, qualis functio vna ſit reliquarum; isque huiusmodi aequationem reſoluiſſe cenſendus eſt, qui indicauerit eam binarum variabilium x & y functionem, quae loco tertiae z ſubſtituta aequationi ſatisfaciat, ſeu eam identicam reddat. Aequatio ergo differentialis reſoluitur, ſi vel functio ipſarum x & y valorem ipſius z exhibens definiatur, vel aequatio finita aſſignetur, qua idem debitus ipſius z valor exprimatur.

308. Quanquam autem omnis aequatio differentialis duas tantum variabiles complectens, ſemper determinatam relationem inter eas exprimit; tamen hoc non ſemper euenit in aequationibus differentialibus trium variabilium. Dantur enim eiusmodi aequationes, quibus pla-

plane nullo modo satisfieri poterit, quaecunque functio ipsarum x & y in locum ipsius z substituatur. Vti si proposita fuerit haec aequatio $zdy = ydx$ facile patet, nullam prorsus dari functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta reddat $zdy = ydx$, differentialia enim dx & dy nullo modo extinguentur. Simili modo apparet nullam dari functionem ipsarum x & z, quae loco y substituta eidem aequationi satisfaciat. Quaecunque enim pro y concipiatur functio ipsarum x & z, in eius differentiali dy inest dz, quod quia in aequatione non inest, destrui non poterit. Hancobrem nulla aequatio finita inter x, y, & z dari potest, quae aequationi differentiali $zdy = ydx$ conueniat.

309. Hinc aequationes differentiales tres variabiles continentes distribui oportet in imaginarias & reales. Huiusmodi autem aequatio erit imaginaria seu absurda, cui per nullam aequationem finitam satisfieri potest, cuiusmodi erat illa $zdy = ydx$, quam modo considerauimus. Aequatio autem erit realis, cui aequiualens aequatio finita exhiberi potest, quod euenit, si vna variabilis aequalis fit certae cuipiam functioni binarum reliquarum. Cuiusmodi est haec aequatio:

$$zdy + ydz = xdz + zdx + xdy + ydx$$

congruit enim haec cum ista aequatione finita:

$$yz = xz + xy \quad \text{fitque} \quad z = \frac{xy}{y - x}.$$

Istud ergo discrimen inter huiusmodi aequationes imagina-

ginarias & reales diligentissime est obseruandum; praecipue in calculo integrali, quia ridiculum foret, cuiuspiam aequationis differentialis velle integralem, hoc est aequationem finitam satisfacientem quaerere, quae plane nullam habeat.

310. Primum igitur patet, omnes aequationes differentiales trium variabilium, in quibus tantum binarum differentialia occurrant, esse imaginarias & absurdas. Ponamus enim in aequatione, quae contineat variabilem z, tantum inesse differentialia dx & dy, differentiale autem dz prorsus abesse; atque manifestum erit nullam exhiberi posse functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta aequationem identicam producat; differentialia enim dx & dy nullo modo tollentur. His ergo casibus omnino nulla datur aequatio finita satisfaciens: nisi forte eiusmodi relatio inter x & y assignari queat, quae quicquid sit z subsistere possit, vti fit in hac aequatione:

$$z\,dy - z\,dx = y\,dy - x\,dx,$$

cui satisfacit aequatio $y = x$. Facile autem inuestigatur, quibus casibus hoc eueniat, quaerendo relationem inter x & y primo si $z = 0$, & tum an ista relatio aequationi pro quocunque ipsius z valore satisfaciat.

311. Neque vero solum aequatio tres variabiles inuoluens est absurda, si duo tantum continet differentialia, sed etiam si in ea omnia tria differentialia occurrant, talis esse poterit. Quos casus vt euoluamus, ponamus

P & Q esse functiones ipsarum x & y tantum, atque haberi hanc aequationem

$$dz = P\,dx + Q\,dy,$$

quae si non est absurda, erit z functio quaepiam ipsarum x & y, cuius differentiale sit

$$dz = p\,dx + q\,dy, \text{ eritque } P = p \;\&\; Q = q.$$

At supra demonstrauimus $p\,dx + q\,dy$ non esse posse differentiale cuiusquam functionis ipsarum x & y, nisi sit $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, denotante, vti ante assumsimus $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ differentiale ipsius p posita sola y variabili, per dy diuisum, atque $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ differentiale ipsius q, posita sola x variabili, diuisum per dx. Quocirca aequatio $dz = P\,dx + Q\,dy$ realis esse nequit, nisi sit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

312. Similis omnino erit ratio huius aequationis

$$dZ = P\,dx + Q\,dy$$

si Z denotet functionem quamcunque ipsius z, P vero & Q sint functiones ipsarum x & y, tertiam variabilem z non complectentes. Vt enim Z aequalis fieri possit functioni ipsarum x & y, necesse est vt sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ex hoc ergo criterio aequatio differentialis quaeque proposita, quae quidem in hac forma generali contineatur,

diiu-

diiudicari poteſt, vtrum ſit realis an abſurda. Sic patebit hanc aequationem $z dz = y dx + x dy$ eſſe realem, nam ob

$$P = y \ \& \ Q = x, \ \text{fit} \ \left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1.$$

Haec vero aequatio $azdz = yydx + xxdy$ eſt abſurda, fit enim $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$; qui valores ſunt inaequales.

313. Vt autem criterum latiſſime patens inueſtigemus, ſint P, Q, & R functiones quaecunque ipſarum x, y, & z; atque omnis aequatio differentialis trium variabilium, ſiquidem ſit primi gradus, continebitur in hac forma: $P dx + Q dy + R dz = 0$.

Quoties ergo haec aequatio eſt realis, z aequabitur functioni cuipiam ipſarum x & y; eiusque adeo differentiale erit huius formae $dz = p dx + q dy$: Quare ſi in aequatione propoſita iſta functio ipſarum x & y loco z, & $p dx + q dy$ loco dz ſubſtituatur, neceſſe eſt, vt prodeat aequatio identica $0 = 0$. Atque cum ex aequatione propoſita fiat: $dz = -\frac{P dx}{R} - \frac{Q dy}{R}$, ſi in P, Q, & R valor ille loco z ſubſtituatur, neceſſe eſt vt fiat $p = -\frac{P}{R}$, & $q = -\frac{Q}{R}$.

314. Quoniam vero est $dz = p\,dx + q\,dy$, erit per ante demonstrata $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Cum igitur substituto loco z ipsius valore in x & y sit

$$p = -\frac{P}{R} \quad \& \quad q = -\frac{Q}{R},$$

erit
$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{R\,dP + P\,dR}{RR\,dy}\right)$$
&
$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{R\,dQ + Q\,dR}{RR\,dx}\right)$$

ideoque habebitur per RR multiplicando haec aequatio:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

vbi denominatores dy & dx iterum indicant, in differentialibus numeratorum eam solam quantitatem variabilem assumi debere, cuius differentiale denominatorem constituit. Haec autem differentialia dP, dQ, dR ante cognosci non possunt, quam in ipsis quantitatibus P, Q, & R valor debitus loco z fuerit substitutus, qui autem cum sit incognitus, sequenti modo erit procedendum.

315. Quia P, Q, & R sunt functiones ipsarum x, y, & z, ponamus

$$dP = \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz$$
$$dQ = \delta\,dx + \varepsilon\,dy + \zeta\,dz$$
$$dR = \eta\,dx + \theta\,dy + \iota\,dz$$

vbi

vbi α, β, γ, δ, ϵ, &c. denotant eas functiones, quae ex differentiatione oriuntur. Concipiamus nunc loco z vbique eius valorem in x & y expressum substitui, & loco dz, ponamus valorem $pdx + qdy$; fietque

$$dP = (\alpha + \gamma p)dx + (\beta + \gamma q)dy$$
$$dQ = (\delta + \zeta p)dx + (\epsilon + \zeta q)dy$$
$$dR = (\eta + \iota p)dx + (\theta + \iota q)dy.$$

Ex his ergo valoribus erit:

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \theta + \iota q \; ; \; \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p$$
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta + \gamma q \; ; \; \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p.$$

316. Cum igitur ad realitatem aequationis requiratur, vt sit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

fiet si inuenti valores substituantur:

$$P(\theta + \iota q) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p).$$

At ante inuenimus esse $p = -\frac{P}{R}$ & $q = -\frac{Q}{R}$ qui valores, cum differentialia non amplius in computum veniant, adhiberi poterunt, etiamsi loco z eius valor in x & y non substituatur. Eritque ergo

$$P\theta - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

seu $0 = P(\zeta - \theta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta).$

 Quia

Quia autem quantitates ϵ, δ, γ, η, ζ, θ, per differentiationem inueniuntur, erit superiori notandi modo adhibito:

$$0 = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Quae proprietas, nisi in aequatione locum habeat, aequatio non erit realis, sed imaginaria & absurda.

317. Quanquam hanc regulam ex consideratione variabilis z elicuimus, tamen quia omnes quantitates aeque ingrediuntur, manifestum est, & reliquarum consideratione, eandem expressionem prodituram fuisse. Proposita ergo aequatione differentiali primi gradus, quae tres variabiles inuoluat, quacunque, statim diiudicari poterit vtrum sit realis an imaginaria. Comparetur enim cum hac forma generali:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

atque quaeratur valor huius formulae:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

qui si fuerit $= 0$, aequatio erit realis, sin autem non fuerit $= 0$, certum hoc est signum, aequationem esse imaginariam seu absurdam.

318. Aequatio proposita per diuisionem quoque semper ad huiusmodi formam reduci potest:

$$P\,dx + Q\,dy + dz = 0,$$

in

in quam, cum prior abeat si fiat $R = 1$, criterium simplicius exprimetur, hoc modo:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Quoties enim haec expressio reuera nihilo aequalis reperitur, toties aequatio proposita erit realis; sin autem contrarium eueniat, aequatio erit imaginaria. Posterius quidem ex iis, quae demonstrauimus, est certum; de priori autem adhuc dubitari possit, vtrum aequatio semper sit realis, quoties quidem hoc criterium id indicat. Quod cum hoc loco plenissime demonstrari nequeat, sed in calculo demum integrali demonstratione confirmari possit, hic tantum id affirmamus; neque autem periculum inde est metuendum, si quis tantisper de eius veritate dubitare voluerit.

319. Ex hoc ergo criterio primum patet, si in aequatione $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, fuerit P functio ipsius x, Q functio ipsius y, & R functio ipsius z tantum, aequationem semper fore realem. Fit enim

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0\;;\; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0\;;\; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0\;;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0\;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0\;\&\; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0\;;$$

ideoque tota expressio criterii sponte euanescet.

320. Si fuerit vt ante P ipſius x, & Q ipſius y functio tantum, R autem functio quaecunque ipſarum x, y & z, aequatio erit realis ſi fuerit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ ſeu } \left(\frac{dR}{dx}\right) : \left(\frac{dR}{dy}\right) = P : Q$$

Sic ſi propoſita fuerit haec aequatio:

$$\frac{2\,dx}{x} + \frac{3\,dy}{y} + \frac{x^2 y^3\,dz}{z^6} = 0.$$

Quia hic eſt $P = \frac{2}{x}$; $Q = \frac{3}{y}$, & $R = \frac{x^2 y^3}{z^6}$

hinc $\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{2xy^3}{z^6}$; atque $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{3xxyy}{z^6}$;

erit $P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{6xyy}{z^6}$; ideoque aequatio propoſita erit realis.

321. Si fuerint P & Q functiones ipſarum x & y, at R functio ipſius z tantum, ob

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0\,;\ \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0\,;\ \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0\ \&\ \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0,$$

aequatio erit realis ſi fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Haec eadem vero conditio requiritur, ſi $P\,dx + Q\,dy$ debeat eſſe differentiale determinatum, ſeu ex differentiatione cuiuſpiam functionis finitae ipſarum x & y ortum. Hucque redit quod ſupra §. 312 iam obſeruauimus, aequatio-

tionem $dZ = Pdx + Qdy$, si Z sit functio ipsius z tantum at P & Q functiones ipsarum x & y, realem esse non posse, nisi sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ambo autem isti casus inter se prorsus conueniunt: nam loco Rdz, si R est functio ipsius z tantum, poni potest dZ existente Z functione ipsius z.

322. Vt hoc criterium inuentum exemplo illustremus, consideremus hanc aequationem:

$$(6xy^2z - 5yz^3)\,dx + (5x^2yz - 4xz^3)\,dy$$
$$+ (4x^2y^2 - 6xyz^2)\,dz = 0,$$

qua cum forma generali comparata fit:

$$P = 6xy^2z - 5yz^3\;;\quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 12xyz - 5z^3\;;$$
$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 6xy^2 - 15yz^2$$
$$Q = 5x^2yz - 4xz^3\;;\quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 10xyz - 4z^3\;;$$
$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xzz$$
$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2\;;\quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2\;;$$
$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = 8x^2y - 6xz^2.$$

His inuentis valoribus aequatio iudicium continens erit haec:

$$+ (6xy^4z - 5yz^3)(-3xxy - 6xzz)$$
$$+ (5x^2yz - 4xz^3)(2xyy + 9yzz)$$
$$+ (4x^2y^2 - 6xyz^2)(2xyz - z^3) = 0.$$

Haec autem expreſſio ſi euoluatur, omnes termini actu ſe mutuo deſtruunt, fitque $0 = 0$, quod indicat aequationem propoſitam eſſe realem.

323. Quando autem expreſſio hoc modo ex criterio eruta non euaneſcit, tum id ſignum eſt aequationem propoſitam eſſe imaginariam. Quoniam vero hoc pacto ex criterio aequatio finita inuenitur, ea, ſi quidem aequationi differentiali conueniat, ſimul relationem indicabit, quam variabiles inter ſe tenent. Atque hoc modo ii caſus, quorum ſupra meminimus (310), euoluuntur. Sit enim propoſita iſta aequatio:

$$(z - x)\,dx + (y - z)\,dy = 0,$$

fiet $P = z - x$; $Q = y - z$; & $R = 0$,

porro $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$, & $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1$.

Aequatio iudicium exhibens fit $P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$

ſeu $z - x = z - y$; vnde fit $y = x$.

Quoniam igitur hic caſu euenit, vt aequatio $y = x$ ſimul aequationi differentiali ſatisfaciat, dicendum eſt propoſitam aequationem nil aliud ſignificare, niſi eſſe $y = x$.

324.

324. Propoſita ergo aequatione differentiali tres variabiles continente :

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

tres conſiderandi erunt caſus ſequentes, ad quos haec aequatio deducit :

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Primus eſt ſi haec expreſſio reuera ſit $= 0$, tumque aequatio propoſita erit realis. Sin autem haec aequatio finita non ſit identica, tum diſpiciendum eſt, vtrum ea aequationi propoſitae ſatisfaciat: quodſi euenit, habebitur aequatio finita, qui eſt caſus ſecundus. Tertius autem caſus locum habet, ſi aequatio finita cum propoſita differentiali ſubſiſtere nequeat, atque tum aequatio propoſita erit imaginaria: neque enim vlla aequatio finita exhiberi poterit, quae ipſi ſatisfaciat.

325. Caſus primus ac tertius per ſe ſunt perſpicui, ſecundus autem, etſi rariſſime occurrit, probe tamen notari meretur: & cum eius exemplum iam ſupra in aequatione, quae duo tantum continet differentialia, exhibuerimus, etiam aequationem afferamus, in qua omnia tria differentialia inſint :

$$(z - y)\,dx + x\,dy + (y - z)\,dz = 0.$$

 Erit

Erit ergo:

$$P = z - y \;;\; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 1$$

$$Q = x \;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$$

$$R = y - z \;;\; \left(\frac{dP}{dy}\right) = -1 \;;\; \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1$$

vnde aequatio finita criterium continens euadet:

$$z - x - y = 0, \text{ seu } z = x + y$$

ſubſtituatur hic valor pro z in aequatione differentiali fietque $x\,dx + x\,dy - x(dx + dy) = 0$; quae aequatio, cum ſit identica, ſequitur aequationem differentialem nil aliud ſignificare, niſi $z = x + y$.

326. Quoniam diximus omnes aequationes differentiales primi ordinis, in quibus tres variabiles inſunt contineri in hac forma:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

dubium hic naſci poterit circa eas aequationes, in quibus differentialia prima duas pluresue dimenſiones conſtituunt, cuiusmodi eſt haec:

$$P\,dx^2 + Q\,dy^2 + R\,dz^2 = 2S\,dx\,dy + 2T\,dx\,dz + V\,dx\,dz.$$

Ve-

Verum de huiusmodi aequationibus notandum eſt, eas nullo modo reales eſſe poſſe, niſi habeant diuiſores prioris formae, qui propterea aequationes ſimplices conſtituent. Cum enim ex hac aequatione fiat:

$$dz = \frac{-Tdx-Vdy \pm \sqrt{(dx^2(T^2-PR)+2dxdy(TV+RS)+dy^2(V^2-QR))}}{R}$$

facile patet z functioni cuipiam ipſarum x & y, ſeu dz huiusmodi expreſſioni $p\,dx + q\,dy$ aequale fieri non poſſe, niſi quantitas irrationalis euadat rationalis, quod eueniet ſi fuerit:

$$(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$$

ſeu

$$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}.$$

Niſi ergo haec aequatio finita ipſa aequationi propoſitae ſatisfaciat, haec erit imaginaria.

327. Supereſſet vt in hoc Capite quoque aequationes differentiales altiorum ordinum, quae tres variabiles complectuntur, perpenderemus, caſusque definiremus, quibus eae vel reales vel imaginariae euadunt; verum quia criteria nimis fierent intricata, hunc laborem hic praetermittimus, praeſertim, cum ex iisdem fonti-

 bus,

bus, quos hic aperuimus, sequantur. Ceterum si in calculo integrali his criteriis erit opus, tum ea facile erui poterunt. Ob eandem causam hic quoque aequationes, quae plures variabiles complectuntur, non contemplamur, cum fere nunquam occurrant, atque, si vnquam occurrerent, ex principiis hic traditis sine negotio examinari possent. Quare his expositis Institutioni Calculi Differentialis hic finem imponimus progressuri ad insignes vsus ostendendos, quos iste calculus cum in ipsa Analysi, tum in Geometria sublimiori affert.



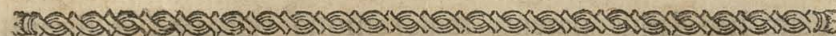
INSTI-

INSTITUTIONUM CALCULI DIFFERENTIALIS

PARS POSTERIOR

CONTINENS

VSUM HUIUS CALCULI IN ANALYSI FINITORUM, NEC NON IN DOCTRINA SERIERUM.



CAPUT I.

DE TRANSFORMATIONE SERIERUM.

1.



Cum nobis propositum sit vsum Calculi differentialis tam in vniuersa Analysi, quam in doctrina de seriebus ostendere; nonnulla subsidia ex Algebra communi, quae vulgo tractari non solent, hic erunt repetenda. Quae quamuis maximam partem iam in Introductione sumus complexi, tamen quaedam ibi sunt praetermissa, vel studio quod expediat ea tum demum explicari, quando necessitas id exigat, vel quia cuncta, quibus opus sit futurum, praeuideri non poterant. Huc pertinet transformatio serierum, cui hoc Caput destinauimus, qua quaeuis series in innumerabiles alias series transmutatur, quae omnes eandem habeant summam communem; ita vt, si seriei propositae summa sit cognita, reliquae series omnes simul summari queant. Hoc autem capite praemisso, eo vberius doctrinam serierum per calculum differentialem & integralem amplificare poterimus.

2. Considerabimus autem potissimum eiusmodi series, quarum singuli termini per potestates successiuas quantitatis cuiusdam indeterminatae sunt multiplicati: quoniam

niam hae latius patent, maioremque vtilitatem afferent.

Sit igitur propofita fequens feries generalis, cuius fummam, fiue fit cognita fiue fecus, ponamus $=S$, fitque

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

Ponatur iam $x = \frac{y}{1+y}$, & cum fit per feries infinitas

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \&c.$$
$$x^2 = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + 6y^6 - 7y^7 + \&c.$$
$$x^3 = y^3 - 3y^4 + 6y^5 - 10y^6 + 15y^7 - 21y^8 + \&c.$$
$$x^4 = y^4 - 4y^5 + 10y^6 - 20y^7 + 35y^8 - 56y^9 + \&c.$$
$$\&c.$$

hi valores fubftituti, ferieque fecundum poteftates ipfius y difpofita, dabunt

$$\begin{array}{lllll} S = ay & - ay^2 & + ay^3 & - ay^4 & + ay^5 \ \&c. \\ & + b & - 2b & + 3b & - 4b \\ & & + c & - 3c & + 6c \\ & & & + d & - 4d \\ & & & & + e. \end{array}$$

3. Quoniam pofuimus $x = \frac{y}{1+y}$; erit $y = \frac{x}{1-x}$; quo valore loco y fubftituto, feries propofita

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

transmutabitur in hanc:

$$S = a.\frac{x}{1-x} + (b-a)\frac{x^2}{(1-x)^2} + (c-2b+a)\frac{x^3}{(1-x)^3} + \&c.$$

in

in qua coefficiens secundi termini $b - a$ est differentia prima ipsius a ex serie $a, b, c, d, e,$ &c. quam supra per Δa exposuimus; coefficiens tertii termini $c - 2b + a$ est differentia secunda $\Delta^2 a$; coefficiens quarti est differentia tertia $\Delta^3 a$, &c. Hinc differentiis ipsius a continuis, quae formantur ex serie $a, b, c, d, e,$ &c. adhibendis proposita Series transmutabitur in hanc

$$S = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \frac{x^4}{(1-x)^4}\Delta^3 a + \text{\&c.}$$

cuius ergo seriei summa habebitur, si propositae summa fuerit cognita.

4. Si igitur series $a, b, c, d,$ &c. ita fuerit comparata, vt tandem differentias habeat constantes, quod euenit, si eius terminus generalis fuerit functio rationalis integra, tum series posterior $\frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \text{\&c.}$ tandem habebit terminos euanescentes, sicque eius summa per expressionem finitam exhiberi poterit. Ita si seriei $a, b, c, d,$ &c. differentiae primae iam fuerint constantes, tum seriei huius:

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{\&c.}$$

summa erit $= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a$. At si illius seriei coefficientium differentiae secundae fiant constantes, tum ipsius seriei propositae erit

$$= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta\Delta a.$$

 Vnde

Vnde summae huiusmodi serierum ex differentiis coefficientium facile inuenientur.

I. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \&c.$$

Diff. I. 2, 2, 2, 2, &c.

Cum ergo differentiae primae sint constantes, ob $a = 1$ & $\Delta a = 2$, erit seriei propositae summa

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{2xx}{(1-x)^2} = \frac{x+xx}{(1-x)^2}.$$

II. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$1x + 4xx + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \&c.$$

Diff. I. 3, 5, 7, 9, &c.

Diff. II. 2, 2, 2, &c.

Quia itaque est

$$a = 1;\ \Delta a = 3;\ \Delta^2 a = 2;$$

erit seriei propositae summa

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{3xx}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x+xx}{(1-x)^3}.$$

III. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$S = 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + 259x^6 + \&c.$$

Diff. I. 11, 25, 45, 71, 103

Diff. II. 14, 20, 26, 32

Diff. III. 6, 6, 6,

Quia

Quia est

$$a = 4;\quad \Delta a = 11;\quad \Delta^2 a = 14;\quad \Delta^3 a = 6;$$

erit summa

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11xx}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4},$$

siue

$$S = \frac{4x - xx + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1+xx)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

5. Quanquam hoc modo istarum serierum in infinitum progredientium summae inueniuntur; tamen ex iisdem principiis hae Series quoque ad datum quemuis terminum summari possunt. Proposita enim sit haec series

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots\ldots + ox^n,$$

& quaeratur eius summa, si in infinitum progrediatur, quae erit $= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a +$ &c.
Nunc considerentur eiusdem seriei termini post vltimum ox^n sequentes, qui sint

$$px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \text{\&c.}$$

cuius seriei, si per x^n diuidatur, summa, vt ante inueniri poterit; quae rursus per x^n multiplicata erit

$$\frac{x^{n+1}}{1-x}p + \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2}\Delta p + \frac{x^{n+3}}{(1-x)^3}\Delta^2 p + \text{\&c.}$$

quae summa si a totius seriei in infinitum continuatae sum-

summa subtrahatur, remanebit summa portionis propositae quaesita: $S =$

$$\frac{x}{1-x}(a-x^n p)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(\Delta a-x^n\Delta p)+\frac{x^3}{(1-x)^3}(\Delta^2 a-x^n\Delta^2 p)$$
&c.

I. *Quaeratur summa huius seriei finitae.*

$$S = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots\ldots + nx^n.$$

Tam horum coefficientium, quam terminum vltimum sequentium quaerantur differentiae:

1, 2, 3, 4, &c.	$n+1$, $n+2$, $n+3$, &c.
1, 1, 1	1, 1;

eritque

$$a = 1,\quad \Delta a = 1,\quad p = n+1,\quad \Delta p = 1,$$

unde summa quaesita est:

$$S = \frac{x}{1-x}(1-(n+1)x^n)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(1-x^n),$$

seu

$$S = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

II. *Quaeratur summa huius seriei finitae.*

$$S = 1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots\ldots + n^2x^n.$$

Inuestigentur primum differentiae hoc modo:

1, 4, 9, 16, &c.	$(n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2$, &c.
3, 5, 7	$2n+3$, $2n+5$
2, 2,	2

qui-

quibus inuentis erit ſumma quaeſita $S =$

$$\frac{x}{1-x}(1-(n+1)^2x^n)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(3-(2n+3)x^n)+\frac{x^3}{(1-x)^3}(2-2x^n),$$

ſeu $S =$

$$\frac{x+xx-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

6. Quodſi autem ſeries propoſita non eiusmodi habeat coefficientes, qui tandem ad differentias conſtantes deducantur, tum transmutatio hic exhibita nihil confert ad eius ſummam determinandam. Neque vero etiam eius ope ſumma proxime definiri poterit commodius, quam per ipſam ſeriei propoſitae additionem fieri licet. Si enim in ſerie $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 +$ &c. fuerit $x < 1$ quo ſolo caſu ſummatio proprie ſic dicta locum habere poteſt, erit $\frac{x}{1-x} > x$, ideoque non ſeries minus convergit quam propoſita. Sin autem in ſerie propoſita fuerit $x = 1$ tum nouae ſeriei omnes plane termini fiunt infiniti, quo ergo caſu iſta transmutatio nullius prorſus erit vſus.

7. Conſideremus autem ſeriem, in qua ſigna $+$ & $-$ alternatim ſe excipiant, quae ex praecedente deducetur ponendo x negatiuum. Si itaque fuerit

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{\&c.}$$

cuius ſeriei negatiua oritur, ſi in praecedente ſtatuatur

tur x negatiuum. Sumantur ergo vt ante differentiae Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, &c. ex ferie coefficientium a, b, c, d, e, &c. fignis ad folas ipfius x poteftates relatis, atque feries propofita transformabitur in hanc: S $=$

$$\frac{x}{1+x}a - \frac{x^2}{(1+x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3}\Delta^2 a - \frac{x^4}{(1+x)^4}\Delta^3 a + \&c.$$

vnde perfpicitur aequationem propofitam iisdem cafibus fummari poffe quibus praecedens. Scilicet fi feries a, b, c, d, &c. tandem ad differentias conftantes deducatur.

8. Hoc autem cafu ifta transformatio commodam praebet approximationem ad valorem feriei propofitae:

$$ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - fx^6 + \&c.$$

quantuscunque enim x fuerit numerus, fractio $\frac{x}{1+x}$, fecundum cuius poteftates altera feries progreditur, fit vnitate minor: atque fi fit $x = 1$, erit $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$. Sin autem fit $x < 1$ puta $x = \frac{1}{n}$ fiet $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, ideoque feries per transformationem inuenta femper magis conuergit quam propofita. Confideremus imprimis cafum, quo $x = 1$, qui ad feries fummandas ingens affert fubfidium, fitque

$$S = a - b + c - d + e - f + \&c.$$

ac denotentur differentiae primae, fecundae & fequentes ipfius a, quas progreffio a, b, c, d, e, &c. praebet per

per Δ, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, &c. quibus inuentis erit

$$S = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{4} \Delta a + \tfrac{1}{8} \Delta^2 a - \tfrac{1}{16} \Delta^3 a + \&c.$$

quae nisi actu terminatur, summam vero proximam satis commode exhibet.

9. Vsum igitur huius vltimae transmutationis, qua sumsimus $x = 1$, in aliquot exemplis ostendamus, ac primo quidem in eiusmodi, quibus vera summa finite exprimi potest. Tales sunt series diuergentes, quibus numeri a, b, c, d, &c. tandem ad differentias constantes deducant, quarum summae, cum recepto huius vocis significatu, proprie non exhiberi queant, vocem summae hic eo sensu, quem supra tribuimus, accipimus, ita vt denotet valorem expressionis finitae, ex cuius euolutione proposita series nascatur.

I. *Sit igitur proposita haec series Leibnitzii:*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$$

in qua cum omnes termini sint aequales, fient omnes differentiae $= 0$, ideoque ob $a = 1$, erit $S = \tfrac{1}{2}$.

II. *Sit proposita ista series:*

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c.$$

Diff. 1 $=$ 1, 1, 1, 1, 1, &c,

Cum ergo sit $a = 1$, $\Delta a = 1$, erit $S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$.

III. *Sit proposita haec series:*

$$S = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \&c.$$

Diff. 1 $=$ 2, 2, 2, 2, &c.

Ob $a = 1$ & $\Delta a = 2$ fit $S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{4} = 0$.

IV. *Sit propoſita haec ſeries trigonalium numerorum.*

$$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \&c.$$

Diff. 1 = 2, 3, 4, 5, 6, &c.

Diff. 2 = 1, 1, 1, 1, &c.

Hic ergo ob $a = 1$, $\Delta a = 2$, & $\Delta\Delta a = 1$; erit

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}.$$

V. *Sit propoſita ſeries quadratorum:*

$$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \&c.$$

Diff. 1 = 3, 5, 7, 9, 11, &c.

Diff. 2 = 2, 2, 2, 2, &c.

Ob $a = 1$; $\Delta a = 3$; $\Delta\Delta a = 2$; erit $S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{8} = 0.$

VI. *Sit propoſita ſeries biquadratorum:*

$$S = 1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \&c.$$

Diff. 1 = 15, 65, 175, 369, 671

Diff. 2 = 50, 110, 194, 302

Diff. 3 = 60, 84, 108

Diff. 4 = 24, 24

Erit ergo $S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{15}{4} + \tfrac{50}{8} - \tfrac{60}{16} + \tfrac{24}{32} = 0.$

10. Si ſeries magis diuergant vti geometriae aliaeque ſimiles, eae hoc modo ſtatim in ſeriem magis convergentem transmutantur, quae niſi adhuc ſatis conuergat, eodem modo in aliam magis conuergentem convertetur.

I. *Sit*

I. *Sit propoſita haec ſeries geometrica:*

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \&c.$$

Diff. 1 = 1, 2, 4, 8, 16, &c.
Diff. 2 = 1, 2, 4, 8, &c.
Diff. 3 = 1, 2, 4, &c.

Cum igitur in omnibus differentiis primus terminus ſit $= 1$. Summa ſeriei exprimetur hoc modo

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \&c.$$

cuius ſumma eſt $= \frac{1}{3}$, oritur enim ex euolutione fractionis $\frac{1}{2+1}$, dum propoſita oritur ex $\frac{1}{1+2}$.

II. *Sit propoſita haec ſeries recurrens:*

$$S = 1 - 2 + 5 - 12 + 29 - 70 + 169 - \&c.$$

Diff. 1 = 1, 3, 7, 17, 41, 99 &c.
Diff. 2 = 2, 4, 10, 24, 58 &c.
Diff. 3 = 2, 6, 14, 34 &c.
Diff. 4 = 4, 8, 20 &c.
Diff. 5 = 4, 12 &c.
Diff. 6 = 8 &c.
&c.

Continuarum ergo differentiarum termini primi conſtituunt hanc progreſſionem geometricam geminatam:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, &c.

vnde erit

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{8} - \tfrac{2}{16} + \tfrac{4}{32} - \tfrac{4}{64} + \tfrac{8}{128}\ \&c.$$

 cum

cum igitur praeter primum terminum reliqui bini ſe continuo deſtruant, erit $S = \frac{1}{2}$. Oritur autem ſeries propoſita ex euolutione fractionis $\frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2}$, vti in expreſſione naturae ſerierum recurrentium oſtendimus.

III. *Sit propoſita ſeries hypergeometrica:*

$$S = 1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + 5040 - \&c.$$

cuius differentias continuas hoc modo commodius inueſtigabimus:

	Diff. 1.	Diff. 2.	Diff. 3.	
1	1	3	11	
2	4	14	64	
6	18	78	426	
24	96	504	3216	&c.
120	600	3720	27240	
720	4320	30960	256320	
5040	35280	287280	2656080	
40320	322560	2943360		
362880	3265920			
3628800				

Quibus differentiis vlterius continuatis erit:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \frac{16687}{256} + \frac{148329}{512} - \frac{1468457}{1024} + \frac{16019531}{2048} - \frac{190899411}{4096} + \&c.$$

Col-

Colligantur duo termini initiales, eritque $S = \frac{1}{4} + A$ existente

$$A = \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \&c.$$

Si nunc eodem modo differentiae capiantur, erit

$$A = \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^6} + \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \frac{615}{2^{12}} - \frac{4401}{2^{14}} + \frac{36585}{2^{16}}$$
$$- \frac{342207}{2^{18}} + \frac{3565323}{2^{20}} - \frac{40866525}{2^{22}} + \&c.$$

Colligantur duo termini initiales, quia conuergunt, fietque

$$A = \frac{7}{2^6} + B \quad \text{existente} \quad B = \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \&c.$$

cuius seriei differentiis denuo sumendis fiet:

$$B = \frac{21}{29} - \frac{15}{2^{12}} + \frac{159}{2^{15}} - \frac{429}{2^{18}} + \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}}$$
$$+ \frac{338835}{2^{27}} - \frac{2771097}{2^{30}} + \&c.$$

Colligantur quatuor termini initiales in vnum & statuatur $B = \frac{153}{2^{12}} + \frac{843}{2^{18}} + C$ existente $C = \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} + \&c.$ fietque aliquot terminis actu colligendis proxime: $C = \frac{15645}{2^{24}} - \frac{60417}{2^{30}}$. Ex his ergo tandem concludetur summa seriei propositae: $S = 0,40082038$, quae tamen vix vltra tres quatuorue figuras pro accurata haberi

beri poteſt ob nimiam ſeriei diuergentiam; eſt tamen certe iuſto minor. Aliunde enim inueni hanc ſummam eſſe $= 0,4036524077$, vbi ne vltima quidem nota a vero aberrat.

11. Imprimis autem haec transmutatio ingentem affert vtilitatem ad ſeries iam quidem, ſed lente conuergentes in alias, quae multo promtius conuergant, transmutandas. Quoniam vero termini ſequentes minores ſunt quam praecedentes, differentiae primae fiunt negatiuae; vnde in ſequentibus ſignorum ratio probe eſt habenda.

I. *Sit propoſita haec ſeries:*

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

$$\text{Diff. } 1 = -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2.3};\ -\frac{1}{3.4};\ -\frac{1}{4.5};\ -\frac{1}{5.6}$$

$$\text{Diff. } 2 = +\frac{1}{3};\ \frac{2}{2.3.4};\ \frac{2}{3.4.5};\ \frac{2}{4.5.6}$$

$$\text{Diff. } 3 = -\frac{1}{4};\ -\frac{2.3}{2.3.4.5};\ -\frac{2.3}{3.4.5.6}$$

$$\text{Diff. } 4 = +\frac{1}{5};\ \&c.$$

Hinc ergo erit

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \&c.$$

vtramque autem hanc ſeriem logarithmum hyperbolicum binarii exhibere, iam in Introductione oſtendimus.

II. *Sit*

II. *Sit proposita ista series pro circulo:*

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. } 1 = -\frac{2}{1.3};\ -\frac{2}{3.5};\ -\frac{2}{5.7};\ -\frac{2}{7.9};\ -\frac{2}{9.11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. } 2 = +\frac{2.4}{1.3.5};\ \frac{2.4}{3.5.7};\ \frac{2.4}{5.7.9};\ \frac{2.4}{7.9.11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. } 3 = -\frac{2.4.6}{1.3.5.7};\ -\frac{2.4.6}{3.5.7.9};\ - \text{ \&c.}$$

&c.

Hinc ergo concluditur fore summam seriei:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1.2}{3.5.2} + \frac{1.2.3}{3.5.7.2} + \text{ \&c.}$$

seu

$$2S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \text{ \&c.}$$

III. *Quaeratur valor huius seriei infinitae:*

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + l6 - l7 + l8 - l9 \text{ \&c.}$$

Quia differentiae ab initio nimis fiunt inaequales, colligantur actu termini vsque ad $l10$ ex tabulis, quorum valor reperietur $= -0{,}3911005$; eritque

$$S = -0{,}3911005 + l10 - l11 + l12 - l13 + l14 - l15 + \text{ \&c.}$$

in infinitum.

De

Desumantur hi logarithmi ex tabulis, eorumque differentiae quaerantur hoc modo

	Diff. 1.	Diff. 2.	Diff. 3.	Diff. 4.	Diff. 5.
	+	—	+	—	+
$l10 = 1,0000000$					
$l11 = 1,0413927$	413927	36042			
$l12 = 1,0791812$	377885	30263	5779	1292	
$l13 = 1,1139434$	347622	25776	4487	924	368
$l14 = 1,1461280$	321846	22213	3563		
$l15 = 1,1760913$	299633				

Ex quibus reperitur

$$l10 - l11 + l12 - l13 + \&c. =$$

$$\frac{1,0000000}{2} - \frac{413927}{4} - \frac{36042}{8} - \frac{5779}{16} - \frac{1292}{32} - \frac{368}{64}$$

$$= 0,4891606.$$

Hinc valor seriei propositae erit

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + \&c. = 0,0980601;$$

cui logarithmo respondet numerus $1,253315$.

12. Quemadmodum has transmutationes obtinuimus ponendo in serie loco x hanc fractionem $\frac{y}{1 \pm y}$, ita innumerabiles aliae transmutationes orientur, si loco x aliae functiones ipsius y substituantur. Sit iterum proposita ista series:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \&c.$$

atque ponatur $x = y(1-y)$, quo facto series orietur sequens

S =

$$\begin{aligned}S = ay &- ayy \\ &+ byy - 2by^3 + by^4 \\ &\qquad + cy^3 - 3cy^4 + 3cy^5 - cy^6 \\ &\qquad\qquad + dy^4 - 4dy^5 + 6dy^6 \\ &\qquad\qquad\qquad + ey^5 - 5ey^6 \quad \&c. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + fy^6\end{aligned}$$

Quodſi ergo altera harum ſerierum fuerit ſummabilis, ſimul alterius ſumma erit cognita. Ita ſi ſtatuatur

$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c. = \frac{x}{1-x}$, erit

$S = y - y^3 - y^4 + y^6 + y^7 - y^9 - y^{10} + \&c.$

Cuius ergo ſeriei ſumma erit $= \frac{y - yy}{1 - y + yy}$.

13. Si altera ſeries alicubi abrumpatur, tum ſumma prioris abſolute exhiberi poterit. Ponamus eſſe $a = 1$, & in ſerie inuenta omnes terminos poſt primum euaneſcere, vt ſit $S = y$; ideoque ob $x = y - yy$, erit ſumma prioris $= \frac{1}{2} - V(\frac{1}{4} - x)$.

Fiet autem ob $a = 1$; vt ſequitur:

$$b = 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2$$

$$c = 2 = \frac{1.3}{4.6} \cdot 2^4$$

$$d = 5 = \frac{1.3.5}{4.6.8} \cdot 2^6$$

$$e = 14 = \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10} \, 2^8$$

$$f = 42 = \frac{1.3.5.7.9}{4.6.8.10.12} \, 2^{10}$$

$$g = 132 = \frac{1.3.5.7.9.11}{4.6.8.10.12.14} \, 2^{12} \quad \&c.$$

 vnde

vnde prior series abibit in hanc: $S =$ $\frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)} = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + 132x^7 + \&c.$ quae eadem inuenitur, si quantitas surda $\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ in seriem euoluatur, atque ab $\frac{1}{2}$ subtrahatur.

14. Statuamus, quo transmutatio latius pateat $x = y(1 + ny)^{\nu}$, atque series proposita:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

transmutabitur in sequentem: $S = ay + \frac{\nu}{1} nay^2$

$$\begin{array}{llll}
 & + by^2 & & \\
+ \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} n^2 ay^3 & + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} n^3 ay^4 & + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4} n^4 ay^5 & \\
+ \frac{2\nu}{1} nby^3 & + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1.2} n^2 by^4 & + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)}{1.2.3} n^3 by^5 & \\
+ cy^3 & + \frac{3\nu}{1} ncy^4 & + \frac{3\nu(3\nu-1)}{1.2} n^2 cy^5 & \\
 & + dy^4 & + \frac{4\nu}{1} ndy^5 & \\
 & & + ey^5 & \\
 & \&c. & &
\end{array}$$

Si ergo illius seriei summa fuerit cognita, & huius simul summa habebitur, ac vicissim. Quoniam vero n & ν pro lubitu accipi possunt, hinc ex vna serie summabili innumerae aliae summabiles inueniri possunt.

15. Possunt etiam eiusmodi transmutationes fieri, vt seriei inuentae summa fiat irrationalis, hoc modo.

Sit

Sit propoſita iſta ſeries:

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + fx^{11} + \&c.$$

erit

$$Sx = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ex^{10} + fx^{12} + \&c.$$

Iam ſtatuatur

$$x = \frac{y}{\sqrt{(1 - nyy)}}; \text{ erit } xx = \frac{y}{1 - nyy},$$

atque ſeries propoſita transmutabitur in hanc:

$$\frac{Sy}{\sqrt{(1 - nyy)}} =$$

$$\begin{array}{l} ay^2 + nay^4 + n^2ay^6 + n^3ay^8 + n^4ay^{10} + \&c. \\ \quad + by^4 + 2nby^6 + 3n^2by^8 + 4n^3by^{10} + \&c. \\ \qquad + cy^6 + 3ncy^8 + 6n^2cy^{10} + \&c. \\ \qquad\quad + dy^8 + 4ndy^{10} + \&c. \\ \qquad\qquad + ey^{10} + \&c. \end{array}$$

Si igitur ſumma S ex priori ſerie fuerit cognita, habebitur ſimul ſumma ſequentis ſeriei:

$$\frac{S}{\sqrt{(1 - nyy)}} =$$

$$ay + (na + b)y^3 + (n^2a + 2nb + c)y^5 + (n^3a + 3n^2b + 3nc + d)y^7 + \&c.$$

16. Si ſumatur $n = -1$; erunt coefficientes huius ſeriei differentiae continuae ipſius a, ex ſerie a, b, c, d, &c. ſin autem ſigna in ſerie propoſita alternentur, tum poſito $n = 1$, coefficientes erunt iſtae differentiae. Denotent ergo Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, $\Delta^4 a$, &c.

 diffe-

differentias primas, ſecundas, tertias, &c. ipſius a ex ſerie numerorum $a, b, c, d, e, f,$ &c.

Ac ſi fuerit:

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + \&c.$$

poſito $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$; erit

$$\frac{S}{\sqrt{(1+yy)}} = ay + \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 + \Delta^3 a.y^7 + \&c.$$

Sin autem fuerit:

$$S = ax - bx^3 + cx^5 - dx^7 + ex^9 - \&c.$$

ponaturque $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$; erit

$$\frac{S}{\sqrt{(1-yy)}} = ay - \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 - \Delta^3 a.y^7 + \&c.$$

Quodſi ergo ſeries $a, b, c, d, e,$ &c. tandem ad differentias conſtantes deducat, tum vtraque ſeries abſolute ſummari poterit; quae ſummatio autem quoque ex ſuperioribus ſequitur.

17. Ponamus coefficientes $a, b, c, d,$ &c. conſtituere hanc ſeriem $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9},$ &c. eritque, vti ſupra iam vidimus:

$$a = 1$$

$$\Delta a = -\frac{2}{3}$$

$$\Delta^3 a = \frac{2.4}{3.5}$$

$$\Delta^3 a = -\frac{2.4.6}{3.5.7} \quad \&c.$$

vnde

vnde sequentes duas series summabimus:

I. Sit $S = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.$

Erit $S = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$. Posito iam $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$, fiet

$$S = \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{(1+yy)}+y}{\sqrt{(1+yy)}-y} = l(\sqrt{(1+yy)}+y):$$

vnde erit

$$\frac{l(\sqrt{(1+yy)}+y)}{\sqrt{(1+yy)}} = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{2.4}{3.5}y^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7}y^7 + \&c.$$

II. Sit $S = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$

Erit $S = A \text{ tang } x$. Posito iam $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$, fiet

$$S = A \text{ tang } \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}} = A \sin y = A \cos \sqrt{(1-yy)}.$$

Hancobrem obtinebitur ista summatio:

$$\frac{A \sin y}{\sqrt{(1-yy)}} = y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2.4}{3.5}y^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}y^7 + \&c.$$

18. Possunt quoque loco x functiones transcendentes ipsius y substitui, sicque summationes aliae inuentu difficiliores erui; verumtamen ne series nouae fiant nimis perplexae, eiusmodi functiones eligi debent, quarum potestates facile exhiberi queant; quales sunt quantitates exponentiales e^y. Proposita igitur hac serie:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \&c.$$

 po-

ponatur $x = e^{ny} y$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$,

erit $x^2 = e^{2ny} y^2$; $x^3 = e^{3ny} y^3$; &c.

Generaliter vero eſt, vti conſtat:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Quare ſeries propoſita in hanc transmutabitur:

$$\begin{aligned} S = ay &+ 1nay^2 + \tfrac{1}{2}n^2ay^3 + \tfrac{1}{6}n^3ay^4 + \tfrac{1}{24}n^4ay^5 + \&c. \\ &+ by^2 + \tfrac{2}{1}nby^3 + \tfrac{4}{2}n^2by^4 + \tfrac{8}{6}n^3by^5 + \&c. \\ &\quad + cy^3 + \tfrac{3}{1}ncy^4 + \tfrac{9}{2}n^2cy^5 + \&c. \\ &\quad\quad + dy^4 + \tfrac{4}{1}ndy^5 + \&c. \\ &\quad\quad\quad + ey^5 + \&c. \end{aligned}$$

I. Sit ſeries propoſita geometrica:

$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$ erit $S = \frac{x}{1-x}$.

Ponatur iam

$n = -1$; vt ſit $x = e^{-y} y$; & $S = \frac{e^{-y} y}{1 - e^{-y} y} = \frac{y}{e^y - y}$;

reperietur ſumma haec:

$$\frac{y}{e^y - y} = y - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{6}y^4 + \frac{5}{24}y^5 + \frac{19}{120}y^6 - \&c.$$

cuius autem ſeriei lex non perſpicitur.

II. Sint in altera ſerie omnes termini praeter primum $= 0$; erit $b = -na$; $c = \frac{3}{2}n^2 a$; $d = -\frac{8}{3}n^3 a$;

$e = \frac{125}{24}n^4 a$; $f = -\frac{29}{30}n^5 a$; &c.

Cum

Cum ergo sit summa $S = ay$; & $x = e^{ny}$; fiet:

$$y = x - nx^2 + \frac{3}{2}n^2x^3 - \frac{8}{3}n^3x^4 + \frac{125}{24}n^4x^5$$
$$- \frac{29}{30}n^5x^6 + \&c.$$

Quoniam vero in his seriebus lex progressionis non est manifesta, summationes ex hac substitutione deductae parum habent vtilitatis. Praecipue autem notari merentur transformationes ex substitutione $x = \frac{y}{1 \pm y}$ deriuatae, quippe quae non solum eximias summationes, sed etiam idoneos modos ad summas serierum appropinquandi suppeditant. His ergo, quae sine calculi differentialis ope sunt expedita, praemissis, ad ipsum huius calculi vsum in doctrina serierum ostendendum progrediamur.

CAPUT

CAPUT II.

DE INUESTIGATIONE SERIERUM SUMMABILIUM.

19.

Si Seriei, in cuius terminis ineſt quantitas indeterminata x, ſumma fuerit cognita, quae vtique erit functio ipſius x; tum quicunque valor ipſi x tribuatur, ſeriei ſumma perpetuo aſſignari poterit. Quare ſi loco x ponatur $x + dx$, ſeriei reſultantis ſumma erit aequalis ſummae prioris, vna cum ipſius differentiali: vnde ſequitur fore differentiale ſummae $=$ differentiali ſeriei. Quia vero hoc modo tam ſumma, quam ſinguli ſeriei termini multiplicati erunt per dx, ſi vbique per dx diuidatur, habebitur noua ſeries, cuius ſumma erit cognita. Simili modo ſi haec ſeries cum ſua ſumma denuo differentietur, & vbique per dx diuidatur, noua exoritur ſeries cum ſua ſumma: ſicque ex vna ſerie ſummabili quantitatem indeterminatam x inuoluente, per continuam differentiationem innumerae nouae ſeries pariter ſummabiles elicientur.

20. Quo haec clarius perſpiciantur, propoſita ſit progreſſio geometrica indeterminata, quippe cuius ſumma eſt cognita, haec:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \&c.$$

Si

Si nunc differentiatio inſtituatur, erit:

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = dx + 2xdx + 3x^2dx + 4x^3dx + 5x^4dx + \&c.$$

atque diuiſione per dx inſtituta, habebitur:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c.$$

Si denuo differentietur, atque per dx diuidatur, prodibit:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + 5.6x^4 + \&c.$$

ſeu

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \&c.$$

vbi coefficientes ſunt numeri trigonales. Si haec porro differentietur, atque per $3dx$ diuidatur, obtinebitur:

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \&c.$$

cuius coefficientes ſunt numeri pyramidales primi. Sicque vlterius procedendo oriuntur eaedem ſeries quas ex euolutione fractionis $\frac{1}{(1-x)^n}$ naſci conſtat.

21. Latius autem patebit haec ſerierum inueſtigatio, ſi antequam quaeuis differentiatio ſuſcipiatur, ipſa ſeries vna cum ſumma per quamuis ipſius x poteſtatem ſeu functionem multiplicetur. Sic cum ſit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

multiplicetur vbique per x^m, eritque

$$\frac{x^m}{1-x} = x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} + x^{m+4} + \&c.$$

nunc differentietur haec ſeries, fietque per dx diuiſo:

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)x^m}{(1-x)^2} = mx^{m-1} + (m+1)x^m + (m+2)x^{m+1} + (m+3)x^{m+2} + \&c.$$

Diuidatur nunc per x^{m-1}, habebitur:

$$\frac{m-(m-1)x}{(1-x)^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x + (m+2)x^2 + \&c.$$

multiplicetur haec antequam noua differentiatio ſuſcipiatur per x^n, vt ſit

$$\frac{mx^n}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} = mx^n + (m+1)x^{n+1} + (m+2)x^{n+2} + \&c.$$

Nunc inſtituatur differentiatio, & diuiſo per dx erit:

$$\frac{mnx^{n-1}}{1-x} + \frac{(m+n+1)x^n}{(1-x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1-x)^3} = mnx^{n-1} + (m+1)(n+1)x^n + (m+2)(n+2)x^{n+1} + \&c.$$

Diuiſione autem per x^{n-1} inſtituta, fiet:

$$\frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2xx}{(1-x)^3} = mn + (m+1)(n+1)x + (m+2)(n+2)x^2 + \&c.$$

ſicque vlterius progredi licebit: inuenientur autem perpetuo eaedem ſeries, quae ex euolutione fractionum ſummam conſtituentium naſcuntur.

22. Quoniam progreſſionis geometricae primum aſſumtae ſumma ad quemuis terminum vsque aſſignari po-

poteſt, hoc modo quoque ſeries definito terminorum numero conſtantes ſummabuntur. Ita cum ſit

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^n$$

erit differentiatione inſtituta & terminis per dx diuiſis:

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots + nx^{n-1}$$

Hinc ſummae poteſtatum numerorum naturalium ad quemuis terminum inueniri poterunt. Multiplicetur enim haec ſeries per x, vt fiat:

$$\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

quae denuo differentiata ac per dx diuiſa dabit:

$$\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2nn+2n-1)x^{n+1}-nnx^{n+2}}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots\ldots + n^2x^{n-1}$$

quae per x multiplicata dabit:

$$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots\ldots + n^2x^n$$

quae differentiata, per dx diuiſa ac per x multiplicata producet ſeriem hanc:

$$x + 8x^2 + 27x^3 + \ldots\ldots + n^3x^n$$

cuius ſumma propterea inuenietur. Ex hacque ſimili modo ſumma biquadratorum altiorumque poteſtatum indefinita eruetur.

23. Methodus igitur haec ad omnes ſeries quantitatem indeterminatam continentes accommodari poteſt, quarum quidem ſummae conſtant. Cum igitur praeter geometricas ſeries recurrentes omnes eadem praerogatiua gaudeant, vt non ſolum in infinitum, ſed etiam ad quemuis terminum ſummari queant; ex iis quoque hac methodo innumerae aliae ſeries ſummabiles inueniri poterunt. Quod cum opus foret maxime diffuſum, ſi id perſequi vellemus, vnicum caſum perpendamus.

Sit ſcilicet propoſita haec ſeries:

$$\frac{x}{1-x-xx} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \&c.$$

quae differentiata ac per dx diuiſa dabit:

$$\frac{1+xx}{(1-x-xx)^2} = 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 25x^4 + 48x^5 + 91x^6 + \&c.$$

Facile autem patet omnes has ſeries hoc modo reſultantes fore quoque recurrentes, quarum adeo ſummae ex ipſarum natura inueniri poterunt.

24. In genere igitur ſi ſeriei cuiuspiam in hac forma contentae: $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$ ſumma fuerit cognita, quam ponamus $= S$, eiusdem ſeriei, ſi ſinguli termini ſingulatim per terminos progreſſionis arithmeticae multiplicentur, ſumma inueniri poterit.

Sit enim

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

multiplicetur per x^m, erit

$$Sx^m = ax^{m+1} + bx^{m+2} + cx^{m+3} + dx^{m+4} + \&c.$$

dif-

differentietur haec aequatio, & diuidatur per dx:

$$mSx^{m-1} + x^m \frac{dS}{dx} = (m+1)ax^m + (m+2)bx^{m+1} + (m+3)cx^{m+2} + \&c.$$

diuidatur per x^{m-1}, eritque

$$mS + \frac{xdS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \&c.$$

Quodſi ergo huius ſequentis ſeriei ſumma deſideretur:

$$\alpha ax + (\alpha+\beta)bx^2 + (\alpha+2\beta)cx^3 + (\alpha+3\beta)dx^4 + \&c.$$

multiplicetur ſuperior per β ac ſtatuatur $m\beta + \beta = \alpha$ vt ſit $m = \frac{\alpha-\beta}{\beta}$; eritque huius ſeriei ſumma

$$= (\alpha-\beta)S + \frac{\beta xdS}{dx}.$$

25. Poterit etiam huius ſeriei propoſitae ſumma inueniri, ſi ſinguli eius termini multiplicentur per terminos ſeriei ſecundi ordinis ſingulatim, cuius ſcilicet differentiae demum ſecundae ſint conſtantes. Quoniam enim iam inuenimus

$$mS + \frac{xdS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \&c.$$

multiplicetur per x^n, vt ſit

$$mSx^n + \frac{x^{n+1}dS}{dx} = (m+1)ax^{n+1} + (m+2)bx^{n+2} + \&c.$$

differentietur poſito dx conſtante, & per dx diuidatur:

$$mnSx^{n-1} + \frac{(m+n+1)x^n dS}{dx} + \frac{x^{n+1}ddS}{dx^2} =$$

$$(m+1)(n+1)ax^n + (m+2)(n+2)bx^{n+1} + \&c.$$

Diuidatur per x^{n-1}, ac multiplicatur per k, vt fit:

$$mnkS + \frac{(m+n+1)kxdS}{dx} + \frac{kx^2ddS}{dx^2} =$$

$$(m+1)(n+1)kax + (m+2)(n+2)kbx^2 + (m+3)(n+3)cx^3 + \&c.$$

Comparetur nunc haec feries cum ifta:

erit:	Diff. 1.	Diff. 2.
$kmn + km + kn + k = \alpha$	$km + kn + 3k = \beta$	$2k = \gamma$
$kmn + 2km + 2kn + 4k = \alpha + \beta$	$km + kn + 5k = \beta + \gamma$	
$kmn + 3km + 3kn + 9k = \alpha + 2\beta + \gamma$		

Ergo $k = \frac{1}{2}\gamma$; & $m + n = \frac{2\beta}{\gamma} - 3$; atque

$$mn = \frac{\alpha}{k} - m - n - 1 = \frac{2\alpha}{\gamma} - \frac{2\beta}{\gamma} + 2 = \frac{2(\alpha - \beta + \gamma)}{\gamma}.$$

Hinc fumma feriei quaefita erit:

$$(\alpha - \beta + \gamma)S + \frac{(\beta - \gamma)xdS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2}.$$

26. Simili modo fumma reperiri poterit feriei huius

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

fi quidem cognita fuerit fumma S feriei huius:

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

atque A, B, C, D, &c. conftituant feriem, quae ad differentias conftantes deducitur. Fingatur enim fumma, quoniam eius forma ex antecedentibus colligitur, haec

$$\alpha S + \frac{\beta xdS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} + \frac{\delta x^3 d^3S}{6dx^3} + \frac{\varepsilon x^4 d^4S}{24dx^4} + \&c.$$

Nunc

Nunc ad litteras α, β, γ, δ, &c. inueniendas euolvantur singulae series, eritque:

$$\alpha S = \alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 + \alpha dx^3 + \alpha ex^4 + \&c.$$
$$\frac{\beta x dS}{dx} = \beta bx + 2\beta cx^2 + 3\beta dx^3 + 4\beta ex^4 + \&c.$$
$$\frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} = \gamma cx^2 + 3\gamma dx^3 + 6\gamma ex^4 + \&c.$$
$$\frac{\delta x^3 d^3S}{6dx^2} = \delta dx^3 + 4\delta ex^4 + \&c.$$
$$\frac{\epsilon x^4 d^4S}{24dx^3} = \epsilon ex^4 + \&c.$$

quae simul sumtae comparentur cum proposita:

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

fietque comparatione singulorum terminorum instituta:

$$\alpha = A$$
$$\beta = B - \alpha = B - A$$
$$\gamma = C - 2\beta - \alpha = C - 2B + A$$
$$\delta = D - 3\gamma - 3\beta - \alpha = D - 3C + 3B - A$$
&c.

His igitur valoribus inuentis erit summa quaesita:

$$Z = AS + \frac{(B - A)\,xdS}{1\,dx} + \frac{(C - 2B + A)\,x^2ddS}{1.2\,dx^2} + \frac{(D - 3C + 3B - A)\,x^3d^3S}{1.2.3\,dx^3} + \&c.$$

seu si seriei A, B, C, D, E, &c. differentiae continuae more consueto indicentur, erit

Z =

$$Z = AS + \frac{\Delta A . x dS}{1 dx} + \frac{\Delta^2 A . x^2 d^2 S}{1.2 dx^2} + \frac{\Delta^3 A . x^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

si quidem fuerit vti assumsimus:

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

Si ergo series A, B, C, D, &c. tandem habeat differentias constantes, summa seriei Z finite exprimi poterit.

27. Quia sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, est:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

sumatur haec series pro priori, & cum sit

$$S = e^x \quad \text{erit}$$

$$\frac{dS}{dx} = e^x$$

$$\frac{ddS}{dx^2} = e^x \quad \&c.$$

Quare huius seriei, quae ex illa & hac A, B, C, D, &c. componitur:

$$A + \frac{Bx}{1} + \frac{Cx^2}{1.2} + \frac{Dx^3}{1.2.3} + \frac{Ex^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

summa hoc modo exprimetur:

$$e^x \left(A + \frac{x\Delta A}{1} + \frac{xx\Delta^2 A}{1.2} + \frac{x^3\Delta^3 A}{1.2.3} + \frac{x^4\Delta^4 A}{1.2.3.4} + \&c.\right)$$

Sic si proponatur haec series:

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

Ob

Ob feriem A, B, C, D, E, &c.

erit $A = 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26$ &c.

$\Delta A = 3,\ 5,\ 7,\ 9,$ &c.

$\Delta^2 A = 2,\ 2,\ 2$ &c.

erit huius ferei:

$$2 + 5x + \frac{10x^2}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \&c.$$

fumma $= e^x(2 + 3x + xx) = e^x(1 + x)(2 + x)$: quod quidem fponte patet. Eft enim

$$2e^x = 2 + \frac{2x}{1} + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^4}{24} + \&c.$$

$$3xe^x = 3x + \frac{3x^2}{1} + \frac{3x^3}{2} + \frac{3x^4}{6} + \&c.$$

$$xxe^x = xx + \frac{x^3}{1} + \frac{x^4}{2} + \&c.$$

$$e^x(2+3x+xx) = 2+5x+\frac{10xx}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \&c.$$

28. Quae hactenus funt tradita non folum ad feries in infinitum excurrentes fpectant, fed etiam ad fummas quotcunque terminorum: coefficientes enim a, b, c, d, &c. vel in infinitum progredi, vel vbicunque libuerit abrumpi poffunt. Verum cum hoc non egeat vberiori explicatione, quae ex hactenus allatis fequuntur, accuratius perpendamus. Propofita ergo quacunque ferie, cuius finguli termini duobus conftent factoribus, quorum alteri feriem ad differentias conftantes deducen-

tem conſtituant, huius ſeriei ſumma poterit aſſignari; dummodo omiſſis iſtis factoribus, ſeries fuerit ſummabilis. Scilicet ſi propoſita ſit iſta ſeries

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

in qua quantitates A, B, C, D, E, &c. eiusmodi ſeriem conſtituant, quae tandem ad differentias conſtantes perducatur; tum iſtius ſeriei ſumma exhiberi poterit, dummodo habeatur ſumma S huius ſeriei

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

Sumtis enim ex progreſſione A, B, C, D, E, &c. differentiis continuis, vti initio huius libri oſtendimus:

$$\begin{array}{cccccc} A, & B, & C, & D, & E, & F \quad \&c. \\ \Delta A, & \Delta B, & \Delta C, & \Delta D, & \Delta E & \&c. \\ \Delta^2 A, & \Delta^2 B, & \Delta^2 C, & \Delta^2 D & \&c. & \\ \Delta^3 A, & \Delta^3 B, & \Delta^3 C & \&c. & & \\ \Delta^4 A, & \Delta^4 B, & \&c. & & & \\ \Delta^5 A, & \&c. & & & & \\ \&c. & & & & & \end{array}$$

erit ſeriei propoſitae ſumma:

$$Z = SA + \frac{xdS}{1\,dx}\Delta A + \frac{x^2 ddS}{1.2\,dx^2}\Delta^2 A + \frac{x^3 d^3 S}{1.2.3\,dx^3}\Delta^3 A + \&c.$$

poſito in altioribus ipſius S differentialibus dx conſtante.

29. Si igitur ſeries A, B, C, D, &c. nunquam ad differentias conſtantes deducat, ſumma ſeriei Z per nouam ſeriem infinitam exprimetur, quae interdum magis

gis conuerget quam propoſita; ſicque iſta ſeries in aliam ſibi aequalem transformabitur. Sit ad hoc declarandum propoſita haec ſeries:

$$Y = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{6} + \&c.$$

quam conſtat exprimere $l\frac{1}{1-y}$, ita vt ſit $Y = -l(1-y)$. Diuidatur haec ſeries per y, & ſtatuatur $y = x$, &

$Y = yZ$, vt ſit $Z = -\frac{1}{y}l(1-y) = -\frac{1}{x}l(1-x)$,

erit

$$Z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \&c.$$

quae comparata cum iſta:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \&c. = \frac{1}{1-x},$$

dabit pro ſerie A, B, C, D, E, &c. hos valores:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{1.2}, \quad -\frac{1}{2.3}, \quad -\frac{1}{3.4}, \quad -\frac{1}{4.5}$$

$$\frac{1.2}{1.2.3}, \quad \frac{1.2}{2.3.4}, \quad \frac{1.2}{3.4.5}$$

$$-\frac{1.2.3}{1.2.3.4}, \quad -\frac{1.2.3}{2.3.4.5}$$

&c.

Erit ergo $A = 1$; $\Delta A = -\frac{1}{2}$; $\Delta^2 A = \frac{1}{3}$; $\Delta^3 A = -\frac{1}{4}$ &c.

 Porro

Porro cum sit $S = \frac{1}{1-x}$, erit

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{ddS}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}$$

&c.

Quibus valoribus substitutis orietur summa: $Z =$

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{x^2}{3(1-x)^3} - \frac{x^3}{4(1-x)^4} + \frac{x^4}{5(1-x)^5} + \&c.$$

Cum ergo sit $x = y$, & $Y = -l(1-y) = yZ$; erit

$$-l(1-y) = \frac{y}{1-y} - \frac{y^2}{2(1-y)^2} + \frac{y^3}{3(1-y)^3} - \frac{y^4}{4(1-y)^4} + \&c.$$

quae series vtique exprimit

$$l\left(1+\frac{y}{1-y}\right) = l\,\frac{1}{1-y} = -l(1-y),$$

cuius adeo veritas per ante demonstrata constat.

30. Proposita nunc sit ista series, vt etiam vsus pateat, si potestates tantum impares occurrant, & signa alternentur.

$$Y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11} + \&c.$$

ex qua constat esse $Y = A\,\mathrm{tang}\,y$.

Di-

Diuidatur haec seriei per y, & ponatur $\frac{Y}{y} = Z$,

& $yy = x$; erit:

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \text{\&c.}$$

quae si comparetur cum ista:

$S = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - \text{\&c.}$ fiet $S = \frac{1}{1+x}$,

& series coefficientium A, B, C, D, &c. fiet:

$$A = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \text{ \&c.}$$

$$\Delta A = -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3.5}; -\frac{2}{5.7}; -\frac{2}{7.9}$$

$$\Delta^2 A = \frac{2.4}{3.5}; \frac{2.4}{3.5.7}; \frac{2.4}{5.7.9}$$

$$\Delta^3 A = -\frac{2.4.6}{3.5.7}; -\frac{2.4.6}{3.5.7.9}$$

$$\Delta^4 A = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$$

&c.

At cum sit $S = \frac{1}{1+x}$; erit

$$\frac{dS}{1dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{ddS}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} = -\frac{1}{(1+x)^4} \text{ \&c.}$$

 Qua-

Quare ſubſtitutis his valoribus fiet forma $Z =$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2\,x}{3(1+x)^2} + \frac{2.\,4\,x^2}{3.5(1+x)^3} + \frac{2.\,4.\,6\,x^3}{3.5.7(1+x)^4} + \&c.$$

Reſtituto ergo $x = yy$; & per y multiplicato fiet:

$$Y = A \tang y =$$

$$\frac{y}{1+yy} + \frac{2\,y^3}{3(1+yy)^2} + \frac{2.\,4\,y^5}{3.5(1+yy)^3} + \frac{2.\,4.\,6\,y^7}{3.5.7(1+yy)^4} + \&c.$$

31. Poteſt quoque ſuperior ſeries, qua arcus circuli per tangentem exprimitur, alio modo transmutari, eam comparando cum ſerie logarithmica.

Conſideremus nempe ſeriem

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \&c.$$

quam comparemus cum hac:

$$S = \frac{1}{0} - \frac{x}{2} + \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \&c.$$

$$= \frac{1}{0} - \frac{1}{2}\,l(1+x),$$

atque valores litterarum A, B, C, D, &c. erunt

$$A = \frac{0}{1};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{7};\ \frac{8}{9};\ \&c.$$

$$\Delta A = \frac{2}{3};\ \frac{+2}{3.5};\ \frac{+2}{5.7};\ \frac{+2}{7.9};\ \&c.$$

$$\Delta^2 A = \frac{-2.4}{3.5};\ \frac{-2.4}{3.5.7};\ \frac{-2.4}{5.7.9};\ \&c.$$

$$\Delta^3 A = \frac{2.4.6}{3.5.7};\ \&c.$$

De

Deinde cum sit $S = \frac{1}{0} - \frac{1}{2} l(1+x)$; erit

$$\frac{dS}{1.dx} = -\frac{1}{2(1+x)}$$
$$\frac{ddS}{1.2dx^2} = +\frac{1}{4(1+x)^2}$$
$$\frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} = -\frac{1}{6(1+x)^3}$$
$$\frac{d^4S}{1.2.3.4\,dx^3} = \frac{1}{8(1+x)^4}$$
&c.

Erit igitur $SA = S.\frac{0}{1} = 1$: & ex reliquis fiet:

$$Z = 1 - \frac{x}{3(1+x)} - \frac{2xx}{3.5(1+x)^2} - \frac{2.4x^3}{3.5.7(1+x)^3} - \&c.$$

Ponatur nunc $x = yy$, & multiplicetur per y fiet:

$$Y = A \tang y =$$

$$y - \frac{y^3}{3(1+yy)} - \frac{2y^5}{3.5(1+yy)^2} - \frac{2.4y^7}{3.5.7(1+yy)^3} - \&c.$$

Haec ergo transmutatio non impediebatur termino infinito $\frac{1}{0}$, qui in seriem S ingrediebatur. Sin autem cui supersit dubium, is tantum singulos terminos praeter primum secundum potestates ipsius y in series resoluat, atque deprehendet actu seriem primum propositam resultare.

32.

32. Hactenus eiusmodi tantum ſeries ſumus contemplati, in quibus omnes poteſtates variabilis occurrunt. Nunc igitur ad alias ſeries progrediamur, quae in ſingulis terminis eandem poteſtatem ipſius variabilis complectantur, cuiusmodi eſt haec:

$$S = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} + \frac{1}{d+x} + \&c.$$

Huius enim ſeriei ſi ſumma S fuerit, cognita ac per functionem quampiam ipſius x exprimatur, erit differentiando ac per $-dx$ diuidendo:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(b+x)^2} + \frac{1}{(c+x)^2} + \frac{1}{(d+x)^2} + \&c.$$

Si haec vlterius differentietur, atque per $-2\,dx$ diuidatur, cognoſcetur ſeries cuborum:

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(b+x)^3} + \frac{1}{(c+x)^3} + \frac{1}{(d+x)^3} + \&c.$$

haecque denuo differentiata, atque per $-3\,dx$ diuiſa dabit:

$$\frac{-d^3S}{6\,dx^3} = \frac{1}{(a+x)^4} + \frac{1}{(b+x)^4} + \frac{1}{(c+x)^4} + \frac{1}{(d+x)^4} + \&c.$$

Similique modo omnium ſequentium poteſtatum ſummae reperientur, dummodo ſumma ſeriei primae fuerit cognita.

33. Huiusmodi autem ſeries fractionum quantitatem indeterminatam inuoluentes ſupra in introductione elicuimus, vbi oſtendimus, ſi circuli, cuius radius $= 1$, ſemiperipheria ſtatuatur $= \pi$; fore

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi} =$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \&c.$$

$$\frac{\pi \cos \frac{m}{n} \pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi} =$$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \&c.$$

Cum igitur pro m & n numeros quoscunque assumere liceat, statuamus $n = 1$, & $m = x$; vt obtineamus series illi quam in §. praec. proposueramus similes; hoc facto erit:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \&c.$$

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

Per differentiationes ergo summae quarumuis potestatum ex his fractionibus oriundarum exhiberi poterunt.

34. Consideremus seriem priorem, sitque breuitatis gratia $\frac{\pi}{\sin \pi x} = S$, cuius differentialia altiora capiantur posito dx constante: eritque

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \&c.$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1}{(3-x)^2} - \&c.$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} + \frac{1}{(3-x)^3} - \&c.$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} - \frac{1}{(3-x)^4} - \&c.$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} + \frac{1}{(3-x)^5} - \&c.$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{(1-x)^6} - \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} - \frac{1}{(3-x)^6} - \&c.$$

&c.

vbi notandum eſt in poteſtatibus paribus ſigna eandem ſequi legem, pariterque in imparibus eandem legem ſignorum obſeruari. Omnium ergo iſtarum ſerierum ſummae inuenientur ex differentialibus expreſſionis

$$S = \frac{\pi}{\text{ſin}\,\pi x}.$$

35. Ad Differentialia haec ſimplicius exprimenda ponamus $\text{ſin}\,\pi x = p$ & $\text{coſ}\,\pi x = q$, erit $dp = \pi dx\,\text{coſ}\,\pi x = \pi q dx$, & $dq = \pi p dx$. Cum ergo ſit

S =

$$S = \frac{\pi}{p} \qquad \text{erit}$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2 q}{pp}$$

$$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{\pi^3(pp + 2qq)}{p^3} = \frac{\pi^3(qq + 1)}{p^3} \quad \text{ob} \quad pp + qq = 1$$

$$\frac{-d^3S}{dx^3} = \pi^4\left(\frac{5q}{pp} + \frac{6q^3}{p^4}\right) = \frac{\pi^4(q^3 + 5q)}{p^4}$$

$$\frac{d^4S}{dx^4} = \pi^5\left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p}\right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^5(q^4 + 18q^2 + 5)}{p^5}$$

$$\frac{-d^5S}{dx^5} = \pi^6\left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{pp}\right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^6(q^5 + 58q^3 + 61q)}{p^6}$$

$$\frac{d^6S}{dx^6} = \pi^7\left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p}\right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^7(q^6 + 179q^4 + 479q^2 + 61)}{p^7}$$

$$\frac{-d^7S}{dx^7} = \pi^8\left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2}\right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^8}{p^8}(q^7 + 543q^5 + 3111q^3 + 1385q)$$

$$\frac{d^8S}{dx^8} = \pi^9\left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{100800q^6}{p^7} + \frac{83664q^2}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p}\right)$$

&c.

 Quae

Quae expreſſiones facile vlterius quousque libuerit continuari poſſunt, ſi enim fuerit:

$$\pm\frac{d^nS}{dx^n}=\pi^{n+1}\left(\frac{\alpha q^n}{p^{n+1}}+\frac{\beta q^{n-2}}{p^{n-1}}+\frac{\gamma q^{n-4}}{p^{n-3}}+\frac{\delta q^{n-6}}{p^{n-5}}+\&c.\right)$$

erit differentiale ſequens ſignis mutatis:

$$\mp\frac{d^{n+1}S}{dx^{n+1}}=\pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)\alpha q^{n+1}}{p^{n+2}}\begin{matrix}+n\alpha\\+(n-1)\beta\end{matrix}\Bigg\}\frac{q^{n-1}}{p^n}\begin{matrix}+(n-2)\beta\\+(n-3)\gamma\end{matrix}\Bigg\}\frac{q^{n-3}}{p^{n-2}}\begin{matrix}+(n-4)\gamma\\+(n-5)\delta\end{matrix}\Bigg\}\frac{q^{n-5}}{p^{n-4}}\ \&c.\right)$$

36. Ex his ergo obtinebuntur ſummae ſerierum ſuperiorum §. 34. exhibitarum ſequentes:

$$S=\pi.\frac{1}{p}$$

$$\frac{-dS}{dx}=\frac{\pi^2}{1}.\frac{q}{p^2}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2}=\frac{\pi^3}{2}\left(\frac{2q^2}{p^3}+\frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3}=\frac{\pi^4}{6}\left(\frac{6q^3}{p^4}+\frac{5q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4}=\frac{\pi^5}{24}\left(\frac{24q^4}{p^5}+\frac{28q^2}{p^3}+\frac{5}{p}\right)$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5}=\frac{\pi 6}{120}\left(\frac{120q^5}{p^6}+\frac{180q^3}{p^4}+\frac{61q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^6S}{720dx^6}=\frac{\pi^7}{720}\left(\frac{720q^6}{p^7}+\frac{1320q^4}{p^5}+\frac{662q^4}{p^3}+\frac{61}{p}\right)$$

$$\frac{-d^7S}{5040dx^7}=\frac{\pi^8}{5040}\left(\frac{5040q^7}{p^8}+\frac{10920q^5}{p^6}+\frac{7266q^3}{p^4}+\frac{1385q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8S}{40320dx^8}=\frac{\pi^9}{40320}\left(\frac{40320q^8}{p^9}+\frac{100800q^6}{p^7}+\frac{83664q}{p^5}+\frac{24568q^2}{p^3}+\frac{1385}{p}\right)$$

&c.

37. Tractemus simili modo alteram seriem supra inuentam:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

atque posito breuitatis ergo $\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = T$, orientur sequentes summationes:

$$T = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \&c.$$

$$\frac{-dT}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \&c.$$

$$\frac{ddT}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \&c.$$

$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} + \&c.$$

$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} - \&c.$$

$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{(1-x)^6} + \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} + \&c.$$

&c.

vbi in potestatibus paribus omnes termini sunt affirmatiui, in imparibus autem signa + & — alternatim se excipiunt.

38. Quo differentialium horum valores innotescant, ponamus vt ante $\sin\pi x = p$ & $\cos\pi x = q$, vt sit $pp + qq = 1$; erit $dp = \pi q dx$ & $dq = -\pi p dx$.

Quibus valoribus adhibitis erit:

$$\mathrm{T} = \pi . \frac{q}{p}$$

$$\frac{-d\mathrm{T}}{dx} = \pi^2 \left(\frac{qq}{pp} + 1\right) = \frac{\pi^2}{pp}$$

$$\frac{dd\mathrm{T}}{dx^2} = \pi^3 \left(\frac{2q^3}{p^3} + \frac{2q}{p}\right) = \frac{2\pi^3 q}{p^3}$$

$$\frac{-d^3\mathrm{T}}{dx^3} = \pi^4 \left(\frac{6q^4}{p^4} + \frac{8qq}{pp} + 2\right) = \pi^4 \left(\frac{6qq}{p^4} + \frac{2}{pp}\right)$$

$$\frac{d^4\mathrm{T}}{dx^4} = \pi^5 \left(\frac{24q^3}{p^5} + \frac{16q}{p^3}\right)$$

$$\frac{-d^5\mathrm{T}}{dx^5} = \pi^6 \left(\frac{120q^4}{p^6} + \frac{120qq}{p^4} + \frac{16}{pp}\right)$$

$$\frac{d^6\mathrm{T}}{dx^6} = \pi^7 \left(\frac{720q^5}{p^7} + \frac{960q^3}{p^5} + \frac{272q}{p^3}\right)$$

$$\frac{-d^7\mathrm{T}}{dx^7} = \pi^8 \left(\frac{5040q^6}{p^8} + \frac{8400q^4}{p^6} + \frac{3696q^2}{p^4} + \frac{272}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8\mathrm{T}}{dx^8} = \pi^9 \left(\frac{40320q^7}{p^9} + \frac{80640q^5}{p^7} + \frac{48384q^3}{p^5} + \frac{7936q}{p^3}\right)$$

&c.

Quae formulae facile vlterius quousque libuerit continuari possunt. Si enim sit

$$\pm \frac{d^n\mathrm{T}}{dx^n} = \pi^{n+1} \left(\frac{\alpha q^{n-1}}{p^{n+1}} + \frac{\beta q^{n-3}}{p^{n-1}} + \frac{\gamma q^{n-5}}{p^{n-3}} + \frac{\delta q^{n-7}}{p^{n-5}} + \&c.\right)$$

erit expressio sequens:

$$\mp \frac{d^{n+1}\mathrm{T}}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2} \left(\frac{(n+1)\alpha q^n}{p^{n+2}} + \frac{(n-1)(\alpha+\beta)q^{n-2}}{p^n} + \frac{(n-3)(\beta+\gamma)q^{n-4}}{p^{n-2}} + \&c.\right)$$

39. Series ergo poteſtatum §. 37. datae ſequentes habebunt ſummas poſito $\sin \pi x = p$ & $\cos \pi x = q$.

$$T = \pi . \frac{q}{p}$$

$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2 \frac{1}{pp}$$

$$\frac{ddT}{2dx^2} = \pi^3 \frac{q}{p^3}$$

$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \pi^4 \left(\frac{qq}{p^4} + \frac{1}{3pp}\right)$$

$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \pi^5 \left(\frac{q^3}{p^5} + \frac{2q}{3p^3}\right)$$

$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \pi^6 \left(\frac{q^4}{p^6} + \frac{3qq}{3p^4} + \frac{2}{15pp}\right)$$

$$\frac{d^6T}{720dx^6} = \pi^7 \left(\frac{q^5}{p^7} + \frac{4q^3}{3p^6} + \frac{17q}{45p^3}\right)$$

$$\frac{-d^7T}{5040dx^7} = \pi^8 \left(\frac{q^6}{p^8} + \frac{5q^4}{3p^6} + \frac{11q^2}{15p^4} + \frac{17}{315pp}\right)$$

$$\frac{d^8T}{40320dx^8} = \pi^9 \left(\frac{q^7}{p^9} + \frac{6q^5}{3p^7} + \frac{6q^3}{5p^5} + \frac{62q}{315p^3}\right)$$

&c.

40. Praeter has ſeries inuenimus in introductione nonnullas alias, ex quibus ſimili modo per differentiationes nouae elici poſſunt. Oſtendimus enim eſſe:

$$\frac{1}{2x} - \frac{\pi \sqrt{x}}{2x \operatorname{tang} \pi \sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4-x} + \frac{1}{9-x} + \frac{1}{16-x} + \frac{1}{25-x} + \&c.$$

Po-

Ponamus summam huius seriei esse $= S$,

vt sit $S = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos\pi\sqrt{x}}{\sin\pi\sqrt{x}}$, erit

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2xx} + \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos\pi\sqrt{x}}{\sin\pi\sqrt{x}} + \frac{\pi\pi}{4x(\sin\pi\sqrt{x})^2},$$

quae ergo expressio praebet summam huius seriei:

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(4-x)^2} + \frac{1}{(9-x)^2} + \frac{1}{(16-x)^2} + \frac{1}{(25-x)^2} + \&c.$$

Deinde quoque ostendimus esse:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} - \frac{1}{2x} =$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{9+x} + \frac{1}{16+x} + \&c.$$

Quodsi ergo haec summa ponatur $= S$, erit:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(4+x)^2} + \frac{1}{(9+x)^2} + \frac{1}{(16+x)^2} + \&c.$$

At est

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} - \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2} + \frac{1}{2xx}.$$

Ergo summa huius seriei erit:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} + \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2} - \frac{1}{2xx}.$$

Similique modo vlterioribus differentiationibus summae sequentium potestatum inuenientur.

41. Si cognitus fuerit valor producti cuiuspiam ex factoribus indeterminatam litteram inuoluentibus compositi

ſiti, ex eo per eandem methodum innumerabiles ſeries ſummabiles inueniri poterunt. Sit enim huius producti

$$(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)(1+\varepsilon x) \ \&c.$$

valor $=S$, functioni ſcilicet cuiuspiam ipſius x, erit logarithmis ſumendis:

$$lS = l(1+\alpha x)+l(1+\beta x)+l(1+\gamma x)+l(1+\delta x)+\&c.$$

Sumantur iam differentialia, erit diuiſione per dx inſtituta:

$$\frac{dS}{Sdx} = \frac{\alpha}{1+\alpha x} + \frac{\beta}{1+\beta x} + \frac{\gamma}{1+\gamma x} + \frac{\delta}{1+\delta x} + \&c.$$

ex cuius vlteriori differentiatione ſummae poteſtatum quarumuis iſtarum fractionum reperietur; plane vti in exemplis praecedentibus fuſius expoſuimus.

42. Exhibuimus autem in introductione nonnullas iſtiusmodi expreſſiones, ad quas hanc methodum accommodemus. Scilicet ſi ſit π arcus $180°$ circuli, cuius radius $=1$, oſtendimus eſſe:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{4nn-mm}{4nn}\cdot\frac{16nn-mm}{16nn}\cdot\frac{36nn-mm}{36nn} \ \&c.$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{nn-mm}{nn}\cdot\frac{9nn-mm}{9nn}\cdot\frac{25nn-mm}{25nn}\cdot\frac{49nn-mm}{49nn} \ \&c.$$

Ponamus $n=1$ & $m=2x$; vt ſit

$$\sin\pi x = \pi x.\frac{1-xx}{1}\cdot\frac{4-xx}{4}\cdot\frac{9-xx}{9}\cdot\frac{16-xx}{16}. \ \&c. \quad \text{vel}$$

$$\sin\pi x = \pi x.\frac{1-x}{1}\cdot\frac{1+x}{1}\cdot\frac{2-x}{2}\cdot\frac{2+x}{2}\cdot\frac{3-x}{3}\cdot\frac{3+x}{3}\cdot\frac{4-x}{4}. \ \&c. \quad \&$$

$$\cos\pi x = \frac{1-4xx}{1}\cdot\frac{9-4xx}{9}\cdot\frac{25-4xx}{25}\cdot\frac{49-4xx}{49}\cdot\&c. \quad \text{seu}$$

$$\cos\pi x = \frac{1-2x}{1}\cdot\frac{1+2x}{1}\cdot\frac{3-2x}{3}\cdot\frac{3+2x}{3}\cdot\frac{5-2x}{5}\cdot\frac{5+2x}{5}\cdot\&c.$$

Ex his ergo expressionibus, si logarithmi sumantur, erit:

$$l\sin\pi x = l\pi x + l\frac{1-x}{1} + l\frac{1+x}{1} + l\frac{2-x}{2} + l\frac{2+x}{2} + l\frac{3-x}{3} + \&c.$$

$$l\cos\pi x = l\frac{1-2x}{1} + l\frac{1+2x}{1} + l\frac{3-2x}{3} + l\frac{3+2x}{3} + l\frac{5-2x}{5} + \&c.$$

43. Sumamus nunc harum serierum logarithmicarum differentialia, & diuisione vbique per dx facta prior series dabit:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

quae est ea ipsa series, quam §. 37. tractauimus. Altera vero series dabit:

$$\frac{-\pi\sin\pi x}{\cos\pi x} = \frac{-2}{1-2x} + \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{3-2x} + \frac{2}{3+2x} - \frac{2}{5-2x} + \&c.$$

Ponamus $2x = z$, vt sit $x = \frac{z}{2}$, & diuidamus per -2 erit:

$$\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi z}{2\cos\frac{1}{2}\pi z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} - \&c.$$

Cum autem sit

$$\sin\tfrac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1-\cos\pi z}{2}} \quad \& \quad \cos\tfrac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1+\cos\pi z}{2}}$$

erit:

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi z)}}{\sqrt{(1+\cos\pi z)}} = \frac{2}{1-z} - \frac{2}{1+z} + \frac{2}{3-z} - \frac{2}{3+z} + \frac{2}{5-z} - \&c.$$

seu

seu loco z scribendo x erit:

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos\pi x)}}=\frac{2}{1-x}-\frac{2}{1+x}+\frac{2}{3-x}-\frac{2}{3+x}+\frac{2}{5-x}-\&c.$$

Addatur haec series ad primum inuentam:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3-x}+\&c.$$

Atque reperietur huius seriei:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3-x}-\frac{1}{3+x}-\&c.$$

Summa $=\frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos\pi x)}}+\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}$. At fractio haec $\frac{\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos\pi x)}}$, si numerator & denominator multiplicetur per $\sqrt{(1-\cos\pi x)}$ abit in $\frac{1-\cos\pi x}{\sin\pi x}$. Quocirca summa seriei erit $=\frac{\pi}{\sin\pi x}$, quae est ea ipsa, quam §. 34. habuimus: vnde eam vlterius non persequemur.

  o 

CAPUT III.

DE INUENTIONE DIFFERENTIARUM FINITARUM.

44.

Quemadmodum ex functionum differentiis finitis earum differentialia facile inueniri queant, in initio fusius exposuimus, atque adeo ex hoc fonte principium differentialium deriuauimus. Si enim differentiae, quae assumtae erant finitae, euanescant, in nihilumque abeant, oriuntur differentialia; & quia hoc casu plures & saepe innumeri termini, qui differentiam finitam constituunt, reiiciuntur, differentialia multo facilius inueniri, atque commodius succinctiusque exprimi possunt, quam differentiae finitae. Neque igitur hinc vicissim via patere videtur, a differentialibus ad differentias finitas ascendendi. Interim tamen eo modo, quo hic vtemur, ex differentialibus omnium ordinum cuiuscunque functionis, eiusdem differentiae finitae omnes definiri poterunt.

45. Sit y functio quaecunque ipsius x, quae cum posito $x + dx$ loco x abeat in $y + dy$, si denuo loco x ponatur $x + dx$, valor $y + dy$ suo differentiali $dy + ddy$ augebitur, fietque $= y + 2dy + ddy$, qui ergo valor respondebit ipsius x valori $x + 2dx$. Simili modo si ponamus quantitatem x continuo suo differentiali dx augeri, vt successiue valores

$x +$

$x + dx$; $x + 2dx$; $x + 3dx$; $x + 4dx$; &c.
induat, valores ipſius y reſpondentes erunt, quos haec tabella indicat:

Valores ipſius	Valores reſpondentes functionis
x	y
$x + dx$	$y + dy$
$x + 2dx$	$y + 2dy + ddy$
$x + 3dx$	$y + 3dy + 3ddy + dy$
$x + 5dx$	$y + 4dy + 6ddy + 4d^3y + d^4y$
$x + 5dx$	$y + 5dy + 10ddy + 10d^3y + 5d^4y + d^5y$
$x + 6dx$	$y + 6dy + 15ddy + 20d^3y + 15d^4y + 6d^5y + d^6y$
&c.	&c.

46. Generaliter ergo ſi x abeat in $x + ndx$, functio y recipiet hanc formam:

$$y + \frac{n}{1} dy + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} ddy + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} d^3y$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} d^4y + \&c.$$

in qua expreſſione, etſi quilibet terminus infinities minor eſt quam praecedens, tamen nullum praetermiſimus, quo iſta formula ad praeſens negotium apta redderetur. Statuemus enim pro n numerum infinite magnum, & quoniam notauimus, fieri poſſe vt productum ex quantitate infinite magna in infinite paruam aequetur quantitati finitae, terminus ſecundus vtique homo-

geneus fieri poterit primo, seu ndy quantitatem finitam repraesentare poterit. Ob eandemque rationem terminus tertius $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}ddy$, etsi ddy infinities minus est quam dy, tamen quia alter factor $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$ infinities maior est quam n, terminus quoque tertius quantitatem finitam exprimere poterit: sicque posito n numero infinito nullum illius expressionis terminum reiicere licebit.

47. Posito autem n numero infinito quocunque is numero finito siue augeatur siue diminuatur, numerus resultans ad n habebit rationem aequalitatis, hincque pro singulis factoribus $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. vbique scribi poterit n. Cum enim sit

$$\frac{n(n-1)}{1.\ 2}ddy = \tfrac{1}{2}nnddy - \tfrac{1}{2}nddy$$

prior terminus $\frac{1}{2}nnddy$ ad posteriorem $\frac{1}{2}nddy$ rationem tenebit vt n ad 1, sicque hic respectu illius euanescet; loco $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$ ergo scribi poterit $\frac{1}{2}nn$. Simili modo quarti termini coefficiens $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$ contrahi poterit in $\frac{n^3}{6}$ pariterque in sequentibus numeri, quibus n in factoribus diminuitur, negligi poterunt. Hoc vero facto functio y, si loco x ponatur $x+ndx$, existente numero n infinito, sequentem valorem accipiet:

$y+$

$$y + \frac{ndy}{1} + \frac{nnddy}{1.2} + \frac{n^3 d^3 y}{1.2.3} + \frac{n^4 d^4 y}{1.2.3.4} + \frac{n^5 d^5 y}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

48. Cum igitur ſumto n numero infinite magno etiamſi dx ſit infinite paruum, productum ndx quantitatem finitam exprimere poſſit, ponamus $ndx = \omega$, vt ſit $n = \frac{\omega}{dx}$, erit vtique n numerus infinitus, cum ſit quotus ex diuiſione quantitatis finitae ω per infinite paruam dx reſultans. Valore autem hoc loco n adhibito cognoſcemus, ſi quantitas variabilis x augeatur quauis quantitate finita ω, ſeu ſi loco x ponatur $x + \omega$, tum quamuis ipſius functionem y abituram eſſe in hanc formam:

$$y + \frac{\omega dy}{1 dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

cuius expreſſionis ſinguli termini per continuam ipſius y differentiationem inueniri poterunt. Cum enim y ſit functio ipſius x, oſtendimus ſupra, has functiones omnes $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3 y}{dx^3}$; &c. quantitates finitas exhibere.

49. Cum igitur, dum quantitas variabilis x quantitate finita ω augeri aſſumitur, functio eius quaecunque y augeatur ſua differentia prima, quam ſupra per Δy indicauimus, exiſtente $\omega = \Delta x$: differentia ipſius y per continuam differentiationem reperiri poterit; erit enim:

Δy

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ſeu

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2}\cdot\frac{ddy}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \&c.$$

Sicque differentia finita Δy exprimitur per progreſſionem, cuius ſinguli termini ſecundum poteſtates ipſius Δx procedunt. Atque hinc viciſſim patet, ſi quantitas x tantum quantitate infinite parua augeatur, vt Δx abeat in eius differentiale dx, omnes terminos prae primo euaneſcere, foreque $\Delta y = dy$; facto enim $\Delta x = dx$, differentia Δy abit per definitionem in differentiale dy.

50. Quoniam ſi loco x ponatur $x + \omega$, eius functio quaecuuque y induit ſequentem valorem:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddx}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

veritas huius expreſſionis comprobari poterit eiusmodi exemplis, quibus differentialia altiora ipſius y tandem euaneſcunt: his enim caſibus numerus terminorum ſuperioris expreſſionis fiet finitus:

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor expreſſionis $xx - x$ *ſi loco* x *ponatur* $x + 1$.

Ponatur $y = xx - x$; & cum x in $x + 1$ abire ſtatuatur, fiet $\omega = 1$, ſumtis iam differentialibus erit:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1;\quad \frac{ddy}{dx^2} = 2;\quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0;\quad \&c.$$

Hinc

Hinc functio $y = xx - x$ posito $x + 1$ loco x abibit in: $xx - x + 1(2x - 1) + \frac{1}{2}.2 = xx + x$.

Quodsi autem in $xx - x$ loco x actu ponatur $x + 1$ abibit

abibit	xx	in	$xx + 2x + 1$
	x	in	$x + 1$
Ergo	$xx - x$	in	$xx + x$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor expressionis $x^3 + xx + x$, *si loco* x *ponatur* $x + 2$.

Ponatur $y = x^3 + xx + x$, fietque $\omega = 2$; nunc cum sit $y = x^3 + xx + x$

erit
$$\frac{dy}{dx} = 3xx + 2x + 1$$
$$\frac{ddy}{dx^2} = 6x + 2$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Ex his valor functionis $y = x^3 + xx + x$, si pro x statuatur $x + 2$, erit sequens:
$x^3 + xx + x + 2(3xx + 2x + 1) + \frac{4}{2}(6x + 2) + \frac{8}{6}.6$
$= x^3 + 7xx + 17x + 14$, qui idem prodit si actu loco x substituatur $x + 2$.

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor expressionis $xx + 3x + 1$, *si loco* x *ponatur* $x - 3$.

 Fiet

Fiet ergo $\omega = -3$; & posito
$y = xx + 3x + 1$, erit

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2:$$

vnde posito $x - 3$ loco x functio $x^2 + 3x + 1$ abibit in $x^2 + 3x + 1 - \frac{3}{1}(xx+3) + \frac{9}{2}.2 = x^2 - 3x + 1$.

51. Si pro ω sumatur numerus negatiuus, reperietur valor, quem functio quaecunque ipsius x induit, dum ipsa quantitas x diminuitur data quantitate ω. Scilicet si loco x ponatur $x - \omega$, functio ipsius x quaecunque y accipiet istum valorem:

$$y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

vnde omnes variationes, quas functio y subire potest, dum quantitas x vtrinque variatur, inueniri poterunt. Quodsi autem y fuerit functio rationalis integra ipsius x, quoniam tandem ad eius differentialia euanescentia deuenitur, valor variatus per expressionem finitam exprimetur; sin autem y non fuerit huiusmodi functio, valor variatus per seriem infinitam exprimetur, cuius propterea summa, quoniam si substitutio actu instituatur, valor variatus facile assignatur, expressione finita exhiberi poterit.

52. Quemadmodum autem differentia prima est inuenta, ita quoque differentiae sequentes similibus expres-

pressionibus exhiberi possunt. Induat enim x successiue valores $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, $x+4\omega$, &c. atque valores ipsius y respondentes indicentur per y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. sicuti in initio huius libri posuimus. Quoniam ergo y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. sunt valores, quos y nanciscitur, si loco x scribatur respectiue

$$x+\omega,\quad x+2\omega,\quad x+3\omega,\quad x+4\omega,\quad \&c.$$

per modo demonstrata isti ipsius y valores ita exprimentur:

$$y^{I}=y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$y^{II}=y+\frac{2\omega dy}{dx}+\frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$y^{III}=y+\frac{3\omega dy}{dx}+\frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$y^{IV}=y+\frac{4\omega dy}{dx}+\frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

&c.

53. Cum igitur, si Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$, &c. denotent differentias, primam, secundam, tertiam, quartam, &c. sit:

$$\Delta y = y^{I} - y$$

$$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^{I} + y$$

$$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$

$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

&c.

istae differentiae per differentialia hoc modo exprimentur:

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2-2.1)\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(2^3-2.1)\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{(2^4-2.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3-3.2^3+3.1)\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{(3^4-3.2^4+3.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4-4.3^4+6.2^4-4.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{(4^5-4.3^5+6.2^5-4.1)\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

&c.

54. Quantam vtilitatem afferant istae differentiarum expressionis in doctrina serierum & progressionum, cum sponte patet, tum in sequentibus vberius exponemus. Interim tamen in hoc capite vsum, qui hinc ad serierum notitiam immediate redundat, perpendamus. Quanquam vulgo indices terminorum seriei cuiuscunque progressionem arithmeticam, cuius differentia est vnitas, constituere assumuntur; tamen quo vsus latius pateat, atque applicatio facilius fieri possit, differentiam statuamus $= \omega$, ita vt, si terminus generalis seu is qui indici x respondet, fuerit y; sequentes conueniant indicibus

$$x + \omega, \quad x + 2\omega, \quad x + 3\omega, \quad \&c.$$

Quodsi ergo his indicibus respondeant sequentes seriei termini:

$$\begin{array}{cccccc} x, & x+\omega, & x+2\omega, & x+3\omega, & x+4\omega, & \&c. \\ y, & P, & Q, & R, & S, & \&c. \end{array}$$

sin-

ſinguli ex y eiusque differentialibus definientur hoc modo:

$$P = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

$$Q = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

$$R = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

$$S = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

&c.

55. Si hae expreſſiones a ſe inuicem ſubtrahantur, in differentias non amplius ingredietur y, eritque

$$P - y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{\omega^3 d^3}{6\,dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

$$Q - P = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{3\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{7\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} + \frac{15\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

$$R - Q = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{5\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{19\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} + \frac{65\omega^4 d^4y}{20\,dx^4} + \&c.$$

$$S - R = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{7\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{37\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} + \frac{175\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

$$T - S = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{61\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} + \frac{369\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

&c.

Si hae expreſſiones denuo a ſe inuicem ſubtrahantur, etiam differentialia prima ſe deſtruent; eritque

$$Q - 2P + y = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{14\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$R - 2Q + P = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{12\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{50\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$S - 2R + Q = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{18\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{110\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$T - 2S + R = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{24\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{194\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

&c.

His autem denuo a ſe inuicem ſubtractis differentialia quoque ſecunda ex computo egredientur:

$$R - 3Q + 3P - y = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{36\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$S - 3R + 3Q - P = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{60\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$T - 3S + 3R - Q = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{84\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ſubtractionem autem vlterius continuando fiet:

$$S - 4R + 6Q - 4P + y = \frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$T - 4S + 6R - 4Q + P = \frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

atque

$$T - 5S + 10R - 10Q + 5P - y = \frac{120\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

56. Quodſi ergo y fuerit functio rationalis integra ipſius x, quia eius differentialia altiora tandem euaneſcent

cefit, hoc modo procedendo tandem ad expreſſiones euaneſcentes peruenietur. Cum igitur iſtae expreſſiones ſint differentiae ipſius y, earum formas & coefficientes diligentius perpendamus:

$$y = y$$

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = \frac{\omega^2 ddy}{dx^2} + \frac{3\omega^3 d^3y}{3dx^3} + \frac{7\omega^4 d^4y}{3.4dx^4} + \frac{15\omega^5 d^5y}{3.4.5dx^5} + \frac{31\omega^6 d^6y}{3.4.5.6dx^6} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = \frac{\omega^3 d^3y}{dx^3} + \frac{6\omega^4 d^4y}{4dx^4} + \frac{25\omega^5 d^5y}{4.5dx^5} + \frac{90\omega^6 d^6y}{4.5.6dx^6} + \frac{301\omega^7 d^7y}{4.5.6.7dx^7} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = \frac{\omega^4 d^4y}{dx^4} + \frac{10\omega^5 d^5y}{5dx^5} + \frac{65\omega^6 d^6y}{5.6dx^6} + \frac{350\omega^7 d^7y}{5.6.7.dx^7} + \&c.$$

$$\Delta^5 y = \frac{\omega^5 d^5y}{dx^5} + \frac{15\omega^6 d^6y}{6dx^6} + \frac{140\omega^7 d^7y}{6.7dx^7} + \frac{1050\omega^8 d^8y}{6.7.8dx^8} + \&c.$$

$$\Delta^6 y = \frac{\omega^6 d^6y}{dx^6} + \frac{21\omega^7 d^7y}{7dx^7} + \frac{266\omega^8 d^8y}{7.8dx^8} + \frac{2646\omega^9 d^9y}{7.8.9dx^9} + \&c.$$

&c.

In quibus ſeriebus quemadmodum denominatores procedant, clarum eſt; numeratorum autem coefficientes ita formantur, vt quiuis coefficiens numeratoris ſit aggregatum ex ſupra ſtante & praecedente per exponentem differentiae multiplicato. Sic in ſerie differentiam $\Delta^6 y$ exprimente, eſt $2646 = 1050 + 6.266$.

57. Conſideremus quoque ſeriem eandem ſimul retro continuatam, quae continet terminos indicibus $x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; &c. reſpondentes:

In

$x-4\omega;\ x-3\omega;\ x-2\omega;\ x-\omega;\ x;\ x+\omega;\ x+2\omega;\ x+3\omega;\ x+4\omega;$ &c.

$s,\quad r,\quad q,\quad p,\quad y,\quad P,\quad Q,\quad R,\quad S,$ &c.

Cum igitur sit:

$$p = y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{\&c.}$$

$$q = y - \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{\&c.}$$

$$r = y - \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{\&c.}$$

$$s = y - \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 dx^4}{24dx^4} - \text{\&c.}$$

&c.

erit his valoribus a superioribus P, Q, R, S, &c. subtrahendis:

$$\frac{P-p}{2} = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{\&c.}$$

$$\frac{Q-q}{2} = \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{32\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{\&c.}$$

$$\frac{R-r}{2} = \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{243\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{\&c.}$$

$$\frac{S-s}{2} = \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{1024\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{\&c.}$$

&c.

fin

ſin autem termini hi ad ſuperiores addantur, tum, quemadmodum hic differentialia parium ordinum deerant, differentialia imparia ex computo egredientur.

Erit enim

$$\frac{P+p}{2} = y + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \&c.$$

$$\frac{Q+q}{2} = y + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{64\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \&c.$$

$$\frac{R+r}{2} = y + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{729\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \&c.$$

$$\frac{S+s}{2} = y + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{4096\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \&c.$$

&c.

58. Quoniam termini antecedentes omnes exprimi poſſunt, ſi ii in vnam ſummam colligantur, prodibit ſeriei propoſitae terminus ſummatorius. Reſpondeat ſcilicet terminus primus indici $x - n\omega$, eritque ipſe terminus primus $=$

$$y - \frac{n\omega dy}{dx} + \frac{n^2\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{n^3\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{n^4\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

Cum igitur terminus indici x reſpondens ſit $= y$, terminorumque omnium numerus ſit $= n+1$, erit ſumma omnium a primo ad vltimum y incluſiue ſumtorum ſeu terminus ſummatorius $=$

$$(n+1)y - \frac{\omega dy}{dx}(1+2+3+ \ldots +n)$$
$$+ \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(1+2^2+3^2+ \ldots +n^2)$$
$$- \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}(1+2^3+3^3+ \ldots +n^3)$$
$$+ \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}(1+2^4+3^4+ \ldots +n^4)$$
$$- \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5}(1+2^5+3^5+ \ldots +n^5)$$
&c.

59. Supra autem ſingularum harum ſerierum ſummas exhibuimus, quae ſi hic ſubſtituantur, erit ſumma ſeriei noſtrae propoſitae =

$$(n+1)y - \frac{\omega dy}{dx}(\tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n)$$
$$+ \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n)$$
$$- \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}(\tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2)$$
$$+ \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}(\tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n)$$
$$- \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5}(\tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2)$$
&c.

vbi n dabitur ex indice termini primi, a qua ſumma computatur. Ita ſi ponatur $\omega = 1$, & index termini pri-

primi sit $=1$, secundi $=2$, & vltimi $=x$, ita vt haec series sit proposita:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\ldots & x \\ a, & b, & c, & d, & \ldots\ldots & y \end{array}$$

erit huius seriei summa (ob $x-n=1$ & $n=x-1$)

$$= xy - \frac{dy}{dx}\left(\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x\right)$$

$$+ \frac{ddy}{2\,dx^2}\left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x\right)$$

$$- \frac{d^3y}{6\,dx^3}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx\right)$$

$$+ \frac{d^4y}{24\,dx^4}\left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x\right)$$

$$- \frac{d^5y}{120\,dx^5}\left(\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2\right)$$

$$+ \frac{d^6y}{720\,dx^6}\left(\tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x\right)$$

&c.

60. Ex hac summae expressione, quia coefficientes vehementer augentur, si x fuerit numerus magnus, parum vtilitatis ad doctrinam serierum redundat; interim tamen iuvabit aliquas proprietates inde fluentes commemorasse. Sit terminus generalis $y=x^n$, atque terminus summatorius per Sy seu $S.x^n$ indicetur. Qua designatione vbique adhibita erit:

$$\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x = S.x - x$$

$$\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x = S.x^2 - x^2$$

$$\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx = S.x^3 - x^3 \quad \text{\&c.}$$

Quamobrem ex ſuperiori expreſſione obtinebitur:

$$S.x^n = x^{n+1} - nx^{n-1}S.x + nx^n$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}S.x^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^n$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}S.x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^n$$
&c.

At cum ſit

$$(1-1)^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

erit $n - \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} - \&c.$

$= 1$, ideoque excepto caſu $n = 0$, quo iſta expreſſio fit $= 0$.

$$S.x^n = x^{n+1} + x^n - nx^{n-1}S.x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}S.x^2$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}S.x^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}S.x^4$$
&c.

61. Quo tam veritas quam vis huius formulae clarius perſpiciatur, euoluamus ſingulos caſus, ſitque primo $n = 1$, eritque:

$S.x = x^2 + x - S.x$, ideoque $S.x = \frac{xx + x}{2}$,

quemadmodum ſatis conſtat.

Pona-

Ponamus ergo $n=2$, est erit:

$$S.x^2 = x^3 + xx - 2xS.x + S.x^2,$$

quae aequatio, cum vtrinque termini $S.x^2$ se tollant, idem dat, quod praecedens $S.x = \frac{xx+x}{2}$. Si sit $n=3$, erit

$$S.x^3 = x^4 + x^3 - 3x.^2 Sx + 3xS.x^2 - S.x^3,$$

ideoque

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - \tfrac{3}{2}x^2 Sx + \tfrac{1}{2}x^3(x+1),$$

si ponatur $n=4$ prodibit:

$$S.x^4 = x^5 + x^4 - 4x^3 Sx + 6x^2 S.x^2 - 4xS.x^3 + S.x4,$$

vnde ob $S.x^4$ destructum erit:

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - x^2 S.x + \tfrac{1}{4}x^3(x+1)$$

a cuius triplo, si praecedentis duplum subtrahatur remanebit: $S.x^3 = \frac{3}{2}xS.x^2 - \frac{1}{4}x^3(x-1)$.

Si ponatur $n=5$ fiet:

$$S.x^5 = x^6 + x^5 - 5x^4 Sx + 10x^3 S.x^2 - 10x^2 S.x^3 + 5xS.x^4 - S.x^5$$

seu

$$S.x^5 = \tfrac{5}{2}xS.x^4 - 5x.^2 Sx^3 + 5x.^3 Sx^2 - \tfrac{5}{2}x^4 Sx + \tfrac{1}{2}x^5(x+1)$$

atque ex $n=6$ sequitur:

$$S.x^6 = x^7 + x^6 - 6x^5 Sx + 15x^4 S.x^2 - 20x^3 S.x^3 + 15x^2 S.x^4 - 6xS.x^5 + S.x^6$$

seu

$$S.x^5 = \tfrac{5}{2}xS.x^4 - \tfrac{10}{3}x^2 S.x^3 + \tfrac{5}{2}x^3 S.x^2 - x^4 S.x + \tfrac{1}{6}x^5(x+1).$$

62. Ex his ergo generaliter concludimus, ſi fuerit $n = 2m + 1$ fore:

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} xSx^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2.1.2} x^2 S.x^{2m-1} + \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2.1.2.3} x^3 S.x^{2m-2}$$

$$- \ldots\ldots - \frac{(2m+1)}{2} x^{2m} Sx + \tfrac{1}{2} x^{2m+1}(x+1).$$

Sin autem ſit $n = 2m + 2$, quia termini $S.x^{2m+2}$ ſe mutuo deſtruunt, reperietur:

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} xSx^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2.3} x^2 Sx^{2m-1} + \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2.3.4} x^3 S.x^{2m-2}$$

$$- \ldots\ldots - x^{2m} Sx + \frac{1}{2m+2} x^{2m+1}(x+1).$$

Duplici ergo modo ſummae poteſtatum imparium ex ſummis poteſtatum inferiorum determinari poſſunt: atque ex varia combinatione harum duarum formularum infinitae aliae formari poſſunt.

63. Multo facilius autem ſummae poteſtatum imparium ex antecedentibus definiri poſſunt: atque ad hoc quidem ſufficit ſolam ſummam poteſtatis paris antecedentis nouiſſe. Ex ſummis enim poteſtatum ſupra exhibitis conſtat, numerum terminorum ſummas conſtituentium, imparibus tantum poteſtatibus augeri, ita vt ſumma poteſtatis imparis totidem conſtet terminis, quot ſumma poteſtatis paris praecedentis. Sic ſi poteſtatis paris x^{2n} ſumma ſit:

$$S.x^{2n} = \alpha x^{2n+1} + \beta x^{2n} + \gamma x^{2n-1} - \delta x^{2n-3} + \varepsilon x^{2n-5} - \&c.$$

vidi-

vidimus enim, poſt terminum tertium alternos terminos deficere, ſimulque ſigna alternari; hinc ſumma ſequentis poteſtatis x^{2n+1} inuenietur, ſi ſinguli illius termini reſpectiue multiplicentur per hos numeros:

$$\frac{2n+1}{2n+2}x;\quad \frac{2n+1}{2n+1}x;\quad \frac{2n+1}{2n}x;\quad \frac{2n+1}{2n-1}x;\quad \frac{2n+1}{2n-2}x;\ \&c.$$

non omittendo terminos deficientes; eritque ergo

$$S.x^{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\alpha x^{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+1}\beta x^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n}\gamma x^{2n}$$
$$- \frac{2n+1}{2n-1}\delta x^{2n-2} + \frac{2n+1}{2n-4}\varepsilon x^{2n-4} - \frac{2n+1}{2n-6}\zeta x^{2n-6} + \&c.$$

Quodſi ergo conſtet ſumma poteſtatis x^{2n}, ex ea expedite ſumma ſequentis poteſtatis x^{2n+1} formari poterit.

64. Haec ſequentium ſummarum inueſtigatio etiam ad poteſtates pares extenditur; quoniam autem harum ſummae nouum terminum recipiunt, hic per iſtam methodum non inuenitur, ex natura tamen ipſius ſeriei, qua conſtat, ſi ponatur $x = 1$, ſummam quoque fieri debere $= 1$, ſemper erui poterit. Viciſſim autem ſemper ex ſumma cuiusuis poteſtatis cognita praecedentium poteſtatum ſummae inueniri poterunt. Si enim fuerit:

$$S.x^{n} = \alpha x^{n+1} + \beta x^{n} + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \&c.$$

erit pro poteſtate praecedente:

$$S.x^{n-1} = \frac{n+1}{n}\alpha x^{n} + \frac{n}{n}\beta x^{n-1} + \frac{(n-1)}{n}\gamma x^{n-2} - \frac{(n-3)}{n}\delta x^{n-4} + \&c.$$

hinc-

hincque vlterius regredi licet, quousque libuerit. Notandum autem est esse perpetuo $\alpha = \frac{1}{n+1}$ & $\beta = \frac{1}{2}$, vti ex formulis iam supra datis apparet.

65. Attendenti statim patebit summam potestatum x^{n-1} prodire, si summa potestatum x^n differentietur, eiusque differentiale per ndx diuidatur; eritque adeo $d.Sx^n = ndx.Sx^{n-1}$ & quia est $d.x^n = nx^{n-1}dx$;

erit $d.Sx^n = S.nx^{n-1}dx = S.d.x^n$;

ex quo intelligitur differentiale summae aequari summae differentialis: ita in genere si seriei cuiuspiam terminus generalis fuerit $= y$, & Sy eius terminus summatorius; erit quoque $S.dy = d.Sy$: hoc est summa differentialium omnium terminorum aequatur differentiali summae ipsorum terminorum. Ratio autem huius aequalitatis facile perspicitur ex iis, quae supra de serierum differentiatione attulimus. Cum enim sit

$$S.x^n = x^n + (x-1)^n + (x-2)^n + (x-3)^n + (x-4)^n + \&c.$$

erit

$$\frac{d.Sx^n}{ndx} = x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1} + \&c. = S.x^{n-1}$$

quae demonstratio ad omnes alias series patet.

66. Reuertamur autem, vnde digressi sumus, ad differentias functionum, circa quas adhuc quaedam annotanda sunt. Quoniam vidimus, si y fuerit functio quaecunque ipsius x, atque loco x vbique ponatur $x \pm \omega$, functionem y adepturam esse sequentem valorem:

$y \pm$

$$y \pm \frac{\omega dy}{1dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} \pm \frac{\omega^5 d^5y}{1.2.3.4.5dx^5} + \&c.$$

haec expreſſio locum habebit, ſiue pro ω quantitas quaecunque conſtans accipiatur, ſiue etiam variabilis, ab ipſa x pendens. Inuentis enim per differentiationem valoribus fractionum $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. in factoribus ω, ω^2, ω^3, &c. variabilitas non ſpectatur, hincque perinde eſt ſiue ω denotet quantitatem conſtantem, ſiue variabilem ab x pendentem.

67. Ponamus ergo eſſe $\omega = x$, atque in functione y loco x ſcribi $x - x = 0$. Quamobrem ſi in functione ipſius x quacunque y loco x vbique ſcribatur 0, valor functionis erit hic:

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c.$$

Haec ergo expreſſio ſemper indicat valorem, quem functio quaecunque y induit, ſi in ea ponatur $x = 0$, cuius veritatem ſequentia exempla illuſtrabunt:

EXEMPLUM I.

Sit $y = xx + ax + ab$, cuius valor, ſi ponatur $x = 0$, quaeratur, quem quidem conſtat fore $= ab$.

Cum ſit $y = xx + ax + ab$

erit $\frac{dy}{1dx} = 2x + a$

$\frac{ddy}{1.2dx^2} = 1$

ideoque prodibit valor quaesitus

$$= xx + ax + ab - x(2x + a) + xx.\ 1 = ab.$$

EXEMPLUM II.

Sit $y = x^3 - 2x + 3$, cuius valor, posito $x = 0$, quaeratur, quem constat fore $= 3$.

Cum sit $y = x^3 - 2x + 3$

erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2$

$$\frac{ddy}{1.2\,dx^2} = 3x$$

$$\frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} = 1$$

obtinebitur valor quaesitus

$$= x^3 - 2x + 3 - x(3xx - 2) + xx.\,3x - x^3.\,1 = 3.$$

EXEMPLUM III.

Sit $y = \frac{x}{1-x}$, cuius valor posito $x = 0$, quaeritur, quem constat fore $= 0$.

Cum sit $y = \frac{x}{1-x}$; erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$;

$$\frac{ddy}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3};\quad \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4};\ \&c.$$

Hinc erit valor quaesitus

$$= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{xx}{(1-x)^3} - \frac{x^3}{(1-x)^4} + \frac{x^4}{(1-x)^5} - \&c.$$

huiusque ergo seriei valor est $= 0$.

Quod

Quod etiam hinc patet, quod haec series primo termino truncata $\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{xx}{(1-x)^3} + \frac{x^3}{(1-x)^4} -$ &c. sit series geometrica, eiusque summa $= \frac{x}{(1-x)^2 + x(1-x)} = \frac{x}{1-x}$, vnde valor inuentus erit $= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$.

EXEMPLUM IV.

Sit $y = e^x$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est vnitas, & quaeratur valor ipsius y si ponatur $x = 0$, quem quidem constat fore $= 1$.

Cum sit $y = e^x$; erit $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^x$; &c. ideoque valor quaesitus erit

$$= e^x - \frac{e^x x}{1} + \frac{e^x xx}{1.2} - \frac{e^x x^3}{1.2.3} + \frac{e^x x^4}{1.2.3.4} - \text{\&c.}$$

$$= e^x \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{\&c.}\right)$$

At supra vidimus seriem $1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} +$ &c. exprimere valorem e^{-x}, erit ergo valor quaesitus vtique $= e^x . e^{-x} = \frac{e^x}{e^x} = 1$.

EXEMPLUM V.

Sit $y = \sin x$, atque posito $x = 0$, manifestum est fore $y = 0$, id quod etiam formula generalis indicabit.

 Cum

Cum enim sit $y = \sin x$; erit $\frac{dy}{dx} = \cos x$;

$\frac{ddy}{dx^4} = - \sin x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = - \cos x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$; &c.

erit posito $x = 0$ valor ipsius y hic:

$$\sin x - \frac{x}{1}\cos x - \frac{xx}{1.2}\sin x + \frac{x^3}{1.2.3}\cos x + \frac{x^4}{1.2.3.4}\sin x - \&c.$$

qui est $= \sin x \left(1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3\ldots 6} + \&c.\right)$

$$- \cos x \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots 7} + \&c.\right)$$

harum autem serierum superior exprimit $\cos x$, inferior autem $\sin x$, vnde valor quaesites erit

$$= \sin x . \cos x - \cos x . \sin x = 0.$$

68. Hinc igitur vicissim cognoscimus, si y eiusmodi fuerit functio ipsius x, vt ipsa euanescat, posito $x = 0$, tum fore

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{xxddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c. = 0.$$

Vnde haec est aequatio generalis omnium omnino functionum ipsius x, quae dum fit $x = 0$, simul ipsae euanescunt. Et hancobrem ista aequatio ita est comparata, vt, quaecunque functio ipsius x, dummodo ea euanescat euanescente x, loco y substituatur, aequationi perpetuo satisfiat. Quodsi vero y eiusmodi fuerit functio ipsius x,

quae posito $x = 0$, recipiat valorem datum $= A$, tum erit:

$$y - \frac{x\,dy}{1\,dx} + \frac{x^2\,ddy}{1.2\,dx^2} - \frac{x^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{x^4\,d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} - \&c. = A.$$

in qua aequatione omnes continentur functiones ipsius x, quae posito $x = 0$, abeunt in A.

69. Si loco x scribatur $2x$, seu $x + x$, functio quaecunque ipsius x, quae designetur per y hunc induet valorem

$$y + \frac{x\,dy}{1\,dx} + \frac{x^2\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{x^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{x^4\,d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \&c.$$

Atque si loco x scribamus nx, hoc est $x + (n-1)x$ functio y accipiet valorem sequentem:

$$y + \frac{(n-1)x\,dy}{1\,dx} + \frac{(n-1)^2 xx\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{(n-1)^3 x^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \&c.$$

Sin autem generaliter pro x scribamus t, functio quaecunque y ipsius x, transmutabitur ob $t = x + t - x$ in formam sequentem:

$$y + \frac{(t-x)\,dy}{1\,dx} + \frac{(t-x)^2\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{(t-x)^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \&c.$$

Si igitur v fuerit talis functio ipsius t, qualis y est ipsius x, quia v ex y nascitur, ponendo t loco x, erit:

$$v = y + \frac{(t-x)\,dy}{1\,dx} + \frac{(t-x)^2\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{(t-x)^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \&c.$$

cuius veritas quibuscunque exemplis comprobari potest.

EXEMPLUM.

Sit enim $y = xx - x$: manifestum est posito t loco x fore $v = tt - t$, quod idem expressio inuenta declarabit. Nam ob

$$y = xx - x; \text{ erit } \frac{dy}{dx} = 2x - 1; \ \& \ \frac{ddy}{2dx^2} = 1;$$

vnde fiet

$$v = xx - x + (t - x)(2x - 1) + (t - x)^2 =$$

$$xx - x + 2tx - 2xx - t + x + tt - 2tx + xx = tt - t.$$

Si itaque y fuerit eiusmodi functio ipsius x, quae posito $x = a$ abeat in A; ob $t = a$ & $v = A$ fiet

$$A = y + \frac{(a-x)dy}{1dx} + \frac{(a-x)^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{(a-x)^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

huicque ergo aequationi omnes functiones ipsius x, quae facto $x = a$ abeunt in A, satisfaciunt.

CAPUT IV.

DE CONUERSIONE FUNCTIONUM IN SERIES.

70.

In Capite superiori iam ex parte ostensus est vsus, quem expressiones generales ibi pro differentiis finitis inventae habent in inuestigatione serierum, quae valorem cuiusque functionis ipsius x exhibeant. Si enim y fuerit functio data ipsius x, eius valor quem induit posito $x = 0$, erit cognitus; hicque si ponatur $= A$, erit vti inuenimus:

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2 dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} - \&c. = A.$$

Hinc ergo non solum habemus seriem plerumque in infinitum excurrentem, cuius summa aequetur quantitati constanti A, etiamsi in singulis terminis insit quantitas variabilis x, sed etiam ipsam functionem y per seriem exprimere poterimus, erit enim:

$$y = A + \frac{xdy}{dx} - \frac{xxddy}{1.2 dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} - \frac{x^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^3} + \&c.$$

cuius exempla iam aliquot sunt allata.

71. Quo autem haec inuestigatio latius pateat, ponamus functionem y abire in z, si loco x vbique scribatur $x + \omega$, ita vt z talis sit functio ipsius $x + \omega$, qualis y est ipsius x, atque ostendimus fore:

$z =$

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2\, dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3\, dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1.2.3.4\, dx^4} + \&c.$$

Cum igitur huius seriei singuli termini per continuam ipsius y differentiationem ponendo dx constans inueniri, simulque valor ipsius z per substitutionem $x + \omega$ in locum ipsius x actu exhiberi queat; hoc modo perpetuo obtinebitur series valori ipsius z aequalis, quae si ω fuerit quantitas vehementer parua, maxime conuergit, atque non admodum multis terminis capiendis valorem ipsius z proxime verum praebebit. Ex quo huius formulae in negotio approximationum vberrimus erit vsus.

72. Vt igitur in insigni huius formulae vsu ostendendo ordine procedamus, substituamus primo in locum ipsius y functiones ipsius x algebraicas. Ac primo quidem sit $y = x^n$; eritque si $x + \omega$ loco x ponatur $z = (x+\omega)^n$. Cum igitur sit:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \quad ; \quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \quad ; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

&c.

his valoribus substitutis fiet:

$$(x+\omega)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1.\,2}x^{n-2}\omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^{n-3}\omega^3 + \&c.$$

quae est notissima expressio Neutoniana, qua potestas binomii $(x+\omega)^n$ in seriem conuertitur. Huiusque seri-

feriei terminorum numerus femper eſt finitus, ſi n fuerit numerus integer affirmatiuus.

73. Poterimus hinc quoque progreſſionem inuenire, quae valorem poteſtatis binomii ita exprimat, vt ea abrumpatur, quoties exponens poteſtatis fuerit numerus negatiuus. Statuamus enim

$$\omega = \frac{-ux}{x+u}; \text{ erit } z = (x+\omega)^n = \left(\frac{xx}{x+u}\right)^n$$

ideoque habebitur:

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \frac{nx^nu}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^nu^2}{1.2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^nu^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

diuidatur vbique per x^{2n}, eritque

$$(x+u)^{-n} = x^{-n} - \frac{nx^{-n}u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{-n}u^2}{1.2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{-n}u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

Ponatur nunc $-n = m$; prodibitque

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^mu}{1(x+u)} + \frac{m(m+1)x^mu^2}{1.2(x+u)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^mu^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

quae feries, quoties m eſt numerus integer negatiuus, finito terminorum numero conſtabit. Haec igitur feries aequalis eſt primum inuentae, ſi pro ω & n ſcribantur u & m; erit enim inde

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^{m-1}u}{1} + \frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1.2.3} + \&c.$$

74. Haec eadem feries quoque deduci poteſt ex expreſſione initio §. 70. data. Cum enim, ſi poſito $x = 0$, abeat y in A ſit:

$$y - \frac{x\,dy}{dx} + \frac{xx\,ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c. = A,$$

ponatur $y = (x+a)^n$; eritque $A = a^n$; & ob

$$\frac{dy}{dx} = n(x+a)^{n-1}\;;\quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)(x+a)^{n-2}\;;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3}\;;\ \&c.\ \text{fiet}$$

$$(x+a)^n - \frac{n}{1}x(x+a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2}x^2(x+a)^{n-2} - \&c. = a^n$$

diuidatur per $a^n(x+a)^n$, atque prodibit:

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - \frac{na^{-n}x}{1\,(x+a)} + \frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1.2\,(x+a)^2} - \&c.$$

quae positis respectiue u, x & $-m$ pro x, a & n orietur series ante inuenta.

75. Si pro m statuantur numeri fracti, ambae series in infinitum excurrent, interim tamen si u prae x fuerit quantitas valde parua, vehementer ad verum valorem conuergent. Sit igitur $m = \frac{\mu}{\nu}$; & $x = a^\nu$, erit ex seriem primum inuenta:

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu u}{\nu.a^\nu} + \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu.\,2\nu}.\frac{uu}{a^{2\nu}} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu.\,2\nu.\,3\nu}.\frac{u^3}{a^{3\nu}} + \&c.\right)$$

Series autem posterius inuenta dabit:

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu u}{\nu(a^\nu+u)} + \frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu.2\nu(a^\nu+u)^2} + \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu.\,2\nu.\,3\nu\,(a^\nu+u)^3} + \&c.\right)$$

Haec

Haec autem posterior series magis conuergit quam prior, cum eius termini etiam decrescant, si fuerit $u > a^{v}$, quo casu tamen prior series diuergit.

Si igitur sit $\mu = 1$, $\nu = 2$, erit

$$\sqrt{(a^2+u)} = a\left(1 + \frac{1\,u}{2(a^2+u)} + \frac{1.\,3\,u^2}{2.4(a^2+u)^2} + \frac{1.\,3.\,5\,u^3}{2.4.6(a^2+u)^3} + \&c.\right)$$

Simili modo pro ν ponendo numeros 3, 4, 5 &c. manente $\mu = 1$, erit:

$$\sqrt[3]{(a^3+u)} = a\left(1 + \frac{1\,u}{3(a^3+u)} + \frac{1.\,4.\,u^2}{3.6(a^3+u)^2} + \frac{1.\,4.\,7\,u^3}{3.6.9(a^4+u)^3} + \&c.\right)$$

$$\sqrt[4]{(a^4+u)} = a\left(1 + \frac{1\,u}{4(a^4+u)} + \frac{1.\,5.\,u^2}{4.8(a^4+u)^2} + \frac{1.\,5.\,9\,u^3}{4.8.12(a^4+u)^3} + \&c.\right)$$

$$\sqrt[5]{(a^5+u)} = a\left(1 + \frac{1\,u}{5(a^5+u)} + \frac{1.\,6\,u^2}{5.10(a^5+u)^2} + \frac{1.\,6.\,11\,u^3}{5.10.15(a^5+u)^3} + \&c.\right)$$

&c.

76. Ex his ergo formulis facile cuiusque numeri propositi radix cuiusuis potestatis inueniri poterit. Proposito enim numero c quaeratur potestas ei proxima, siue maior siue minor: priori casu u fiet numerus negatiuus, posteriori affirmatiuus. Quod si vero series resultans non satis conuergere videatur, multiplicetur numerus c per quampiam potestatem puta per f^{v}, si radix dignitatis ν extrahi debeat, & quaeratur numeri $f^{v}c$ radix, quae per f diuisa dabit radicem numeri c quaesitam.

tam. Quo maior autem accipitur numerus f, eo magis series conuerget; idque imprimis, si quaepiam similis potestas a^{ν} non multum ab $f^{\nu}c$ discrepet.

EXEMPLUM I.

Quaeratur radix quadrata ex numero 2.

Si sine vlteriori praeparatione ponatur $a = 1$ & $u = 1$ fiet

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1.3}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^3} + \&c.$$

quae etsi iam satis conuergit, tamen praestabit numerum 2 ante per quadratum quodpiam vti 25 multiplicare, vt productum 50 ab alio quadrato 49 minime discrepet. Hancobrem quaeratur radix quadrata ex 50, quae per 5 diuisa dabit $\sqrt{2}$. Erit autem tum $a = 7$ & $u = 1$, vnde fiet:

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \&c.\right)$$

seu

$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \&c.\right)$$

quae ad computum in fractionibus decimalibus instituendum est aptissima.

Erit

Erit enim

$$\tfrac{7}{5} = 1,4000000000000$$
$$\tfrac{7}{5}\cdot\tfrac{1}{100} = 140000000000$$
$$\tfrac{7}{5}\cdot\tfrac{1}{100}\cdot\tfrac{3}{200} = 2100000000$$
$$\tfrac{7}{5}\cdot\tfrac{1}{100}\cdot\tfrac{3}{200}\cdot\tfrac{5}{300} = 35000000$$
$$\text{praec. in } \tfrac{7}{400} = 612500$$
$$\text{praec. in } \tfrac{9}{500} = 11025$$
$$\text{praec. in } \tfrac{11}{600} = 202$$
$$3$$

$$\text{Ergo } \sqrt{2} = 1,4142135623730$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur radix cubica ex 3.

Multiplicetur 3 per cubum 8, & quaeratur radix cubica ex 24, erit enim $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$. Ponatur ergo $a = 3$ & $u = -3$, eritque

$$\sqrt[3]{24} = 3\left(1 - \frac{1.3}{3.24} + \frac{1.4.3^2}{3.6.24^2} - \frac{1.4.7.3^3}{3.6.9.24^3} + \&c.\right)$$

&

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3.8} + \frac{1.4}{3.6.8^2} - \frac{1.4.7}{3.6.9.8^3} + \&c.\right)$$

seu

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48} - \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48}\cdot\frac{7}{72} + \&c.\right)$$

 quae

quae series iam vehementer conuergit, cum quilibet terminus plusquam octies minor sit praecedente. Sin autem 3 multiplicetur per cubum 729 fiet 2187, &

$$\sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{(13^3 - 10)} = 9\sqrt[3]{3}.$$

Erit ergo ob $a = 13$ & $u = -10$.

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{13}{9}\left(1 - \frac{1.10}{3.2187} + \frac{1.4.10^2}{3.6.2187^2} - \frac{1.4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \&c.\right)$$

cuius quiuis terminus plusquam ducenties minor est quam praecedens.

77. Euolutio binomii potestatis tum late patet, vt omnes functiones algebraicae in ea comprehendi queant. Si enim verbi gratia quaeratur valor huius functionis $\sqrt{(a + 2bx + cxx)}$ per seriem expressus, hoc per praecedentes formulas, duos terminos tanquam vnum considerando fieri poterit. Deinde vero haec explicatio fieri poterit ope expressionis primum traditae: nam si ponatur $\sqrt{(a + 2bx + cxx)} = y$, quia posito $x = 0$ fit $y = \sqrt{a}$, erit $A = \sqrt{a}$, & cum differentialia ipsius y ita se habeant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + cx}{\sqrt{(a + 2bx + cxx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ac - bb}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = + \frac{3(bb - ac)(b + cx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{3(bb - ac)(ac - 5bb - 8bcx - 4ccxx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{7}{2}}}$$

&c.

Ex

Ex his ergo obtinebitur:

$$\sqrt{(a+2bx+cxx)} - \frac{(b+cx)x}{\sqrt{(a+2bx+cxx)}} - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^{\frac{7}{2}}} - \&c. = \sqrt{a}.$$

Quodsi ergo vbique per $\sqrt{(a+2bx+cxx)}$ multiplicetur series fiet rationalis, eritque

$$\sqrt{a(a+2bx+cxx)} = a+2bx+cxx-(b+cx)x - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)} -$$

$$\frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2} - \frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^3} - \&c.$$

siue

$$\sqrt{(a+2bx+cxx)} = \sqrt{a} + \frac{bx}{\sqrt{a}} - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)\sqrt{a}} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2\sqrt{a}} - \&c.$$

78. Transeamus ergo ad functiones transcendentes, quas loco y substituamus. Sit itaque primum $y = lx$, ac posito $x+\omega$ loco x fiet $z = l(x+\omega)$. Sint autem hi logarithmi quicunque, qui ad hyperbolicos rationem teneant $n : 1$, eritque pro logarithmis hyperbolicis $n = 1$, & pro tabularibus erit $n = 0,434294481903 2$. Hinc differentialia ipsius $y = lx$ erunt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{n}{x^2}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2n}{x^3}; \quad \&c.$$

ex quibus conficitur:

$$l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

Si-

Simili modo, si ω statuatur negatiuum, erit:

$$l(x-\omega) = lx - \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} - \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} - \&c.$$

Quodsi ergo haec series a priori subtrahatur, fiet

$$l\frac{x+\omega}{x-\omega} = 2n\left(\frac{\omega}{x} + \frac{\omega^3}{3x^3} + \frac{\omega^5}{5x^5} + \frac{\omega^7}{7x^7} + \&c.\right)$$

79. Si in serie primum inuenta:

$$l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

ponatur $\omega = \frac{xx}{u-x}$; erit $x+\omega = \frac{ux}{u-x}$; &

$$l(x+\omega) = lu + lx - l(u-x) = lx + \frac{nx}{u-x} - \frac{nxx}{2(u-x)^2} + \&c.$$

atque

$$l(u-x) = lu - \frac{nx}{u-x} + \frac{nxx}{2(u-x)^2} - \frac{nx^3}{3(u-x)^3} + \&c.$$

sumtoque x negatiuo habebitur:

$$l(u+x) = lu + \frac{nx}{u+x} + \frac{nxx}{2(u+x)^2} + \frac{nx^3}{3(u+x)^3} + \frac{nx^4}{4(u+x)^4}.$$

Harum ergo serierum ope logarithmi expedite inueniri poterunt, si quidem series valde conuergant. Huiusmodi autem erunt sequentes, quae ex inuentis facile deducuntur:

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \&c.\right)$$

$$l(x-1 = lx - n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \&c.\right)$$

quae

quae duae series, cum tantum signis a se inuicem discrepent, si ad calculum reuocentur, ex logarithmo numeri x cognito, eadem opera logarithmi amborum numerorum $x+1$ & $x-1$ reperientur. Deinde ex reliquis seriebus erit:

$$l(x+1) = l(x-1) + 2n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \&c.\right)$$

$$l(x-1) = lx - n\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + \&c.\right)$$

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^4} + \&c.\right)$$

80. Ex dato ergo logarithmo numeri x, logarithmi numerorum contiguorum $x+1$ & $x-1$ facile inueniri poterunt; quin etiam ex logarithmo numeri $x-1$ logarithmus numeri binario maioris & viciſſim eruetur. Quod quamuis in Introductione vberius ſit oſtenſum, tamen hic quaedam exempla adiungemus.

EXEMPLUM I.

Ex dato numeri 10 *logarithmo hyperbolico*, qui eſt 2,302585092994o, *logarithmos hyperbolicos numerorum* 11 *&* 9 *inuenire.*

Quoniam haec quaeſtio logarithmos hyperbolicos ſpectat, erit $n = 1$; ideoque habebuntur hae ſeries:

$$l11 = l10 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} + \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} + \frac{1}{5.10^5} - \&c.$$

$$l9 = l10 - \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} - \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} - \frac{1}{5.10^5} - \&c.$$

Ad quarum ſerierum ſummas inueniendas, colligantur termini pares & impares ſeorſim, eritque

$\frac{1}{10} = 0{,}1000000000000$	$\frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0{,}0050000000000$
$\frac{1}{3 \cdot 10^3} = 0{,}0003333333333$	$\frac{1}{4 \cdot 10^4} = 0{,}0000250000000$
$\frac{1}{5 \cdot 10^5} = 0{,}0000020000000$	$\frac{1}{6 \cdot 10^6} = 0{,}0000001666666$
$\frac{1}{7 \cdot 10^7} = 0{,}0000000142857$	$\frac{1}{8 \cdot 10^8} = 0{,}0000000012500$
$\frac{1}{9 \cdot 10^9} = 0{,}0000000001111$	$\frac{1}{10 \cdot 10^{10}} = 0{,}0000000000100$
$\frac{1}{11 \cdot 10^{11}} = 0{,}0000000000009$	$\frac{1}{12 \cdot 10^{12}} = 0{,}0000000000001$
ſumma $= 0{,}1003353477310$	ſumma $= 0{,}0050251679267$

Summa vtriusque erit . . . 0,1053605156577

Differentia ambarum erit 0,0953101798043

Iam eſt $l10 = 2{,}3025850929940$

Ergo erit $l11 = 2{,}3978952727983$

& $l9 = 2{,}1972245773363$

Hinc porro erit $l3 = 1{,}0986122886681$

& $l99 = 4{,}5951198501346$

EX-

EXEMPLUM II.

Ex logarithmo hyperbolico numeri 99 *nunc inuento inuenire logarithmum numeri* 101.

Adhibeatur ad hoc ſeries ſupra inuenta:

$$l(x+1) = l(x-1) + \frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + \frac{2}{7x^7} + \&c.$$

in qua fiat $x = 100$; eritque:

$$l101 = l99 + \frac{2}{100} + \frac{2}{3.100^3} + \frac{2}{5.100^5} + \frac{2}{7.100^7} + \&c.$$

cuius ſeriei ſumma ex his quatuor terminis colligitur $= 0,0200006667066$, quae ad $l\,99$ addita dabit $l101 = 4,6151205168412$.

EXEMPLUM III.

Ex dato logarithmo tabulari numeri 10, qui eſt $=1$, *inuenire logarithmos numerorum* 11 & 9.

Quoniam hic logarithmos communes tabulares quaerimus, erit $n = 0,4342944819032$, poſito ergo $x = 10$ erit:

$$l11 = l10 + \frac{n}{10} + \frac{n}{2.10^2} - \frac{n}{3.10^3} + \frac{n}{4.10^4} + \&c.$$

$$l\,9 = l10 - \frac{n}{10} - \frac{n}{2.10^2} - \frac{n}{3.10^3} - \frac{n}{4.10^4} - \&c.$$

Colligantur termini pares & impares feorfim:

$\frac{n}{10} = 0{,}0434294481903$	$\frac{n}{2.10^2} = 0{,}0021714724095$
$\frac{n}{3.10^3} = 0{,}0001447648273$	$\frac{n}{4.10^4} = 0{,}0000108573620$
$\frac{n}{5.10^5} = 0{,}0000008685889$	$\frac{n}{6.10^6} = 0{,}0000000723824$
$\frac{n}{7.10^7} = 0{,}0000000062042$	$\frac{n}{8.10^8} = 0{,}0000000005428$
$\frac{n}{9.10^9} = 0{,}0000000000482$	$\frac{n}{10.10^{10}} = 0{,}0000000000043$
$\frac{n}{11.10^{11}} = 0{,}0000000000005$	$\frac{n}{12.10^{12}} = 0{,}0000000000000$
fumma $= 0{,}0435750878593$	fumma $= 0{,}0021824027010$

Aggregatum ambarum eft $= 0{,}0457574905603$

Differentia earum eft $= 0{,}0413926851583$

Cum ergo fit $l10 = 1{,}0000000000000$

Erit $l11 = 1{,}0413926851583$

& $l9 = 0{,}9542425094396$

Hinc $l3 = 0{,}4771212547198$

& $l99 = 1{,}9956351945979$

EXEMPLUM IV.

Ex logarithmo tabulari numeri 99 *hic inuentis inuenire logarithmum tabularem numeri* 101.

Adhibendo hic eandem feriem, qua in Exemplo fecundo vfi fumus, habebimus:

$$l101 = l99 + 2n\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{3.100^3} + \frac{1}{5.100^5} + \&c.\right)$$

cuius feriei pofito pro n valore debito, fumma mox reperietur $= 0,0086861791849$ quae addita, ad $l99 = 1,9956351945979$ oritur.

$$l101 = 2,0043213737829$$

81. Tribuamus nunc in expreffione noftra generali y valorem exponentialem, fitque $y = a^x$, pofito $x + \omega$ loco x; erit $z = a^{x+\omega}$, cuius valor ob differentialia:

$$\frac{dy}{dx} = a^x la; \quad \frac{ddy}{dx^2} = a^x (la)^2; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = a^x (la)^3; \quad \&c.$$

erit

$$a^{x+\omega} = a^x\left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \&c.\right)$$

quae fi diuidatur per a^x prodibit feries valores quantitatis exponentialis exprimens, quam fupra in Introductione iam elicuimus: nempe

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2(la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4(la)^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Simili modo ſumto ω negatiuo erit:

$$a^{-\omega} = 1 - \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} - \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

ex quarum combinatione oritur:

$$\frac{a^{\omega} + a^{-\omega}}{2} = 1 + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6 (la)^6}{1.2\ldots 6} + \&c.$$

$$\frac{a^{\omega} - a^{-\omega}}{2} = \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5 (la)^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

vbi notandum eſt la denotare logarithmum hyperbolicum numeri a.

82. Huius formulae ope ex dato quouis logarithmo numerus ei conueniens reperiri poterit. Sit enim propoſitus logarithmus quicunque u ad canonem, in quo numeri a logarithmus $= 1$ ſtatuitur, pertinens. Quaeratur in eodem canone logarithmus x proxime ad u accedens, ſitque $u = x + \omega$; numerus autem logarithmo x conueniens ſit $= y = a^x$, erit numerus logarithmo $u = x + \omega$ reſpondens $= a^{x+\omega} = z$; fietque

$$z = y\left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \&c.\right)$$

quae ſeries ob ω numerum valde paruum, vehementer conuerget, cuius vſum ſequenti exemplo declaremus.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus iſti binarii poteſtati $2^{2^{24}}$ *aequalis.*

Cum ſit $2^{24} = 16777216$, erit $2^{2^{24}} = 2^{16777216}$, ſu-

ſumendisque logarithmis vulgaribus, erit huius numeri logarithmus $= 16777216\, l2$. Cum autem ſit:

$$l2 = 0,30102999566398119521373889$$

numeri quaeſiti logarithmus erit:

$$5050445,259733675932039063$$

cuius characteriſtica indicat numerum quaeſitum exprimi 5050446 figuris, quae cum omnes exhiberi nequeant, ſufficiet figuras initiales aſſignaſſe, quae ex mantiſſa

$$,259733675932039063 = u$$

inueſtigari debent. Ex tabulis autem colligitur, numerum cuius logarithmus proxime ad hunc accedat fore $18.101 = 1,818$; qui ponatur y; cuius logarithmus

$x = 0,259593878885948644$, vnde erit

$\omega = 0,000139797046090419$. Cum iam ſit

$a = 10$ erit

$la = 2,30258509299404568401799914$ &

$\omega la = 0,000321894594372398$ Deinde erit

$$
\begin{array}{rr}
y = & 1,818000000000000000 \\
\frac{\omega la}{1} y = & 585204372569020 \\
\frac{\omega^2 (la)^2}{1.\ 2} y = & 94187062064 \\
\frac{\omega^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} y = & 10106100 \\
\frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} y = & 813 \\
\hline
 & 1818585298569737997
\end{array}
$$

hae-

haeque ſunt figurae initiales numeri quaeſiti, cuius omnes figurae excepta forte vltima ſunt iuſtae.

83. Conſideremus quantitates tranſcendentes a circulo pendentes, ſitque vti perpetuo ponimus, radius circuli $= 1$, atque y denotet arcum circuli cuius ſinus $= x$ ſeu ſit $y = \text{A}\,\text{ſin}\, x$. Ponatur $x + \omega$ loco x, eritque $z = \text{A}\,\text{ſin}\,(x + \omega)$: ad quem valorem exprimendum quaerantur differentialia ipſius y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{+x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}} \quad \&c.$$

Ex his ergo inuenitur:

$$\text{A}\,\text{ſin}\,(x+\omega) = \text{A}\,\text{ſin}\,x + \frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} + \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \&c.$$

84.

84. Si ergo cognitus fuerit arcus, cuius ſinus eſt $= x$, huius formulae beneficio inueniri poterit arcus, cuius ſinus eſt $x + \omega$, ſi fuerit ω quantitas valde parua. Series autem cuius ſumma addi debet, exprimetur in partibus radii, quae ad arcum facile reducentur: vti ex hoc exemplo intelligetur.

EXEMPLUM.

Quaeratur arcus circuli, cuius ſinus eſt

$$= \tfrac{1}{3} = 0,3333333333.$$

Quaeratur ex tabulis ſinuum arcus, cuius ſinus ſit proxime minor, quam $\frac{1}{3}$, qui erit $19^\circ, 28^I$, cuius ſinus eſt $= 0,3332584$. Statuatur ergo $19^\circ, 28^I, = A\,\text{ſin}\, x = y$. erit $x = 0,3332584$, & $\omega = 0,0000749$, atque ex tabulis $\sqrt{(1 - xx)} = \text{coſ}\, y = 0,9428356$. Erit ergo arcus quaeſitus z, cuius ſinus $= \frac{1}{3}$ proponitur

$$= 19^\circ, 28^I + \frac{\omega}{\text{coſ}\, y} + \frac{\omega\omega\, \text{ſin}\, y}{2\, \text{coſ}\, y^3},$$

quae expreſſio iam ſufficit; erit ergo per logarithmos calculum inſtituendo:

 $l\omega =$

$$l\omega = 5,8744818$$
$$l\cos y = 9,9744359$$

$$l\frac{\omega}{\cos y} = 5,9000459 \; ; \; \frac{\omega}{\cos y} = 0,000079441\,2$$
$$l\frac{\omega^2}{\cos y} = 1,8000918$$
$$l\frac{\sin y}{\cos y} = 9,5483452$$
$$1,3484370$$
$$l2 = 0,3010300$$

$$l\frac{\omega^2 \sin y}{2\cos y^3} = 1,0474070 \; ; \; \frac{\omega^2 \sin y}{2\cos y^3} = 0,000000001\,1$$

$$\text{Summa} = 0,000079442\,3$$

qui eſt valor arcus ad $19°, 28'$ addendi, ad quem in minutis ſecundis exprimendum, ſumamus eius logarithmum

qui eſt	5,9000518
a quo ſubtrahatur	4,6855749
	1,2144769
cui log. reſpondet num. =	16,38615

qui eſt numerus minutorum ſecundorum; fractionem vero in tertiis & quartis exprimendo fiet arcus quaeſitus

$$= 19°, 28^{I}, 16^{II}, 23^{III}, 10^{IV}, 8^{V}, 24^{VI}.$$

85. Simili modo expressio pro cosinibus eruetur; posito enim $y = A\cos x$; quia est $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, series ante inuenta inuariata manebit, dummodo eius signa permutentur. Erit itaque

$$A\cos(x+\omega) = A\cos x - \frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} - \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \&c.$$

quae series pariter ac praecedens vehementer semper converget, si ex tabulis sinuum proxime veri anguli excerpantur, ita vt plerumque vnicus terminus primus $\frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}}$ sufficiat. Interim tamen si x fuerit ipsi 1 seu sinui toti proxime aequalis, tum ob denominatores admodum paruos illa series conuergentiam amittit. His igitur casibus, quibus x non multum ab 1 deficit, quoniam tum differentiae fiunt minimae, commodius vtemur solita interpolatione.

86. Ponamus quoque pro y arcum cuius tangens datur, sitque $y = A\,\text{tang}\,x$ & $z = A\,\text{tang}\,(x+\omega)$ ita vt sit

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

Ad quos terminos indagandos quaerantur ipsius y singula differentialia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+xx)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2+6xx}{(1+xx)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+xx)^4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24-240x^2+120x^4}{(1+xx)^5}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{-720x+2400x^3-720x^5}{(1+xx)^6}$$

&c.

vnde colligitur fore:

$$\text{A tang}(x+\omega) = \text{A tang}\,x +$$

$$\frac{\omega}{1(1+xx)} - \frac{\omega^2 x}{(1+xx)^2} + \frac{\omega^3}{(1+xx)^3}(xx-\tfrac{1}{3}) - \frac{\omega^4}{(1+xx)^4}(x^3-x) +$$

$$\frac{\omega^5}{(1+xx)^5}(x^4-2x^2+\tfrac{1}{5}) - \frac{\omega^6}{(1+xx)^6}(x^5-\tfrac{10}{3}x^3+x) + \&c.$$

87. Haec ſeries, cuius lex progreſſionis non adeo manifeſta eſt, transmutari poteſt in aliam formam, cuius progreſſio ſtatim in oculos incurrit. Ponatur in hunc finem $\text{A tang}\,x = 90° - u$, vt ſit $x = \cot u = \frac{\text{coſ}\,u}{\text{ſin}\,u}$; erit $1+xx = \frac{1}{\text{ſin}\,u^2}$, vnde fit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx} = \text{ſin}\,u$.

Cum

Cum deinde sit $dx = \frac{-du}{\sin u^2}$, seu $du = -dx \sin u^2$, fiet vlteriora differentialia sumendo:

$$\frac{ddy}{dx} = 2du \sin u \cos u = du \sin 2u = -dx \sin u \sin 2u$$

ideoque $\frac{ddy}{1\,dx^2} = + \sin u^2 . \sin 2u.$

$$\frac{d^3y}{2\,dx^2} = -du \sin u . \cos u . \sin 2u - du \sin u^2 \cos 2u = -du \sin u . \sin 3u$$
$$= dx \sin u^3 \sin 3u$$

ideoque $\frac{d^3y}{1.2\,dx^3} = + \sin u^3 . \sin 3u$

$$\frac{d^4y}{1.2.3\,dx^3} = du \sin u^2 . (\cos u . \sin 3u + \sin u . \cos 3u) = du \sin u^2 . \sin 4u$$
$$= -dx \sin u^4 . \sin 4u$$

ideoque $\frac{d^4y}{1.2.3\,dx^4} = - \sin u^4 . \sin 4u$

$$\frac{d^5y}{1.2.3.4\,dx^4} = -du \sin u^3 (\cos u \sin 4u + \sin u . \cos 4u) = -du . \sin u . \sin 5u$$
$$= + dx \sin u^5 . \sin 5u$$

ideoque $\frac{d^5y}{1.2.3.4\,dx^5} = + \sin u^5 . \sin 5u$

&c.

Ex quibus colligitur fore:

$$A\,tg(x+\omega) = A\,tg\,x + \frac{\omega}{1} \sin u . \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 . \sin u + \frac{\omega^3}{3} \sin u^3 . \sin 3u$$
$$- \frac{\omega^4}{4} \sin u^4 \sin 4u + \frac{\omega^5}{5} \sin u^5 . \sin 5u - \frac{\omega^6}{6} \sin u^6 \sin 6u + \&c.$$

vbi cum sit $A\,tg\,x = y$ & $A\,tg\,x = 90° - u$, erit $y = 90° - u$.

88. Si ponatur $A\cot x = y$ & $A\cot(x+\omega) = z$; erit

$$z = y + \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^2\, ddy}{1.2\, dx^2} + \frac{\omega^3\, d^3y}{1.2.3\, dx^3} + \frac{\omega^4\, d^4y}{1.2.3.4\, dx^4} + \&c.$$

Cum autem ſit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, termini huius ſeriei congruent praeter primum cum ante inuentis, exceptis tantum ſignis. Quare ſi ponatur, vt ante $A\,\text{tang}\, x = 90^\circ - u$, ſeu $A\cot x = u$, vt ſit $u = y$; erit:

$$A\cot(x+\omega) = A\cot x - \frac{\omega}{1}\,\text{ſin}\, u.\text{ſin}\, u + \frac{\omega^2}{2}\,\text{ſin}\, u^2.\text{ſin}\, 2u - \frac{\omega^3}{3}\,\text{ſin}\, u^3\,\text{ſin}\, 3u$$

$$+ \frac{\omega^4}{4}\,\text{ſin}\, u^4.\text{ſin}\, 4u - \frac{\omega^5}{5}\,\text{ſin}\, u^5.\text{ſin}\, 5u + \&c.$$

quae expreſſio immediate ex praecedente ſequitur: quia enim eſt $A\cot(x+\omega) = 90 - A\,\text{tang}(x+\omega)$

& $A\cot x = 90 - A\,\text{tang}\, x$; erit

$$A\cot(x+\omega) - A\cot x = -A\,\text{tang}\,(x+\omega) + A\,\text{tang}\, x.$$

89. Ex his expreſſionibus multa egregia corollaria conſequuntur, prout loco x & ω dati valores ſubſtituantur. Sit igitur primum $x = 0$; & cum ſit $u = 90^\circ - A\,\text{tang}\, x$ fiet $u = 90^\circ$; atque $\text{ſin}\, u = 1$; $\text{ſin}\, 2u = 0$; $\text{ſin}\, 3u = -1$; $\text{ſin}\, 4u = 0$; $\text{ſin}\, 5u = 1$; $\text{ſin}\, 6u = 0$; $\text{ſin}\, 7u = -1$; &c. vnde fiet

$$A\,\text{tang}\,\omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \frac{\omega^9}{9} - \frac{\omega^{11}}{11} + \&c.$$

quae eſt notiſſima ſeries exprimens arcum, cuius tangens eſt $= \omega$.

Sit $x = 1$, erit $A\,tang\,x = 45^\circ$, ideoque $u = 45^\circ$, hinc $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$; $\sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 4u = 0$; $\sin 5u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 6u = -1$; $\sin 7u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 8u = 0$; $\sin 9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ &c. Ex quibus fit:

$$A\,tg(1+\omega) = 45^\circ + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \frac{\omega^7}{7.16}$$
$$+ \frac{\omega^9}{9.32} - \frac{\omega^{10}}{10.32} + \frac{\omega^{11}}{11.64} - \frac{\omega^{13}}{13.128} + \frac{\omega^{14}}{14.128} - \&c.$$

Si igitur sit $\omega = -1$; ob $A\,tang(1+\omega) = 0$, & $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ fiet:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4}$$
$$+ \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{10.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \&c.$$

qui valor si loco arcus 45° substituatur in illa expressione erit: $A\,tang(1+\omega) =$

$$\frac{\omega+1}{1.2} - \frac{\omega^2+1}{2.2} + \frac{\omega^3+1}{3.2^2} - \frac{\omega^5-1}{5.2^3} + \frac{\omega^6-1}{6.2^3} - \frac{\omega^7-1}{7.2^4} + \&c.$$

Illa autem series maxime est idonea ad valorem ipsius $\frac{\pi}{4}$ proxime inueniendum.

90. Cum sit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c.$$

ter-

termini autem in denominatoribus habentes 2, 6, 10, &c.

$\frac{1}{2.2} - \frac{1}{6.2^3} + \frac{1}{10.2^5} - \frac{1}{14.2^7} + \text{\&c.}$ exprimunt $\frac{1}{2}\text{A tg}\frac{1}{2}$;

erit:

$$\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\text{A tg}\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{11.2^6}\ \text{\&c.}$$

In altera autem formula posito ω negatiuo, cum sit

$$\text{A tg}(1-\omega) = \begin{cases} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{\&c.} \\ - \frac{\omega}{1.2} - \frac{\omega^2}{2.2} - \frac{\omega^3}{3.2^2} + \frac{\omega^5}{5.2^3} + \frac{\omega^6}{6.2^3} + \frac{\omega^7}{7.2^4} - \text{\&c.} \end{cases}$$

si fiat $\omega = \frac{1}{2}$; erit:

$$\text{A tg}\tfrac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{\&c.} \\ - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{2.2^3} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{6.2^9} + \frac{1}{7.2^{11}} - \text{\&c.} \end{cases}$$

& terminis per 2, 6, 10, &c. diuisis seorsim sumtis erit:

$$\text{A tg}\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\text{A tg}\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \text{\&c.}$$

$$- \tfrac{1}{2}\text{A tg}\tfrac{1}{8} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \text{\&c.}$$

ideoque

$$\tfrac{1}{2}\text{A tang}\tfrac{1}{2} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} + \frac{1}{7.2^4} + \text{\&c.}$$

$$- \tfrac{1}{2}\text{A tg}\tfrac{1}{8} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \text{\&c.}$$

qui

qui valor si in superiore serie substituatur, atque A tang $\frac{1}{8}$ ipse in seriem conuertatur, reperietur:

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3.2^1} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} + \frac{1}{9.2^4} + \&c. \\ -\frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \&c. \\ -\frac{1}{1.2^4} + \frac{1}{3.2^{10}} - \frac{1}{5.2^{16}} + \frac{1}{7.2^{22}} - \frac{1}{9.2^{28}} + \&c. \end{cases}$$

90. Sequuntur hae multaeque aliae series ex positione $x = 1$: sin autem ponamus $x = \sqrt{3}$, vt sit $A\,tang\,x = 60^\circ$, fiet $u = 30$, & $\sin u = \frac{1}{2}$; $\sin 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 1$; $\sin 4u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 5u = \frac{1}{2}$; $\sin 6u = 0$; $\sin 7u = -\frac{1}{2}$; &c. vnde erit:

$$A\,tang(\sqrt{3}+\omega) = 60^\circ + \frac{\omega}{1.2^2} - \frac{\omega^2\sqrt{3}}{2.2^2} + \frac{\omega^3}{3.2^3} - \frac{\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5}$$
$$+ \frac{\omega^5}{5.2^6} - \frac{\omega^7}{7.2^8} + \frac{\omega^8\sqrt{3}}{8.2^9} - \frac{\omega^9}{9.2^9} + \frac{\omega^{10}\sqrt{3}}{10.2^{11}} - \frac{\omega^{11}}{11.2^{12}} + \&c.$$

Sin autem ponatur $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, vt sit $A\,tg\,x = 30^\circ$; erit $u = 60^\circ$; atque $\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 0$; $\sin 4u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 5u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 6u = 0$; $\sin 7u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; &c.

quibus valoribus ſubſtitutis erit:

$$\mathrm{Atg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\omega\right)=30^\circ+\frac{3\omega}{1.2^2}-\frac{3\omega^2\sqrt{3}}{2.2^3}+\frac{3^2\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5}-\frac{3^3\omega^5}{5.2^6}+\&c.$$

ſi igitur ſit $\omega=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, ob $30^\circ=\frac{\pi}{6}$; erit:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{1.2^2}+\frac{1}{2.2^3}-\frac{1}{4.2^5}-\frac{1}{5.2^6}+\frac{1}{7.2^8}+\frac{1}{8.2^9}-\&c.$$

91. Reſumamus expreſſionem generalem inuentam:

$$\mathrm{A\,tang}\,(x+\omega)=\mathrm{A\,tang}\,x$$
$$+\frac{\omega}{1}\,\mathrm{ſin}\,u.\,\mathrm{ſin}\,u-\frac{\omega^2}{2}\,\mathrm{ſin}\,u^2.\,\mathrm{ſin}\,2u+\frac{\omega^3}{3}\,\mathrm{ſin}\,u^3.\,\mathrm{ſin}\,3u-\&c.$$

ac ponamus $\omega=-x$, vt ſit $\mathrm{A\,tang}(x+\omega)=0$, eritque

$$\mathrm{A\,tang}\,x=$$
$$\frac{x}{1}\,\mathrm{ſin}\,u.\,\mathrm{ſin}\,u+\frac{x^2}{2}\,\mathrm{ſin}\,u^2.\,\mathrm{ſin}\,2u+\frac{x^3}{3}\,\mathrm{ſin}\,u^3.\,\mathrm{ſin}\,3u+\&c.$$

Cum autem ſit $\mathrm{A\,tang}\,x=90-u=\frac{\pi}{2}-u$;

erit: $x=\cot u=\frac{\mathrm{coſ}\,u}{\mathrm{ſin}\,u}$. Quamobrem erit:

$$\frac{\pi}{2}=u+\mathrm{coſ}\,u.\,\mathrm{ſin}\,u+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cſ}\,u^2.\,\mathrm{ſn}\,2u+\tfrac{1}{3}\,\mathrm{cſ}\,u^3.\,\mathrm{ſn}\,3u+\tfrac{1}{4}\,\mathrm{cſ}\,u^4.\,\mathrm{ſn}\,4u+\&c.$$

quae ſeries eo magis eſt notatu digna, quod quicunque arcus loco u accipiatur, valor ſeriei ſemper prodeat idem $=\frac{\pi}{2}$. Sin autem ſit $\omega=-2x$, ob $\mathrm{Atg}(-x)=-\mathrm{Atg}\,x$; fiet:

$$2\,\mathrm{A\,tang}\,x=$$
$$\frac{2x}{1}\,\mathrm{ſin}\,u.\,\mathrm{ſin}\,u+\frac{4x^2}{2}\,\mathrm{ſin}\,u^2.\,\mathrm{ſin}\,2u+\frac{8x^3}{3}\,\mathrm{ſin}\,u^3.\,\mathrm{ſin}\,3u+\&c.$$

Cum

Cum autem ſit $A\tang x = \frac{\pi}{2} - u$ & $x = \frac{\cos u}{\sin u}$, erit:

$$\pi = 2u + \frac{2}{1}\cos u.\sin u + \frac{2^2}{2}\cos u^2.\sin 2u + \frac{2^3}{3}\cos u^3.\sin 3u + \&c.$$

Sit $u = 45° = \frac{\pi}{4}$; erit $\cos u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$;

$\sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 4u = 0$; $\sin 5u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\sin 6u = -1$;

$\sin 7u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\sin 8u = 0$; $\sin 9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; eritque

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^3}{6} - \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} + \frac{2^5}{10} + \frac{2^5}{11} - \&c.$$

quae ſeries etſi diuergit, tamen ob ſimplicitatem eſt notatu digna.

92. Ponatur in expreſſione generali inuenta:

$$\omega = -x - \frac{1}{x} = \frac{-1}{\sin u.\cos u}, \text{ ob } x = \frac{\cos u}{\sin u}; \text{ erit:}$$

$$A\tang(x+\omega) = A\tang - \frac{1}{x} = -A\tang\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + A\tang x.$$

Hinc ergo obtinebitur ſequens expreſſio:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin u}{1\cos u} + \frac{\sin 2u}{2\cos u^2} + \frac{\sin 3u}{3\cos u^3} + \frac{\sin 4u}{4\cos u^3} + \frac{\sin 5u}{5\cos u^5} + \&c.$$

quae poſito $u = 45°$ dat eandem ſeriem, quam vltimo loco inuenimus. Sin autem ponamus $\omega = -\sqrt{(1+xx)}$

$$\text{ob } x = \frac{\cos u}{\sin u}, \text{ fiet } \omega = -\frac{1}{\sin u}, \&$$

$$A\,\text{tang}\,(x - \sqrt{(1+xx)}) - A\,\text{tang}\,(\sqrt{(1+xx)} - x)$$
$$= -\tfrac{1}{2}A\,\text{tang}\,\frac{1}{x} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - A\,\text{tang}\,x\right) = -\tfrac{1}{2}u,$$

& $A\,\text{tang}\,x = \frac{\pi}{2} - u.$ Hancobrem erit:

$$\frac{\pi}{2} = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{1}\sin u + \tfrac{1}{2}\sin 2u + \tfrac{1}{3}\sin 3u + \tfrac{1}{4}\sin 4u + \&c.$$

Quodsi haec aequatio differentietur erit:

$$0 = \tfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \cos 4u + \cos 5u + \&c.$$

cuius ratio ex natura serierum recurrentium intelligitur.

93. Si simili modo series ante inuentae differentientur, nouae series summabiles reperientur. Ac primo quidem ex serie:

$$A\,\text{tang}\,(1+\omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \&c.$$

sequitur

$$\frac{1}{2+2\omega+\omega^2} = \tfrac{1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^5}{8} - \frac{\omega^6}{16} + \frac{\omega^8}{32} - \&c.$$

quae oritur ex euolutione fractionis $\frac{2-2\omega+\omega^2}{4+\omega^4} = \frac{1}{2+2\omega+\omega^2}$.

Deinde ista series:

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos u \sin u + \tfrac{1}{2}\cos u^2.\sin 2u + \tfrac{1}{3}\cos u^3 \sin 3u + \tfrac{1}{4}\cos u^4 \sin 4u + \&c.$$

per differentiationem dabit:

$$0 = 1 + \cos 2u + \cos u.\cos 3u + \cos u^2.\cos 4u + \cos u^3 \cos 5u + \&c.$$

Denique series $\frac{\pi}{2} = \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin 2u}{2\cos u^2} + \frac{\sin 3u}{3\cos u^3} + \frac{\sin 4u}{4\cos u^4} + \&c.$

dat

$$\text{dat } 0 = \frac{1}{\operatorname{cof} u^2} + \frac{\operatorname{cof} u}{\operatorname{cof} u^3} + \frac{\operatorname{cof} 2u}{\operatorname{cof} u^4} + \frac{\operatorname{cof} 3u}{\operatorname{cof} u^5} + \frac{\operatorname{cof} 4u}{\operatorname{cof} u^6} + \&c.$$

$$\text{feu } 0 = 1 + \frac{\operatorname{cof} u}{\operatorname{cof} u} + \frac{\operatorname{cof} 2u}{\operatorname{cof} u^2} + \frac{\operatorname{cof} 3u}{\operatorname{cof} u^3} + \frac{\operatorname{cof} 4u}{\operatorname{cof} u^4} + \frac{\operatorname{cof} 5u}{\operatorname{cof} u^5} + \&c.$$

94. Imprimis autem expreſſio inuenta:

$$A \operatorname{tang}(x+\omega) =$$

$$A \operatorname{tg} x + \frac{\omega}{1} \operatorname{fin} u. \operatorname{fin} u - \frac{\omega^2}{2} \operatorname{fin} u^2. \operatorname{fin} u + \frac{\omega^3}{3} \operatorname{fin} u^3. \operatorname{fin} 3u - \&c.$$

exiſtente $x = \cot u$ ſeu $u = A \cot x = 90° - A \operatorname{tang} x$ inſeruiet ad angulum ſeu arcum datae cuique tangenti reſpondentem inueniendum. Sit enim propoſita tangens $= t$, quaeraturque in tabulis tangens ad hanc proxime accedens $= x$, cui reſpondeat arcus $= y$; eritque $u = 90° - y$. Tum ponatur $x + \omega = t$, ſeu $\omega = t - x$; eritque arcus quaeſitus:

$$= y + \frac{\omega}{1} \operatorname{fin} u. \operatorname{fin} u - \frac{\omega^2}{2} \operatorname{fin} u^2. \operatorname{fin} 2u + \&c.$$

quae regula tum praecipue eſt vtilis, cum tangens propoſita fuerit admodum magna, ac propterea arcus quaeſitus parum a 90° diſcrepet. His enim caſibus ob tangentes vehementer increſcentes, ſolita methodus interpolationum nimium a veritate abducit. Sit ergo propoſitum hoc exemplum.

EXEMPLUM.

Quaeratur arcus, cuius tangens ſit $= 100$, *poſito radio* $= 1$.

Arcus proxime quaesito aequalis est $89°, 25^{I}$, cuius tangens est $x = 98,217943$ secund.
quae subtrahatur a $t = 100,00000$

remanebit $\omega = 1,782057$

Deinde cum sit $y = 89°, 25^{I}$, erit $u = 0°, 35^{I}$, $2u = 1°, 10^{I}$, $3u = 1°, 45^{I}$, &c. Iam singuli termini per logarithmos inuestigentur.

Ad	$l\omega =$	0, 2509215
add.	$l \sin u =$	8, 0077867
	$l \sin u =$	8, 0077867
	$l\,\omega \sin u . \sin u =$	6, 2664949
		4, 6855749
	subtr. $=$	1, 5809200
Ergo	$\omega \sin u . \sin u =$	38,09956 secund.
Ad	$l\,\omega \sin u^2 =$	6, 2664949
add.	$l\,\omega =$	0, 2509215
	$l \sin 2u =$	8, 3087941
		4, 8262105
	subr. $l\,2 =$	0, 3010300
	$l\,\frac{1}{2}\,\omega^2 \sin u^2 . \sin 2u =$	4, 5251805
	subtr.	4, 6855749
	Remanet	9, 8396056
Ergo	$\frac{1}{2}\,\omega^2 \sin u^2 . \sin 2u =$	0, 69120 secund.

Porro

Porro ad	$l\omega^3 =$	0, 7527645
add.	$l\,\sin u^3 =$	4, 0233601
	$l\,\sin 3u =$	8, 4848479
		3, 2609725
subtr.	$l3 =$	0, 4771213
		2, 7838512
subtr.		4, 6855749
		8, 0982763

Ergo $\frac{1}{3}\omega^3 \sin u^3 \sin 3u =$ 0, 01254 secund.

Denique ad	$l\omega^4 =$	1, 0036860
add.	$l\,\sin u^4 =$	2, 0311468
	$l\,\sin 4u =$	8, 6097341
		1, 6445669
subtr.	$l4 =$	0, 6020600
		1, 0425069
subtr.		4, 6855749
		6, 3569320

Ergo $\frac{1}{4}\omega^4 \sin u^4 \sin 4u =$ 0, 00023 secund.

Hinc:

Hinc:

Termini addendi	Termini ſubtrahendi
38, 09956	0, 69120
0, 01254	0, 00023
38, 11210	0, 69143
ſubtr. 0, 69143	
37, 42067 = 37^{II}, 25^{III}, 14^{IV}, 24^{V}, 36^{VI}.	

Quocirca arcus, cuius tangens centies ſuperat radium erit: 89°, 25^{I}, 37^{II}, 25^{III}, 14^{IV}, 24^{V}, 36^{VI}, neque error ad minuta quarta aſcendit; ſed in minutis tantum quintis ineſſe poteſt, ex quo vere hunc angulum pronunciare poterimus $= 89^{\circ}, 25^{I}, 37^{II}, 25^{III}, 14^{IV}$. Si tangens adhuc maior proponatur, etiamſi fortaſſe ω maius prodeat, tamen ob u angulum adhuc minorem, aeque expedite arcus definiri poterit.

95. Cum hic pro y arcum circuli ſubſtituerimus, nunc functiones reciprocas in locum y ponamus, cuiusmodi ſunt $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, &c. Sit igitur $y = \sin x$, poſitoque $x + \omega$ loco x, fiet: $z = \sin(x+\omega)$, atque aequatio

$$z = y + \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^2\, ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3\, d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4\, d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ob $\frac{dy}{dx} = \cos x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$; &c. dabit

$$\sin(x+\omega) = \sin x + \omega \cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x + \&c.$$

&

& sumto ω negatiuo erit:

$$\sin(x-\omega) = \sin x - \omega \cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x + \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x - \&c.$$

Quod si vero statuatur $y = \cos x$,

ob $\frac{dy}{dx} = -\sin x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\cos x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \sin x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \cos x$; &c.

erit:

$$\cos(x+\omega) = \cos x - \omega \sin x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x + \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \cos x - \&c.$$

& facto ω negatiuo erit:

$$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega \sin x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \cos x + \&c.$$

96. Vsus harum formularum eximius est cum in condendis, tum interpolandis tabulis sinuum & cosinuum. Si enim cogniti fuerint sinus & cosinus cuiuspiam arcus x, ex iis facili negotio sinus & cosinus angulorum $x+\omega$ & $x-\omega$ inueniri possunt, siquidem differentia ω fuerit satis exigua: hoc enim casu series inuentae vehementer couergunt. Ad hoc vero necesse est, vt arcus ω in partibus radii exprimatur; quod cum arcus 180° sit:

3, 14159265358979323846

facile fiet: erit enim diuisione per 180 instituta

arcus 1° = 0, 01745329251994329576 9

arcus 1' = 0, 00029088820866572159 6

arcus 10'' = 0, 00004848136811095359 9

EXEMPLUM I.

Inuenire sinus & cosinus angulorum 45°, 1', & 44°, 59', ex datis sinu & cosinu anguli 45°, quorum vterque est

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071067811865.$$

 Cum

Cum igitur ſit:

$\sin x = \cos x = 0,7071067811865$

atque $\omega = 0,0002908882086$

erit ad multiplicationes facilius inſtituendas:

$2\omega = 0,0005817764173$
$3\omega = 0,0008726646259$
$4\omega = 0,0011635528346$
$5\omega = 0,0014544410432$
$6\omega = 0,0017453292519$
$7\omega = 0,0020362174605$
$8\omega = 0,0023271056692$
$9\omega = 0,0026179938779$

Ergo $\omega \sin x$ & $\omega \cos x$ hoc modo inuenietur:

7	0,00020362174605
0	. . . .
7	0,0000020362174
1	. . 2908882
0	. . .
6	. . 174532
7	. . 20362
8	. . 2372
1	. . . 29
1	. . . 2
8	. . . 2
6	. . . 0

$\omega \sin x = \omega \cos x = 0,00020568902490$

Ergo $\frac{1}{2}\omega \cos x = 0,00010284451245$

per

per ω . 1 . 0, 00000002908882
0 . . . .
2 . . 58177
8 . . 23271
4 . . 1163
4 . . 116
5 . . . 14

$\frac{1}{2}\omega^2 \cos x =$ 0, 00000002991625

$\frac{1}{6}\omega^2 \cos x =$ 0, 00000000997208

per ω . 9 . 0, 00000000000261
9 . . . 26
7 . . . 2

$\frac{1}{6}\omega^3 \cos x =$ 0, 00000000000290

Ergo ad sin 45°, 1', inueniendum:

Ad $\sin x =$ 0, 7071067811865
add. $\omega \cos x =$ 2056890249

0, 7073124702114
subtr. $\frac{1}{2}\omega^2 \sin x =$ 299162

0, 7073124402952
subtr. $\frac{1}{6}\omega^3 \cos x =$ 29

sin 45°, 1', = 0, 7073124402923 = cos 44°, 59'.

 At

At ad $\cos 45^\circ, 1^{\mathrm{I}}$, inueniendum:

$$\begin{array}{rl} A\cos x = & 0,7071067811865 \\ \text{fubr.}\quad \omega \sin x = & 2056890249 \\ \hline & 0,7069010921616 \\ \text{fubtr.}\quad \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x = & 299162 \\ \hline & 0,7069010622454 \\ \text{add.}\quad \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin x = & 29 \\ \hline \end{array}$$

$$\cos 45^\circ, 1^{\mathrm{I}}, = 0,7069010622483 = \sin 44^\circ, 59^{\mathrm{I}}.$$

EXEMPLUM II.

Ex datis finu & cofinu arcus $67^\circ, 30^{\mathrm{I}}$, *inuenire finus & cofinus arcuum* $67^\circ, 31^{\mathrm{I}}$, *&* $67^\circ, 29^{\mathrm{I}}$.

Abfoluamus hunc calculum in fractionibus decimalibus, tantum ad 7 notas, vti tabulae vulgares conftrui folent, ficque negotium facile per logarithmos conficietur. Cum fit $x = 67^\circ, 30^{\mathrm{I}}$, & $\omega = 0,000290888$; erit: $l\omega = 6,4637259$ &

$$\begin{array}{rlcrl} l\sin x = & 9,9656153 & ; & l\cos x = & 9,5828397 \\ l\omega = & 6,4637259 & ; & l\omega = & 6,4637259 \\ \hline l\omega\sin x = & 6,4293412 & ; & l\omega\cos x = & 6,0465656 \\ l\tfrac{1}{2}\omega = & 6,1626959 & ; & l\tfrac{1}{2}\omega = & 6,1626959 \\ \hline l\tfrac{1}{2}\omega^2\sin x = & 2,5920371 & ; & l\tfrac{1}{2}\omega^2\cos x = & 2,2092615 \end{array}$$

ergo:

ergo:

$\omega \sin x = 0,00026874$; $\omega \cos x = 0,00011232$

$\frac{1}{2}\omega^2 \sin x = 0,00000004$; $\frac{1}{2}\omega^2 \cos x = 0,00000001$

vnde fit:

$\sin 67°, 31^I = 0,9239908$; $\cos 67°, 31^I = 0,3824147$

$\sin 67°, 29^I = 0,9237681$; $\cos 67°, 29^I = 0,3829522$

vbi nequidem terminis $\frac{1}{2}\omega^2 \sin x$ & $\frac{1}{2}\omega^2 \cos x$ erat opus.

97. Ex feriebus quas fupra inuenimus:

$\sin(x+\omega) = \sin x + \omega \cos x - \frac{1}{2}\omega^2 \sin x - \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x + \&c.$

$\cos(x+\omega) = \cos x - \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x + \frac{1}{6}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x - \&c.$

$\sin(x-\omega) = \sin x - \omega \cos x - \frac{1}{2}\omega^2 \sin x + \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x - \&c.$

$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x - \frac{1}{6}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x + \&c.$

fequitur per combinationem fore:

$$\frac{\sin(x+\omega) + \sin(x-\omega)}{2} =$$

$$\sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x - \frac{1}{720}\omega^6 \sin x + \&c. = \sin x \cos \omega$$

Et $$\frac{\sin(x+\omega) - \sin(x-\omega)}{2} =$$

$$\omega \cos x - \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{120}\omega^5 \cos x - \&c. = \cos x \sin \omega$$

vnde prodeunt feries pro finibus & cofinibus iam fupra inuentae:

$$\cos \omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{24}\omega^4 - \frac{1}{720}\omega^6 + \&c.$$

$$\sin \omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5 - \frac{1}{5040}\omega^7 + \&c.$$

quae eaedem feries ex primis ponendo $x = 0$ confequuntur; cum enim fit $\cos x = 1$ & $\sin x = 0$ prima feries *$\sin \omega$*, fecunda vero *$\cos \omega$* exhibebit.

 98.

98. Ponamus nunc quoque $y = \text{tang}\, x$, vt sit $z = \text{tang}\,(x + \omega)$, erit ob

$$y = \frac{\sin x}{\cos x};\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2};\quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{\sin x}{\cos x^3};$$

$$\frac{d^3y}{2dx^3} = \frac{1}{\cos x^2} + \frac{3\sin x^2}{\cos x^4} = \frac{3}{\cos x^4} - \frac{2}{\cos x^2};$$

$$\frac{d^4y}{2.4dx^4} = \frac{3\sin x}{\cos x^5} - \frac{\sin x}{\cos x^3};$$

$$\frac{d^5y}{2.4dx^5} = \frac{15}{\cos x^6} - \frac{15}{\cos x^4} + \frac{2}{\cos x^2};$$

vnde sequitur fore:

$$\text{tang}(x+\omega) = \text{tg}\, x + \frac{\omega}{\cos x^2} + \frac{\omega^2 \sin x}{\cos x^3} + \frac{\omega^3}{\cos x^4} + \frac{\omega^4 \sin x}{\cos x^5}$$
$$- \frac{2\omega^3}{3\cos x^2} - \frac{\omega^4 \sin x}{3\cos x^3};$$

cuius formulae ope ex data cuiusuis anguli tangente inveniri possunt tangentes angulorum proximorum. Quia vero superior series est geometrica, ea in vnam summam collecta erit:

$$\text{tang}(x+\omega) = \text{tg}\, x + \frac{\omega + \omega^2\, \text{tg}\, x}{\cos x^2 - \omega^2} - \frac{2\omega^3}{3\cos x^2} - \frac{\omega^4 \sin x}{3\cos x^3}\ \&c.$$

$$\text{seu}\quad \text{tang}(x+\omega) = \frac{\sin x \cos x + \omega}{\cos x^2 - \omega^2} - \frac{2\omega^3}{3\cos x^2} - \frac{\omega^4 \sin x}{3\cos x^3}\ \&c.$$

quae formula in hunc finem commodius adhibetur.

99. Similes expressiones quoque pro logarithmis sinuum, cosinuum & tangentium inueniri possunt. Sit enim $y =$ logarithmo sinus anguli x, quod ita exprimamus

mus $y = l\sin x$, & $z = l\sin(x+\omega)$, ob $\frac{dy}{dx} = \frac{n\cos x}{\sin x}$; erit: $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-n}{\sin x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{+n\cos x}{\sin x^3}$ &c. vnde fiet:

$$z = l\sin(x+\omega) = l\sin x$$

$$+ \frac{n\omega\cos x}{\sin x} - \frac{n\omega^2}{2\sin x^2} + \frac{n\omega^3\cos x}{3\sin x^3} \text{ \&c.}$$

vbi n denotat numerum, per quem logarithmi hyperbolici multiplicari debent, vt prodeant logarithmi propositi. Sin autem sit

$$y = l\,\text{tang}\,x \quad \& \quad z = l\,\text{tang}(x+\omega)$$

fiet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\sin x\cos x} = \frac{2n}{\sin 2x}; \quad \frac{ddy}{2\,dx^2} = \frac{-2n\cos 2x}{(\sin 2x)^2};$$

ideoque

$$l\,\text{tang}(x+\omega) = l\,\text{tang}\,x + \frac{2n\omega}{\sin 2x} - \frac{2n\omega^2\cos 2x}{(\sin 2x)^2} \text{ \&c.}$$

quarum formularum ope logarithmi sinuum & tangentium interpolari possunt.

100. Ponamus denotare y arcum cuius sinus logarithmus sit $= x$, seu vt sit $y = A.\,l\sin x$, & z esse arcum, cuius sinus logarithmus sit $= x+\omega$, seu $z = A.\,l\sin(x+\omega)$; erit $x = l\sin y$, & $\frac{dx}{dy} = \frac{n\cos y}{\sin y}$, vnde $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{n\cos y}$; erit:

ddy

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{dy}{n\cos y^2} = \frac{dx \sin y}{n^2 \cos y^3}; \quad \text{ergo} \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin y}{n^2 \cos y^3}:$$

Consequenter

$$z = y + \frac{\omega \sin y}{n \cos y} + \frac{\omega^2 \sin y}{2n^2 \cos y^3} + \&c.$$

Simili modo si logarithmus cosinus detur, expressio reperietur. Sin autem sit

$$y = A.l\,\text{tang}\,x \quad \& \quad z = A.l\,\text{tang}\,(x+\omega).$$

Eum sit $x = l\,\text{tang}\,y$; fiet:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n}{\sin y \cos y}, \quad \& \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y \cos y}{n} = \frac{\sin 2y}{2n};$$

quare

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{2\,dy \cos 2y}{2n} = \frac{dx \sin 2y \cos 2y}{2nn}$$

&

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin 2y \cos 2y}{2nn} = \frac{\sin 4y}{4nn}; \quad \frac{d^3y}{dx^5} = \frac{\sin 2y.\cos 4y}{2n^3}\ \&c.$$

hinc

$$z = y + \frac{\omega \sin 2y}{2n} + \frac{\omega^2 \sin 2y \cos 2y}{4nn} + \frac{\omega^3 \sin 2y.\cos 4y}{12n^3} + \&c.$$

101. Quoniam vsus harum expressionum in condendis tabulis logarithmorum sinuum & tangentium ex antecedentibus facile perspici potest, his diutius non immorabimur. Considerémus ergo adhuc huiusmodi valorem:

$y =$

$y = e^x \sin nx$; sitque $z = e^{x+\omega} \sin n(x+\omega)$

quia est

$$\frac{dy}{dx} = e^x (\sin nx + n \cos nx)$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = e^x ((1-nn) \sin nx + 2n \cos nx)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x ((1-3nn) \sin nx + n(3-nn) \cos nx)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^x ((1-6nn+n^4) \sin nx + n(4-4nn) \cos nx)$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = e^x ((1-10nn+5n^4) \sin nx + n(5-10nn+n^4) \cos nx)$$

His substitutis & diuisione per e^x instituta erit:

$$e^\omega \sin n(x+\omega) = \sin nx + \omega \sin nx + \frac{(1-nn)}{2} \omega^2 \sin nx$$

$$+ n\omega \cos nx + \frac{2n\omega^2}{2} \cos nx$$

$$+ \frac{(1-3nn)}{6} \omega^3 \sin nx + \frac{(1-6nn+n^4)}{24} \omega^4 \sin nx + \&c.$$

$$+ \frac{n(3-nn)}{6} \omega^3 \cos nx + \frac{n(4-4nn)}{24} \omega^4 \cos nx + \&c.$$

102. Hinc plurima egregia corollaria deduci possunt; sufficiat autem nobis haec annotasse.

Si fuerit $x = 0$ erit:

$$e^\omega \sin n\omega = n\omega$$

$$+ \frac{2n\omega^2}{2} + \frac{n(3-nn)}{6} \omega^3 + \frac{n(4-4nn)}{24} \omega^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120} \omega^5 + \&c.$$

Si ſit $\omega = -x$, ob $\sin n(x+\omega) = 0$; erit:

$$\operatorname{tang} nx = \frac{nx - \frac{2n}{2}x^2 + \frac{n(3-nn)}{6}x^3 - \frac{n(4-4nn)}{24}x^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}x^5}{1 - x + \frac{(1-nn)}{2}x^2 - \frac{(1-3nn)}{6}x^3 + \frac{(1-6nn+n^4)}{24}x^4 - \&c.}.$$

Generaliter vero ſi ſit $n = 1$ habebitur:

$$e^{\omega}\sin(x+\omega) = \sin x\,(1 + \omega - \tfrac{1}{3}\omega^3 - \tfrac{1}{6}\omega^4 - \tfrac{1}{30}\omega^5 + \tfrac{1}{630}\omega^7 + \&c.)$$
$$+ \omega\cos x\,(1 + \omega + \tfrac{1}{3}\omega^2 - \tfrac{1}{30}\omega^4 - \tfrac{1}{90}\omega^5 - \tfrac{1}{630}\omega^6 + \&c.)$$

Sin autem ſit $n = 0$, ob $\sin n(x+\omega) = n(x+\omega)$, & $\sin nx = nx$, atque $\cos nx = 1$, ſi vbique per n diuidatur, prodibit:

$$e^{\omega}(x+\omega) = x + \omega x + \tfrac{1}{2}\omega^2 x + \tfrac{1}{6}\omega^3 x + \tfrac{1}{24}\omega^4 x + \&c.$$
$$+ \omega + \omega^2 + \tfrac{1}{2}\omega^3 + \tfrac{1}{6}\omega^4 + \tfrac{1}{24}\omega^5 + \&c.$$

cuius ſeriei ratio eſt manifeſta.

CAPUT

CAPUT V.

INUESTIGATIO SUMMAE SERIERUM EX TERMINO GENERALI.

103.

Sit Seriei cuiusque terminus generalis $= y$, respondens indici x, ita vt y ſit functio quaecunque ipſius x. Sit porro Sy ſumma ſeu terminus ſummatorius ſeriei, exprimens aggregatum omnium terminorum a primo ſeu alio termino fixo vsque ad y incluſiue. Computabimus autem ſummas ſerierum a termino primo, vnde ſi ſit $x = 1$, dabit y terminum primum, atque Sy hunc y terminum primum exhibebit: ſin autem ponatur $x = 0$, terminus ſummatorius Sy in nihilum abire debet, propterea quod nulli termini ſummandi adſunt. Quocirca terminus ſummatorius Sy eiusmodi erit functio ipſius x, quae euaneſcat poſito $x = 0$.

104. Si terminus generalis y ex pluribus partibus conſtet, vt ſit $y = p + q + r +$ &c. tum ipſa ſeries conſiderari poterit tanquam conflata ex pluribus aliis ſeriebus, quarum termini generales ſint p, q, r, &c. Hinc ſi ſingularum iſtarum ſerierum ſummae fuerint cognitae, ſimul ſeriei propoſitae ſumma poterit aſſignari; erit enim aggregatum ex ſummis ſingularum ſerierum. Hancobrem ſi ſit $y = p + q + r +$ &c. erit $Sy = Sp + Sq + Sr +$ &c. Cum igitur ſupra exhibue-

buerimus ſummas ſerierum, quarum termini generales ſint quaecunque poteſtates ipſius x, habentes exponentes integros affirmatiuos; hinc cuiusque ſeriei, cuius terminus generalis eſt $ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} +$ &c. denotantibus α, β, γ, &c. numeros integros affirmatiuos, ſeu cuius terminus generalis eſt functio rationalis integra ipſius x, terminus ſummatorius inueniri poterit.

105. Sit in ſerie, cuius terminus generalis ſeu exponenti x reſpondens eſt $= y$, terminus hunc praecedens ſeu exponenti $x-1$ reſpondens $= v$, quoniam v oritur ex y, ſi loco x ſcribatur $x-1$; erit:

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \text{\&c.}$$

Si igitur y fuerit terminus generalis huius ſeriei

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x-1 & x \\ a & +b & +c & +d+ & \ldots & +v & +y \end{matrix}$$

huiusque ſeriei terminus indici o reſpondens fuerit $= A$, erit v, quatenus eſt functio ipſius x, terminus generalis huius ſeriei:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & x \\ A & +a & +b & +c & +d+ & \ldots & +v \end{matrix}$$

vnde ſi Sv denotet ſummam huius ſeriei, erit $Sv = Sy - y + A$. Sicque poſito $x = 0$, quia fit $Sy = 0$ & $y = A$, quoque Sv euaneſcet.

106. Cum igitur ſit $v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} +$ &c. erit per ante oſtenſa:

$Sv =$

$$Sv = Sy - S\frac{dy}{dx} + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

atque ob $Sv = Sy - y + A$, erit:

$$y - A = S\frac{dy}{dx} - S\frac{ddy}{2dx^2} + S\frac{d^3y}{6dx^3} - S\frac{d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ideoque habebitur:

$$S\frac{dy}{dx} = y - A + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

Si ergo habeantur termini ſummatorii ſerierum, quarum termini generales ſunt $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. ex iis obtinebitur terminus ſummatorius ſeriei, cuius terminus generalis eſt $\frac{dy}{dx}$. Quantitas vero conſtans A ita debet eſſe comparata, vt facto $x = 0$ terminus ſummatorius $S\frac{dy}{dx}$ euaneſcat; hacque conditione facilius determinatur, quam ſi diceremus, eam eſſe terminum indici o reſpondentem in ſerie, cuius terminus generalis ſit $= y$.

107. Ex hoc fonte ſummae poteſtatum numerorum naturalium inueſtigari ſolent. Sit enim $y = x^{n+1}$; quoniam fit $\frac{dy}{dx} = (n+1)x^n$; $\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{(n+1)n}{1.\ 2}x^{n-1}$;

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-2};\quad \frac{d^4y}{24dx^4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-3}$$

&c.

 erit

erit his valoribus ſubſtitutis:

$$(n+1)Sx^n = x^{n+1} - A + \frac{(n+1)n}{1.\,2}Sx^{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\,2.\,3}Sx^{n-2} + \&c.$$

atque ſi vtrinque per $n+1$ diuidatur; erit:

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{n}{2}Sx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2.\,3}Sx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\,3.\,4}Sx^{n-3} + \&c.$$
$$- \text{Conſt.}$$

quae conſtans ita accipi debet, vt poſito $x = 0$, totus terminus ſummatorius euaneſcat. Ope huius ergo formulae ex iam cognitis ſummis poteſtatum inferiorum, quarum termini generales ſunt x^{n-1}, x^{n-2}, &c. inueniri poterit ſumma poteſtatum ſuperiorum termino generali x^n expreſſarum.

108. Si in hac expreſſione n denotet numerum integrum affirmatiuum, numerus terminorum erit finitus. Atque adeo hinc ſumma infinitarum poteſtatum ſi $n = 0$, abſolute cognoſcetur; erit enim: $S.x^0 = x$.
Hacque cognita ad ſuperiores progredi licebit, poſito enim $n = 1$; fiet:

$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}Sx^0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

ſi porro ponatur $n = 2$ prodibit:

$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + Sx - \frac{1}{3}Sx^0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$; deinde

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}Sx^2 - Sx + \frac{1}{4}Sx^0 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{2}Sx^3 - \frac{4}{2}Sx^2 + Sx - \frac{1}{5}Sx^0$ ſiue

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x.$

Sic-

Sicque porro quarumvis poteſtatum ſuperiorum ſummae ſucceſſiuae ex inferioribus colligentur; hoc autem facilius per ſequentes modos praeſtabitur.

109. Quoniam ſupra inuenimus eſſe:

$$S\frac{dy}{dx} = y + \tfrac{1}{2}S\frac{ddy}{dx^2} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^3y}{dx^3} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^4y}{dx^4} - \tfrac{1}{120}S\frac{d^5y}{dx^5} + \&c.$$

Si ponamus $\frac{dy}{dx} = z$; fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2}$, &c. tum vero ob $dy = zdx$, erit y quantitas, cuius differentiale eſt $= zdx$, quod hoc modo indicamus, vt ſit $y = \int zdx$. Quanquam autem haec inuentio ipſius y ex dato z a calculo integrali pendet, tamen hic iam iſta forma $\int zdx$ vti poterimus, ſi quidem pro z alias ipſius x functiones non ſubſtituamus, niſi eiusmodi, vt functio illa, cuius differentiale eſt $= zdx$, ex praecedentibus exhiberi queat. His igitur valoribus ſubſtitutis erit:

$$Sz = \int zdx + \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \&c.$$

adiiciendo eiusmodi conſtantem, vt poſito $x = 0$ ipſa ſumma Sz euaneſcat.

110. Subſtituendo autem loco y in ſuperiori expreſſione litteram z, vel quod eodem redit differentiando iſtam aequationem erit:

$$S\frac{dz}{dx} = z + \tfrac{1}{2}S\frac{ddz}{dx^3} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

ſin

ſin autem loco y ponatur $\frac{dz}{dx}$; erit:

$$S\frac{ddz}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} + \frac{1}{24}S\frac{d^5z}{dx^5} - \&c.$$

Similique modo ſi pro y ſucceſſiue ponantur valores $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. reperietur:

$$S\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2} + \frac{1}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{6}S\frac{d^5z}{dx^5} + \frac{1}{24}S\frac{d^6z}{dx^6} - \&c.$$

$$S\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{d^3z}{dx^4} + \frac{1}{2}S\frac{d^5z}{dx^5} - \frac{1}{6}S\frac{d^6z}{dx^6} + \frac{1}{24}S\frac{d^7z}{dx^7} - \&c.$$

ſicque porro in infinitum.

111. Si nunc iſti valores pro $S\frac{dz}{dx}$; $S\frac{ddz}{dx}$; $S\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. ſucceſſiue ſubſtituantur in expreſſione:

$$Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \frac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \&c.$$

inuenietur expreſſio pro Sz, quae conſtabit ex his terminis $\int z\,dx$; z; $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. quorum coefficientes facilius ſequenti modo inueſtigabuntur. Ponatur

$$Sz = \int z\,dz + \alpha z + \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\gamma ddz}{dx^2} + \frac{\delta d^3z}{dx^3} + \frac{\varepsilon d^4z}{dx^4} + \&c.$$

atque pro his terminis ſui valores ſubſtituantur, quos obtinent ex praecedentibus ſeriebus, ex quibus eſt:

$\int z\,dx$

$$\int z\,dx = Sz - \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} + \frac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{120}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$\alpha z = +\alpha S\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{2}S\frac{ddz}{dx^2} + \frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\frac{\beta dz}{dx} = \beta S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$\frac{\gamma ddz}{dx^2} = \gamma S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\frac{\delta d^3z}{dx^3} = \delta S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

qui valores additi, cum producere debeant Sz, coefficientes α, β, γ, δ, &c. ex sequentibus aequationibus definientur:

$$\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120} = 0$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\beta}{24} + \frac{\alpha}{120} - \frac{1}{720} = 0$$

$$\zeta - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720} + \frac{1}{5040} = 0$$

&c.

112. Ex his ergo aequationibus ſucceſſiue valores omnium litterarum α, β, γ, δ, &c. definiri poterunt, reperietur autem:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720} = 0$$

&c.

ſicque vlterius progrediendo reperientur continuo termini alterni euaneſcentes. Litterae ergo ordine tertia, quinta, ſeptima, &c. omnesque impares erunt $= 0$, excepta prima, quo ipſo haec valorum ſeries contra legem continuitatis impingere videtur. Quamobrem eo magis neceſſe eſt, vt rigide demonſtretur, omnes terminos impares praeter primum neceſſario euaneſcere.

113. Quoniam ſingulae litterae ſecundum legem conſtantem ex praecedentibus determinantur, eae ſeriem recurrentem inter ſe conſtituent. Ad quam explicandam concipiatur iſta ſeries:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

cu-

cuius valor ſit $=V$; atque manifeſtum eſt hanc ſeriem recurrentem oriri ex euolutione huius fractionis:

$$V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \&c.}$$

atque ſi iſta fractio alio modo in ſeriem infinitam ſecundum poteſtates ipſius u progredientem reſolui queat, neceſſe eſt, vt ſemper eadem ſeries:

$$V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \&c.$$

reſultet: hocque modo alia lex, qua iſti iidem valores α, β, γ, δ, &c. determinantur, eruetur.

114. Quoniam, ſi e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitati aequatur, erit:

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{120}u^5 + \&c.$$

erit: $\frac{1-e^{-u}}{u} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \&c.$

ideoque $V = \frac{u}{1-e^{-u}}$. Nunc extinguatur ex ſerie ſecundus terminus $\alpha u = \frac{1}{2}$, vt ſit:

$$V - \frac{1}{2}u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

erit: $V - \frac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{2}u(1+e^{-u})}{1-e^{-u}}$. Multiplicentur numerator ac denominator per $e^{\frac{1}{2}u}$, eritque

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{u\left(e^{\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u}\right)}{2\left(e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u}\right)},$$

& quantitatibus $e^{\frac{1}{2}u}$ & $e^{-\frac{1}{2}u}$ in ſeries conuerſis fiet:

 V-

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \&c.}{2(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2.4.6} + \frac{u^4}{2.4.6.8.10} + \&c.)}$$

siue

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \frac{u^8}{2.4\ldots16} + \&c.}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6\ldots14} + \frac{u^8}{4.6\ldots18} + \&c.}$$

115. Cum igitur in hac fraction potestates impares prorsus desint, in eius quoque euolutione potestates impares omnino nullae ingredientur; quare cum $V - \frac{1}{2}u$ aequetur isti seriei:

$$1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

coefficientes imparium potestatum γ, ε, η, ι, &c. omnes euanescent. Sicque ratio manifesta est, cur in serie:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \&c.$$

termini ordine pares omnes praeter secundum sint $= 0$, neque tamen lex continuitatis vim patiatur. Erit ergo

$$V = 1 + \frac{1}{2}u + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \varkappa u^{10} + \&c.$$

litterisque β, δ, ζ, θ, $\varkappa$, &c. per euolutionem superioris fractionis determinatis, obtinebimus terminum summatorium Sz seriei, cuius terminus generalis est $= z$, indici x respondens, hoc modo expressum:

$$Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\delta d^3 z}{dx^3} + \frac{\zeta d^5 z}{dx^5} + \frac{\theta d^7 z}{dx^7} + \&c.$$

116. Quia series $1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \&c.$ oritur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \&c.}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6.8.10.12.14} + \&c.}$$

litterae β, δ, ζ, θ, &c. hanc legem tenebunt, vt sit:

$$\beta = \frac{1}{2.4} - \frac{1}{4.6}$$

$$\delta = \frac{1}{2.4.6.8} - \frac{\beta}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10}$$

$$\zeta = \frac{1}{2.4.6.12} - \frac{\delta}{4.6} - \frac{\beta}{4.6.8.10} - \frac{1}{4.6...14}$$

$$\theta = \frac{1}{2.4...16} - \frac{\zeta}{4.6} - \frac{\delta}{4.6.8.10} - \frac{\beta}{4.6...14} - \frac{1}{4.6...18}.$$

Hi autem valores alternatiue fiunt affirmatiui & negatiui.

117. Si igitur harum litterarum alternae capiantur negatiue, ita vt sit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z - \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\delta d^3z}{dx^3} - \frac{\zeta d^5z}{dx^5} + \frac{\theta d^7z}{dx^7} - \&c.$$

litterae β, δ, ζ, θ, &c. definientur ex hac fractione:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \frac{u^8}{2.4...16} - \&c.}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6...14} + \frac{u^8}{4.6...18} - \&c.}$$

eam euoluendo in feriem:

$$1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \&c.$$

quocirca erit:

$$\beta = \frac{1}{4.6} - \frac{1}{2.4}$$

$$\delta = \frac{\beta}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{4.6} - \frac{\beta}{4.6.8.10} + \frac{1}{4.6\ldots14} - \frac{1}{2.4\ldots12}$$

&c.

nunc autem omnes termini fient negatiui.

118. Ponamus ergo $\beta = -A$; $\delta = -B$; $\zeta = -C$; &c. vt fit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{A\,dz}{dx} - \frac{B\,d^3z}{dx^3} + \frac{C\,d^5z}{dx^5} - \frac{D\,d^7z}{dx^7} + \&c.$$

atque ad litteras A, B, C, D, &c. definiendas confideretur haec feries:

$$1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - Eu^{10} - \&c.$$

quae oritur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \frac{u^8}{2.4\ldots16} - \&c.}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6\ldots18} + \frac{u^8}{4.6\ldots18} - \&c.}$$

vel confideretur ifta feries:

$$\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c. = s$$

quae oritur ex euolutione huius fractionis:

$s =$

$$s = \frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \&c.}{u - \frac{u^3}{4.6} + \frac{u^5}{4.6.8.10} - \frac{u^7}{4.6...14} + \&c.}$$

Cum autem ſit:

$$\operatorname{cof} \tfrac{1}{2} u = 1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \&c.$$

$$\operatorname{fin} \tfrac{1}{2} u = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2.4.6} + \frac{u^5}{2.4.6.8.10} - \frac{u^7}{2.4...14} + \&c.$$

ſequitur fore: $s = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} u}{2 \operatorname{fin} \frac{1}{2} u} = \frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} u.$

Quare ſi cotangens arcus $\frac{1}{2} u$ in ſeriem conuertatur, cuius termini ſecundum poteſtates ipſius u procedant, ex ea cognoſcentur valores litterarum A, B, C, D, E, &c.

119. Cum igitur ſit $s = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} u$; erit $\frac{1}{2} u = A \cot 2s$, & differentiando erit $\frac{1}{2} du = \frac{-2ds}{1+4ss}$ ſeu $4ds + du + 4ssdu = 0$, ſiue $\frac{4ds}{du} + 1 + 4ss = 0$.

Quia autem eſt: $s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - \&c.$

erit:

$$\frac{4ds}{du} = -\frac{4}{uu} - 4A - 3.4Bu^2 - 5.4Cu^4 - 7.4Du^6 - \&c.$$

$$1 = \qquad 1$$

$$4ss = \frac{4}{uu} - 8A - 8Bu^2 - 8Cu^4 - 8Du^6 - \&c.$$
$$+ 4A^2u^2 + 8ABu^4 + 8ACu^6 + \&c.$$
$$+ 4BBu^6 + \&c.$$

per-

perductis his terminis homogeneis ad cyphram fiet:

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{A^2}{5}$$

$$C = \frac{2AB}{7}$$

$$D = \frac{2AC + BB}{9}$$

$$E = \frac{2AD + 2BC}{11}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{13}$$

$$G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{15}$$

$$H = \frac{2AG + 2BF + 2CE + DD}{17}$$

&c.

Ex quibus formulis iam manifesto liquet, singulos hos valores esse affirmatiuos.

120. Quoniam vero denominatores horum valorum fiunt vehementer magni, calculumque non mediocriter impediunt; loco litterarum A, B, C, D, &c.

has

has nouas introducamus:

$$A = \frac{\alpha}{1.2.3}$$

$$B = \frac{\beta}{1.2.3.4.5}$$

$$C = \frac{\gamma}{1.2.3\ldots.7}$$

$$D = \frac{\delta}{1.2.3\ldots\ldots9}$$

$$E = \frac{\varepsilon}{1.2.3\ldots\ldots\ldots11} \quad \&c.$$

Atque reperietur fore:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{2}{3}\alpha^2$$

$$\gamma = 2.\frac{3}{3}\alpha\beta$$

$$\delta = 2.\frac{4}{3}\alpha\gamma + \frac{8.7}{4.5}\beta^2$$

$$\varepsilon = 2.\frac{5}{3}\alpha\delta + 2.\frac{10.\ 9.\ 8}{1.\ldots.5}\beta\gamma$$

$$\zeta = 2.\frac{12}{1.2.3}\alpha\varepsilon + 2.\frac{12.11.10}{1.\ldots\ldots5}\beta\delta + \frac{12.11.10.9.8}{1.\ldots\ldots\ldots7}\gamma\gamma$$

$$\eta = 2.\frac{14}{1.2.3}\alpha\zeta + 2.\frac{14.13.12}{1.\ldots\ldots5}\beta\varepsilon + 2.\frac{14.13.12.11.10}{1\ldots\ldots\ldots\ldots7}\gamma\delta$$

&c.

121. Commodius autem vtemur his formulis:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha\alpha}{2}$$

$$\gamma = \frac{6}{3} \cdot \alpha\beta$$

$$\delta = \frac{8}{3} . \alpha\gamma + \frac{8.\ 7.\ 6}{3.\ 4.\ 5} \cdot \frac{\beta\beta}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{10}{3} . \alpha\delta + \frac{10.\ 9.\ 8}{3.\ 4.\ 5} . \beta\gamma$$

$$\zeta = \frac{12}{3} . \alpha\varepsilon + \frac{12.11.10}{3.\ 4.\ 5} . \beta\delta + \frac{12.11.10.9.8}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} \cdot \frac{\gamma\gamma}{2}$$

$$\eta = \frac{14}{3} . \alpha\zeta + \frac{14.13.12}{3.\ 4.\ 5} . \beta\varepsilon + \frac{14.13.12.11.10}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} . \gamma\delta$$

$$\theta = \frac{16}{3}\ \alpha\eta + \frac{16.15.14}{3.\ 4.\ 5} . \beta\zeta + \frac{16.15\ .\ .\ 12}{3.4.\ .\ .\ .\ 7} . \gamma\varepsilon + \frac{16.15\ .\ .\ 10}{3.4.\ .\ .\ .\ .\ 9} \cdot \frac{\delta\delta}{2}$$

&c.

Ex hac igitur lege, ſecundum quam calculus non difficulter inſtituitur, ſi inuenti fuerint valores litterarum α, β, γ, δ, &c. tum ſeriei cuiuscunque, cuius terminus generalis ſeu indici x conueniens fuerit $= z$, terminus ſummatorius ita exprimetur, vt ſit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2} z + \frac{\alpha\,dz}{1.2.3.dx} - \frac{\beta\,d^3 z}{1.2.3.4.5\,dx^3} + \frac{\gamma\,d^5 z}{1.2.\ldots.7\,dx^5}$$

$$- \frac{\delta\,d^7 z}{1.2.\ldots.9\,dx^7} + \frac{\varepsilon\,d^9 z}{1.2.\ldots.11\,dx^9} - \frac{\zeta\,d^{11} z}{1.2.\ldots.13\,dx^{11}} + \&c.$$

iſtae autem litterae α, β, γ, δ, &c. ſequentes valores habere inuentae ſunt:

ſiue

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad 1.2\,\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{1}{6} \qquad 1.2.3\,\beta = 1$$

$$\gamma = \frac{1}{6} \qquad 1.2.3.4\,\gamma = 4$$

$$\delta = \frac{3}{10} \qquad 1.2.3.4.5\,\delta = 36$$

$$\varepsilon = \frac{5}{6} \qquad 1.2.3\,.\,.\,6\,\varepsilon = 600$$

$$\zeta = \frac{691}{210} \qquad 1.2.3\,.\,.\,7\,\zeta = 24.691$$

$$\eta = \frac{35}{2} \qquad 1.2.3\,.\,.\,8\,\eta = 20160.35$$

$$\theta = \frac{3617}{30} \qquad 1.2.3\,.\,.\,9\,\theta = 12096.3617$$

$$\iota = \frac{43867}{42} \qquad 1.2.3\,.\,.\,10\,\iota = 86400.43867$$

$$\varkappa = \frac{1222277}{110} \qquad 1.2.3\,.\,.\,11\,\varkappa = 362880.1222277$$

$$\lambda = \frac{854513}{6} \qquad 1.2.3\,.\,.\,12\,\lambda = 79833600.854513$$

$$\mu = \frac{1181820455}{546} \qquad 1.2.3\,.\,.\,13\,\mu = 11404800.1181820455$$

$$\nu = \frac{76977927}{2} \qquad 1.2.3\,.\,.\,14\,\nu = 109109145600.76977927$$

$$\xi = \frac{23749461029}{30} \qquad 1.2.3\,.\,.\,15\,\xi = 43589145600.23749461029$$

$$\pi = \frac{3615841276005}{462} \qquad 1.2.3\,.\,.\,16\,\pi = 45287424000.8615841276005$$

&c.

122.

122. Numeri iſti per vniuerſam ſerierum doctrinam ampliſſimum habent vſum. Primum enim ex his numeris formari poſſunt vltimi termini in ſummis poteſtatum parium, quos non aeque ac reliquos terminos ex ſummis praecedentium reperiri poſſe ſupra annotauimus. In poteſtatibus enim paribus poſtremi ſummarum termini ſunt x per certos numeros multiplicati; qui numeri pro poteſtatibus II; IV; VI; VIII; &c. ſunt $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, &c. ſignis alternantibus affecti. Oriuntur autem hi numeri ſi valores litterarum α, β, γ, δ, &c. ſupra inuenti reſpectiue diuidantur per numeros impares 3, 5, 7, &c. vnde iſti numeri, qui ab Inuentore *Iacobo Bernoullio* vocari ſolent Bernoulliani erunt:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{6} = \mathfrak{A}$$

$$\frac{\beta}{5} = \frac{1}{30} = \mathfrak{B}$$

$$\frac{\gamma}{7} = \frac{1}{42} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{\delta}{9} = \frac{1}{30} = \mathfrak{D}$$

$$\frac{\varepsilon}{11} = \frac{5}{66} = \mathfrak{E}$$

$$\frac{\zeta}{13} = \frac{691}{2730} = \mathfrak{F}$$

$$\frac{\eta}{15} = \frac{7}{6} = \mathfrak{G}$$

$\theta =$

$$\frac{\theta}{17} = \frac{3617}{510} = \mathfrak{H}$$ = B_8 = 7·092156

$$\frac{\iota}{19} = \frac{43867}{798} = \mathfrak{I}$$ = B_9 = 54·9

$$\frac{\kappa}{21} = \frac{174611}{330} = \mathfrak{K} = \frac{283.617}{330}$$ = 529·1242

$$\frac{\lambda}{23} = \frac{854513}{138} = \mathfrak{L} = \frac{11.131.593}{2.3.23}$$

$$\frac{\mu}{25} = \frac{236364091}{2730} = \mathfrak{M} =$$

$$\frac{\nu}{27} = \frac{8553103}{2} = \mathfrak{N} = \frac{13.657931}{6}$$

$$\frac{\xi}{29} = \frac{23749461029}{870} = \mathfrak{O}$$

$$\frac{\pi}{31} = \frac{8615841276005}{14322} = \mathfrak{P}$$

&c.

123. Isti igitur numeri Bernoulliani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. immediate ex sequentibus aequationibus inueniri poterunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{1}{5} \mathfrak{A}^2$$

$$\mathfrak{C} = \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{2}{7} \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{2}{9} \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{9} \mathfrak{B}^2$$

$$\mathfrak{E} = \frac{10.9}{1.2} \cdot \frac{2}{11} \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{11} \mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2} \cdot \frac{2}{13} \mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{13} \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1}{13} \mathfrak{C}^2$$

$$\mathfrak{G} = \frac{14.13}{1.2} \cdot \frac{2}{15} \mathfrak{A}\mathfrak{F} + \frac{14.13.12.11}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{15} \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \frac{14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{2}{15} \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

&c.

quarum aequationum lex per ſe eſt manifeſta, ſi tantum notetur, vbi quadratum cuiuspiam litterae occurrit, eius coefficientem duplo eſſe minorem, quam ſecundum regulam eſſe debere videatur. Reuera autem termini, qui continent producta ex disparibus litteris, bis occurrere cenſendi ſunt, erit enim verbi gratia:

$$13\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2} \mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} \mathfrak{C}\mathfrak{C} +$$

$$\frac{12.11.10 \ldots 5}{1.2.3 \ldots 8} \mathfrak{D}\mathfrak{B} + \frac{12.11.10 \ldots 11}{1.2.3 \ldots 3} \mathfrak{E}\mathfrak{A}$$

124. Deinde vero etiam iidem numeri α, β, γ, δ, &c. ingrediuntur in expreſſiones ſummarum ſerierum fractionum in hac forma generali:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{\&c.}$$

quoties n eſt numerus par affirmatiuus, contentarum. Has enim ſummas in Introductione per poteſtates ſemiperipheriae circuli π radio exiſtente $= 1$ expreſſas dedimus, atque in harum poteſtatum coefficientibus iſti ipſi numeri α, β, γ, δ, &c. ingredi deprehenduntur. Quo autem haec conuenientia non caſu euenire, ſed neceſſario locum habere intelligatur, has easdem ſummas ſingu-

gulari modo inuestigemus, quo lex summarum illarum facilius patebit. Quoniam supra inuenimus esse:

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \&c.$$

binis terminis coniungendis habebimus:

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{2m}{nn-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} - \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} - \&c.$$

vnde colligimus fore:

$$\frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \&c. = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn}\cot.\frac{m}{n}\pi$$

Statuamus nunc $n=1$, & pro m ponamus u; vt sit:

$$\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{4-u^2} + \frac{1}{9-u^2} + \frac{1}{16-u^2} + \&c. = \frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u.$$

Resoluantur singulae istae fractiones in series:

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + \&c.$$

$$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{u^2}{2^4} + \frac{u^4}{2^6} + \frac{u^6}{2^8} + \frac{u^8}{2^{10}} + \&c.$$

$$\frac{1}{9-u^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{u^2}{3^4} + \frac{u^4}{3^6} + \frac{u^6}{3^8} + \frac{u^8}{3^{10}} + \&c.$$

$$\frac{1}{16-u^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{u^2}{4^4} + \frac{u^4}{4^6} + \frac{u^6}{4^8} + \frac{u^8}{4^{10}} + \&c.$$

&c.

125. Quod si ergo ponatur:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. = \mathfrak{a}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. = \mathfrak{b}$$

1 +

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. = \mathfrak{c}$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. = \mathfrak{d}$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \&c. = \mathfrak{e}$$

&c.

ſuperior ſeries transmutabitur in hanc:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^6 + \mathfrak{e}u^8 + \mathfrak{f}u^{10} + \&c. = \frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u.$$

Cum igitur in §. 118. litterae A, B, C, D, &c. ita comparatae ſint inuentae, vt poſito:

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c.$$

ſit $s = \frac{1}{2}\cot.\frac{1}{2}u$, erit poſito πu loco $\frac{1}{2}u$ ſeu $2\pi u$ loco u

$$\tfrac{1}{2}\cot\pi u = \frac{1}{2\pi u} - A\pi u - 2^3B\pi^3u^3 - 2^5C\pi^5u^5 - 2^2D\pi^7u^7 - \&c.$$

vnde per $\frac{\pi}{u}$ multiplicando erit:

$$\frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = \frac{1}{2uu} - 2A\pi^2 - 2^3B\pi^4u^2 - 2^5C\pi^6u^4 - \&c.$$

hincque ſequitur fore:

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = 2A\pi^2 + 2^3B\pi^4u^2 + 2^5C\pi^6u^4 + 2^7D\pi^8u^6 + \&c.$$

Quia igitur modo inuenimus eſſe:

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^6 + \&c.$$

neceſſe eſt vt ſit:

$$\mathfrak{a} = 2A\pi^2 = \frac{2\alpha}{1.2.3}.\pi^2 = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}.\pi^2$$

$$\mathfrak{b} = 2^3 B\pi^4 = \frac{2^3\beta}{1.2.3.4.5}.\pi^4 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}.\pi^4$$

$$\mathfrak{c} = 2^5 C\pi^6 = \frac{2^5\gamma}{1.2.3\ldots.7}\pi^6 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2.\ldots.6}\pi^6$$

$$\mathfrak{d} = 2^7 D\pi^8 = \frac{2^7\delta}{1.2.3\ldots.9}\pi^8 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2.\ldots\ldots 8}\pi^8$$

$$\mathfrak{e} = 2^9 E\pi^{10} = \frac{2^9\varepsilon}{1.2.3\ldots 11}\pi^{10} = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2\ldots,10}\pi^{10}$$

$$\mathfrak{f} = 2^{11} F\pi^{12} = \frac{2^{11}\zeta}{1.2.3\ldots 13}\pi^{12} = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2\ldots.12}\pi^{12}$$

&c.

126. Ex hoc ergo tam facili ratiocinio non ſolum omnes ſeries poteſtatum reciprocarum, quas §. praeced. exhibuimus, expedite ſummantur; ſed ſimul quoque perſpicitur, quemadmodum iſtae ſummae ex cognitis valoribus litterarum α, β, γ, δ, ε, &c. vel etiam ex numeris Bernoullianis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. formentur. Quare cum iſtorum numerorum quindecim §. 122. definiuerimus, ex iis ſummae omnium poteſtatum parium vsque ad ſummam huius ſeriei incluſiue aſſignari poterunt:

$1 + \frac{1}{2^{30}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{4^{30}} + \frac{1}{5^{30}} +$ &c. erit enim huius

ſeriei ſumma $= \frac{2^{29}\pi}{1.2.3\ldots.31}\pi^{30} = \frac{2^{29}\mathfrak{P}}{1.2.\ldots.30}\pi^{30}.$

Atque si quis voluerit has summas vlterius determinare, id continuandis numeris α, β, γ, &c. vel his $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. facillime praestabitur.

127. Origo ergo horum numerorum α, β, γ, δ, &c. vel inde formatorum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. potissimum debetur euolutioni cotangentis cuiusuis anguli in seriem infinitam. Cum enim sit

$$\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c.$$

erit:

$$Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + \&c. = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u,$$

si igitur loco coefficientium A, B, C, D, &c. valores ipsorum substituantur, reperietur:

$$\frac{\alpha u^2}{1.2.3} + \frac{\beta u^4}{1.2\ldots5} + \frac{\gamma u^6}{1.2\ldots.7} + \frac{\delta u^8}{1.2\ldots9} + \&c. = 1 - \frac{u}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

atque numeros Bernoullianos adhibendo erit:

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2\ldots.8} + \&c. = 1 - \frac{u}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

ex quibus seriebus per differentiationem innumerabiles aliae deduci possunt, sicque infinitae series summari, in quas isti numeri notatu tantopere digni ingrediuntur.

128. Sumamus aequationem priorem, quam per u multiplicemus, vt sit:

$$\frac{\alpha u^3}{1.2.3} + \frac{\beta u^5}{1.2\ldots5} + \frac{\gamma u^7}{1.2\ldots7} + \frac{\delta u^9}{1.2\ldots9} + \&c. = u - \frac{uu}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

quae

quae differentiata ac per du diuisa dat:

$$\frac{\alpha u^2}{1.2}+\frac{\beta u^4}{1.2.3.4}+\frac{\gamma u^6}{1.2\ldots6}+\frac{\delta u^8}{1.2\ldots8}+\&c.=1-u\cot\tfrac{1}{2}u+\frac{uu}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}$$

&, si denuo differentietur erit:

$$\frac{\alpha u}{1}+\frac{\beta u^3}{1.2.3}+\frac{\gamma u^5}{1.2.3.4.5}+\&c.=-\cot\tfrac{1}{2}u+\frac{u}{(\sin\frac{1}{2}u)^2}-\frac{uu\cos\frac{1}{2}u}{4(\sin\frac{1}{2}u)^3}$$

Sin autem altera aequatio differentietur erit:

$$\frac{\mathfrak{A}u}{1}+\frac{\mathfrak{B}u^3}{1.2.3}+\frac{\mathfrak{C}u^5}{1.2\ldots5}+\frac{\mathfrak{D}u^7}{1.2\ldots7}=-\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}u+\frac{u}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}$$

Ex his ergo si ponatur $u=\pi$, ob $\cot\frac{1}{2}\pi=0$, & $\sin\frac{1}{2}u=1$, sequuntur istae summationes:

$$1=\frac{\alpha\pi^2}{1.2.3}+\frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4.5}+\frac{\gamma\pi^6}{1.2.3\ldots7}+\frac{\delta\pi^8}{1.2.3\ldots9}+\&c.$$

$$1+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\alpha\pi^2}{1.2}+\frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4}+\frac{\gamma\pi^6}{1.2.3\ldots6}+\frac{\delta\pi^8}{1.2.3\ldots8}+\&c.$$

$$\pi=\frac{\alpha\pi}{1}+\frac{\beta\pi^3}{1.2.3}+\frac{\gamma\pi^5}{1.2.3.4.5}+\frac{\delta\pi^7}{1.2.3\ldots7}\ \&c.$$

seu $$1=\alpha+\frac{\beta\pi^2}{1.2.3}+\frac{\gamma\pi^4}{1.2.3.4.5}+\frac{\delta\pi^6}{1.2.3\ldots7}+\&c.$$

a qua si prima subtrahatur remanebit:

$$\alpha=\frac{(\alpha-\beta)\pi^2}{1.2.3}+\frac{(\beta-\gamma)\pi^4}{1.2.3.4.5}+\frac{(\gamma-\delta)\pi^6}{1.2.3\ldots7}+\&c.$$

Tum vero erit:

$$1 = \frac{\mathfrak{A}\pi^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}\pi^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}\pi^8}{1.2.3\ldots.8} + \&c.$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\mathfrak{A}\pi}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^7}{1.2.3\ldots.7} + \&c.$$

$$\text{ſeu } \tfrac{1}{4} = \frac{\mathfrak{A}}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^2}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^6}{1.2.3\ldots.7} + \&c.$$

129. Ex tabula valorum numerorum α, β, γ, δ, &c. quam ſupra §. 121. exhibuimus, patet eos primum decreſcere tum vero iterum creſcere, & quidem in infinitum. Operae igitur pretium erit inueſtigare, in quanam ratione hi numeri, poſtquam iam vehementer longe fuerint continuati, vlterius progredi pergant. Sit igitur ϕ numerus quicunque huius ſeriei numerorum α, β, γ, δ, &c. longiſſime ab initio remotus, & ſit ψ numerorum ſequens. Quoniam per hos numeros ſummae poteſtatum reciprocarum definiuntur, ſit $2n$ exponens poteſtatis, in cuius ſumma numerus ϕ ingreditur, erit $2n+2$ exponens poteſtatis numero ψ reſpondens, atque numerus n iam erit vehementer magnus. Hinc ex §. 125. habebitur:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \&c. = \frac{2^{2n-1}\phi}{1.2.3\ldots(2n+1)}\pi^{2n}$$

$$1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \&c. = \frac{2^{2n+1}\psi}{1.2.3\ldots(2n+3)}\pi^{2n+2}$$

Quod

Quod si ergo haec per istam diuidatur, erit:

$$\frac{1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \&c.}{1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \&c.} = \frac{4\psi}{(2n+2)(2n+3)} \cdot \frac{\pi^2}{\phi}$$

Quia vero n est numerus vehementer magnus, ob seriem vtramque proxime $=1$, erit:

$$\frac{\psi}{\phi} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{4\pi^2} = \frac{nn}{\pi\pi}.$$

Cum igitur n designet, quotus sit numerus ϕ a primo α computatus, se habebit hic numerus ϕ ad suum sequentem ψ vt π^2 ad n^2, quae ratio, si n fuerit numerus infinitus, veritati penitus fit consentanea. Quoniam est fere $\pi\pi = 10$, si ponatur $n = 100$; erit terminus centesimus circiter millies minor suo sequente. Constituunt ergo numeri α, β, γ, δ, &c. pariter ac Bernoulliani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. seriem maxime diuergentem, quae etiam magis increscat, quam vlla series geometrica terminis crescentibus procedens.

130. Inuentis ergo his valoribus numerorum α, β, γ, δ, &c. seu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. si proponatur series, cuius terminus generalis z fuerit functio quaecunque ipsius indicis x, terminus summatorius Sz huius seriei sequenti modo exprimetur, vt sit:

 $Sz =$

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{1}{6}\cdot\frac{dz}{1.2\,dx} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^3z}{1.2.3.4\,dx^3}$$
$$+ \frac{1}{42}\cdot\frac{d^5z}{1.2.3\ldots5\,dx^5} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^7z}{1.2.3\ldots8\,dx^7}$$
$$+ \frac{5}{66}\cdot\frac{d^9z}{1.2.3\ldots10\,dx^9} - \frac{691}{2730}\cdot\frac{d^{11}z}{1.2.3\ldots12\,dx^{11}}$$
$$+ \frac{7}{6}\cdot\frac{d^{13}z}{1.2.3\ldots14\,dx^{13}} - \frac{3617}{510}\cdot\frac{d^{15}z}{1.2.3\ldots16\,dx^{15}}$$
$$+ \frac{43867}{798}\cdot\frac{d^{17}z}{1.2.3\ldots18\,dx^{17}} - \frac{174611}{330}\cdot\frac{d^{19}z}{1.2.3\ldots20\,dx^{19}}$$
$$+ \frac{854513}{138}\cdot\frac{d^{21}z}{1.2.3\ldots22\,dx^{21}} - \frac{236364091}{2730}\cdot\frac{d^{23}z}{1.2.3\ldots24\,dx^{23}}$$
$$+ \frac{8553103}{6}\cdot\frac{d^{25}z}{1.2.3\ldots26\,dx^{25}} - \frac{23749461029}{870}\cdot\frac{d^{27}z}{1.2.3\ldots28\,dx^{27}}$$
$$+ \frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{d^{29}z}{1.2.3\ldots30\,dx^{29}} - \&c.$$

Si igitur innotuerit integrale $\int z\,dx$, ſeu quantitas illa cuius differentiale ſit $= z\,dx$, terminus ſummatorius ope continuae differentiationis inuenietur. Perpetuo autem notandum eſt ad hanc expreſſionem ſemper eiusmodi conſtantem addi oportere, vt ſumma fiat $= 0$, ſi index x ponatur in nihilum abire.

131. Si igitur z fuerit functio rationalis integra ipſius x, quia eius differentialia tandem euaneſcunt, terminus ſummatorius per expreſſionem finitam exprimetur; id quod ſequentibus exemplis illuſtrabimus.

EX-

EXEMPLUM I.

Quaeratur terminus summatorius huius seriei :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & x \\ 1 & +9 & +25 & +49 & +81 & + & \ldots\ldots & +(2x-1)^2 \end{array}$$

Quia hic est $z = (2x-1)^2 = 4xx - 4x + 1$;

erit $\int z\,dx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x$,

ex huius enim differentiatione oritur :

$$4xxdx - 4xdx + dx = zdx.$$

Deinde vero per differentiationem erit :

$$\frac{dz}{dx} = 8x - 4$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 8$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 0 \quad \&c.$$

Hinc erit terminus summatorius quaesitus : $=$
$\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2xx - 2x + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \pm$ Const.
qua constante tolli debent termini $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; vnde erit :

$$S(2x-1)^2 = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x = \frac{x}{3}(2x-1)(2x+1).$$

Sic erit posito $x = 4$ summa 4 primorum terminorum

$$1 + 9 + 25 + 49 = \frac{4}{3}\cdot 7\cdot 9 = 84.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius huius seriei :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ 1 & +27 & +125 & +343 & + \ldots\ldots & (2x-1)^3 \end{array}$$

Quia

Quia eſt $z = (2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; erit: $\int z\,dx = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$; $\frac{dz}{dx} = 24x^2 - 24x + 6$; $\frac{ddz}{dx^2} = 48x - 24$; $\frac{d^3z}{dx^3} = 48$; ſequentia euaneſcunt. Quare erit

$$\begin{aligned} S.(2x-1)^3 = 2x^4 &- 4x^3 + 3x^2 - x \\ &+ 4x^3 - 6x^2 + 3x - \tfrac{1}{2} \\ &+ 2x^2 - 2x + \tfrac{1}{2} \\ &- \tfrac{1}{15} \end{aligned}$$

hoc eſt $S(2x-1)^3 = 2x^4 - x^2 = x^2(2xx-1)$. Sic erit poſito $x = 4$ $1 + 27 + 125 + 343 = 16.31 = 496$.

132. Ex hac inuenta generali expreſſione pro termino ſummatorio ſponte ſequitur ille terminus ſummatorius, quem ſuperiori parte pro poteſtatibus numerorum naturalium dedimus, cuiusque demonſtrationem ibi tradere non licuerat. Quod ſi enim ponamus $z = x^n$, erit vtique $\int z\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$; differentialia vero ita ſe habebunt:

$$\frac{dz}{dx} = n x^{n-1}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = n(n-1) x^{n-2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = n(n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) x^{n-5}$$

$$\frac{d^7z}{dx^7} = n(n-1) \;.\;.\;.\;.\;.\;. (n-6) x^{n-7} \quad \&c.$$

Ex

Ex his ergo deducetur ſequens terminus ſummatorius reſpondens termino generali x^n; ſcilicet

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{6}\cdot\frac{n}{2}x^{n-1}$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3.\ 4}x^{n-3}$$

$$+\frac{1}{42}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}x^{n-5}$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ (n-6)}{2.\ 3.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 8}x^{n-7}$$

$$+\frac{5}{66}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ (n-8)}{2.\ 3.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 10}x^{n-9}$$

$$-\frac{691}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-10)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 12}x^{n-11}$$

$$+\frac{7}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-12)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 14}x^{n-13}$$

$$-\frac{3617}{510}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-14)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 16}x^{n-15}$$

$$+\frac{43867}{798}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-16)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 18}x^{n-17}$$

$$-\frac{174611}{330}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-18)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 20}x^{n-19}$$

$$+\frac{854513}{138}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-20)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 22}x^{n-21}$$

$$-\frac{236364091}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-22)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 24}x^{n-23}$$

$$+\frac{8553103}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-24)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 26}x^{n-25}$$

$$-\frac{23749461029}{870}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-26)}{2.3\ldots\ldots 28}x^{n-27}$$

$$+\frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-28)}{2.3\ldots\ldots 30}x^{n-29}\ \&c.$$

quae expreſſio non differt ab ea, quam ſupra dedimus, niſi quod hic numeros Bernoullianos 𝔄, 𝔅, ℭ, &c. introduximus, cum ſupra vſi eſſemus numeris α, β, γ, δ, &c. interim tamen conſenſus ſponte elucet. Hinc ergo terminos ſummatorios omnium poteſtatum vsque ad poteſtatem trigeſimam incluſiue exhibere licuit; quae inveſtigatio, ſi alia via fuiſſet ſuſcepta, ſine longiſſimis & taedioſiſſimis calculis abſolui non potuiſſet.

133. Iam ſupra §. 59. ſimilem fere expreſſionem pro termino ſummatorio dedimus ex termino generali definiendo. Ea enim pariter ſecundum differentialia termini generalis procedebat; ab iſta autem in hoc potiſſimum erat diuerſa, quod illa non integrale $\int z\,dx$ requirebat, ſingula vero termini generalis differentialia per certas ipſius x functiones habebat multiplicata. Eandem igitur expreſſionem ſequenti modo ad naturam ſerierum magis accommodato denuo eliciamus, ex quo ſimul lex clarius patebit, ſecundum quam coefficientes illi differentialium progrediuntur. Sit igitur ſeriei terminus generalis z, functio quaecunque ipſius indicis x, terminus vero ſummatorius quaeſitus ſit s: qui quoniam vti vidimus eiusmodi erit functio ipſius x, vt euaneſcat poſito $x=0$, erit per ea, quae ſupra de natura huiusmodi functionum demonſtrauimus:

$$s - \frac{x\,ds}{1\,dx} + \frac{x^2\,dds}{1.2\,dx^2} - \frac{x^3\,d^3s}{1.2.3\,dx^3} + \frac{x^4\,d^4s}{1.2.3.4\,dx^4} - \&c. = 0.$$

134. Quia s denotat ſummam omnium terminorum ſeriei a primo vsque ad vltimum z, perſpicuum eſt ſi in s loco x ponatur $x-1$, tum priorem ſummam vltimo termino z mulctari: erit ſcilicet

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2\,dx^2} - \frac{d^3s}{6\,dx^3} + \frac{d^4s}{24\,dx^4} - \&c.$$

ideoque $z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2\,dx^2} + \frac{d^3s}{6\,dx^3} - \frac{d^4s}{24\,dx^4} + \&c.$

quae aequatio modum ſuppeditat ex dato termino ſummatorio s definiendi terminum generalem, quod quidem per ſe eſt facillimum. Ex idonea autem combinatione huius aequationis cum ea, quam §. praeced. inuenimus, valor ipſius s per x & z determinari poterit. Ponamus in hunc finem eſſe:

$$s - Az + \frac{B\,dz}{dx} - \frac{C\,ddz}{dx^2} + \frac{D\,d^3z}{dx^3} - \frac{E\,d^4z}{dx^4} + \&c. = 0$$

vbi A, B, C, D, &c. denotent coefficientes neceſſarios ſiue conſtantes ſiue variabiles: nam cum ſit

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2\,dx^2} + \frac{d^3s}{6\,dx^3} - \frac{d^4s}{24\,dx^4} + \frac{d^5s}{120\,dx^5} - \&c.$$

ſi hinc valores pro z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, &c. in ſuperiori aequatione ſubſtituantur, prodibit:

$$s = s$$

$$-Az = -\frac{Ads}{dx} + \frac{Adds}{2dx^2} - \frac{Ad^3s}{6dx^3} + \frac{Ad^4s}{24dx^4} - \frac{Ad^5s}{120dx^5} + \&c.$$

$$+\frac{Bdz}{dx} = +\frac{Bdds}{dx^2} - \frac{Bd^3s}{2dx^3} + \frac{Bd^4s}{6dx^4} - \frac{Bd^5s}{24dx^5} + \&c.$$

$$-\frac{Cddz}{dx^2} = -\frac{Cd^3s}{dx^3} + \frac{Cd^4s}{4dx^4} - \frac{Cd^5s}{6dx^5} + \&c.$$

$$+\frac{Dd^3z}{dx^3} = +\frac{Dd^4s}{dx^4} - \frac{Dd^5s}{2dx^5} + \&c.$$

$$-\frac{Ed^4z}{dx^4} = -\frac{Ed^5s}{dx^5} + \&c.$$

&c.

quae igitur ſeries iunctim ſumtae aequales erunt nihilo.

135. Cum ergo ante inuenimus eſſe:

$$0 = s - \frac{xds}{dx} + \frac{x^2dds}{2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{6dx^3} + \frac{x^4d^4s}{24dx^4} - \frac{x^5d^5s}{120dx^5} + \&c.$$

ſi ſuperior aequatio huic aequalis ſtatuatur, prodibunt ſequentes litterarum A, B, C, D, &c. denominationes:

$$A = x$$

$$B = \frac{x^2}{2} - \frac{A}{2}$$

$$C = \frac{x^3}{6} - \frac{B}{2} - \frac{A}{6}$$

$$D = \frac{x^4}{24} - \frac{C}{2} - \frac{B}{6} - \frac{A}{24}$$

$$E = \frac{x^5}{120} - \frac{D}{2} - \frac{C}{6} - \frac{B}{24} - \frac{A}{120} \quad \&c.$$

His

His igitur litterarum A, B, C, D, &c. valoribus inuentis, ex termino generali z terminus ſummatorius $s = Sz$ ita determinabitur, vt ſit:

$$Sz = Az - \frac{Bdz}{dx} + \frac{Cddz}{dx^2} - \frac{Dd^3z}{dx^3} + \frac{Ed^4z}{dx^4} - \frac{Fd^5z}{dx^5} + \&c.$$

136. Cum autem fiat:

$$A = x$$
$$B = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x$$
$$C = \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x$$
$$D = \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{24}xx \quad \&c.$$

patet hos coefficientes eſſe eosdem, quos ſupra §. 59. habuimus, vnde iſta termini ſummatorii expreſſio eadem eſt, quam ibi inuenimus; eritque propterea:

$$A = Sx^0 = S1$$
$$B = \tfrac{1}{1}Sx^1 - \tfrac{1}{1}x$$
$$C = \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$D = \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{6}x^3$$
$$E = \tfrac{1}{24}Sx^4 - \tfrac{1}{24}x^4 \quad \&c.$$

Hinc ergo erit:

$$Sz = xz - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{ddz}{2\,dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \&c.$$
$$+ \frac{xdz}{dx} - \frac{x^2ddz}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4d^4z}{24dx^4} + \&c.$$

Quodſi autem in termino generali z ponatur $x = 0$, prodibit terminus indici $= 0$ reſpondens; qui ſi ponatur $= a$,

 erit

erit: $a = z - \frac{xdz}{dx} + \frac{x^2 ddz}{2dx^2} - \frac{x^3 d^3 z}{6dx^3} + \&c.$ ideoque

$$\frac{xdz}{dx} - \frac{x^2 ddz}{2dx^3} + \frac{x^3 d^3 z}{6dx^3} - \frac{x^4 d^4 z}{24dx^4} + \&c. = z - a,$$

quo valore subſtituto habebitur:

$$Sz = (x+1)z - a - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3 z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4 z}{24dx^4}Sx^4 - \&c.$$

Cognitis ergo ſummis poteſtatum, hinc pro quouis termino generali ei conueniens terminus ſummatorius exhiberi poteſt.

137. Quoniam ergo geminam inuenimus expreſſionem termini ſummatorii Sz pro termino generali z, earumque altera formulam integralem $\int z dx$ continet, ſi iſtae duae expreſſiones ſibi aequales ponantur, obtinebitur valor ipſius $\int z dx$ per ſeriem expreſſus. Cum enim ſit:

$$\int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A} dz}{1.2\, dx} - \frac{\mathfrak{B} d^3 z}{1.2.3.4\, dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^5 z}{1.2 \ldots 6 dx^5} - \&c.$$

$$= (x+1)z - a - \frac{dz}{1\, dx}Sx + \frac{ddz}{1.2 dx^2}Sx^2 - \frac{d^3 z}{1.2.3\, dx^3}Sx^3 + \&c.$$

erit:

$$\int z dx = (x+\tfrac{1}{2})z - a - \frac{dz}{dx}(Sx + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}) + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3 z}{6dx^3}(Sx^3 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B})$$

$$+ \frac{d^4 z}{24dx^4}Sx^4 - \frac{d^5 z}{120dx^5}(Sx^5 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}) + \frac{d^6 z}{720dx^6}Sx^6$$

$$- \frac{d^7 z}{5040dx^7}(Sx^7 - \tfrac{1}{8}\mathfrak{D}) + \&c.$$

vbi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. denotant numeros Bernoullianos ſupra §. 122. exhibitos.

Sit

Sit v.gr. $z = xx$, fiet $a = 0$; $\frac{dz}{dx} = 2x$; & $\frac{ddz}{2dx^2} = 1$, hinc erit:

$$\int xx\,dx = (x+\tfrac{1}{2})xx - 2x(\tfrac{1}{2}xx+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{12}) + 1(\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x)$$

seu $\int xx\,dx = \frac{1}{3}x^3$; dat autem $\frac{1}{3}x^3$ differentiatum vtique $xx\,dx$.

138. Noua ergo hinc patet via ad terminos summatorios serierum potestatum inueniendos; quoniam enim ex coefficientibus ante assumtis A, B, C, D, &c. hi termini summatorii facillime formantur, horum autem coefficientium quilibet ex praecedentibus conflatur; si in formulis §. 135. datis loco istarum litterarum valores in §. 136. traditi substituantur, erit:

$$Sx^1 - x = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x$$

$$Sx^2 - x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{2}(Sx - x)$$

$$Sx^3 - x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{2}(Sx^2 - x^2) - \frac{3.2}{2.3}(Sx^1 - x^1)$$

$$Sx^4 - x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{4}{2}(Sx^3 - x^3) - \frac{4.3}{2.3}(Sx^2 - x^2) - \frac{4.3.2}{2.3.4}(Sx - x)$$

&c.

Hinc ergo summae potestatum superiorum ex summis inferiorum formari poterunt.

139. Quod si vero legem, qua coefficientes A, B, C, D, &c. supra §. 135. progredi inuenti sunt, attentius intueamur, eos seriem recurrentem constituere deprehendemus. Si enim euoluamus hanc fractionem:

$$\frac{x + \frac{1}{2}xxu + \frac{1}{6}x^3u^2 + \frac{1}{24}x^4u^3 + \frac{1}{120}x^5u^4 + \&c.}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 + \&c.}$$

secundum potestates ipsius u, hancque seriem resultare sumamus: A +

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \&c.$$

erit vti ante inuenimus $A = x$; $B = \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}A$; &c. ſicque inuenta hac ſerie, obtinebuntur termini ſummatorii ſerierum poteſtatum. Illa autem fractio, ex cuius euolutione iſta ſeries naſcitur, tranſit in hanc formam: $\frac{e^{xu}-1}{e^u-1}$, quae ſi x fuerit numerus integer affirmatiuus, abit in $1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \ldots + e^{(x-1)u}$; cum ergo ſit:

$$1 = 1$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{2u} = 1 + \frac{2u}{1} + \frac{4u^2}{1.2} + \frac{8u^3}{1.1.3} + \frac{16u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{3u} = 1 + \frac{3u}{1} + \frac{9u^2}{1.2} + \frac{27u^3}{1.2.3} + \frac{81u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{(x-1)u} = 1 + \frac{(x-1)u}{1} + \frac{(x-1)^2u^2}{1.2} + \frac{(x-1)^3u^3}{1.2.3} + \frac{(x-1)^4u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

ideoque erit:

$$A = x$$

$$B = S(x-1) = Sx - x$$

$$C = \tfrac{1}{2}S(x-1)^2 = \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$

$$D = \tfrac{1}{6}S(x-1)^3 = \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{6}x^3 \qquad \&c.$$

Vnde nexus horum coefficientium cum ſummis poteſtatum, ante iam obſeruatus, penitus confirmatur ac demonſtratur.

CA-

CAPUT VI.

DE SUMMATIONE PROGRESSIONUM PER SERIES INFINITAS.

140.

Expreſſio generalis, quam in Capite praecedente pro termino ſummatorio cuiusque ſeriei, cuius terminus generalis ſeu indici x reſpondens eſt $= z$, invenimus:

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}dz}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots 6dx^5} - \&c.$$

proprie inſeruit ſeriebus ſummandis, quarum termini generales ſunt functiones quaecunque rationales integrae indicis x, quoniam his caſibus ad differentialia tandem euaneſcentia peruenitur. Sin autem z non fuerit eiusmodi functio ipſius x, tum eius differentialia in infinitum progrediuntur, ſicque reſultat ſeries infinita ſummam ſeriei propoſitae exprimens, & quidem ad datum vsque terminum, cuius index eſt $= x$. Quocirca progreſſionis propoſitae in infinitum continuatae ſumma prodibit, ſi ponatur $x = \infty$; hocque pacto alia inuenitur ſeries infinita priori aequalis.

141. Sin autem ponatur $x = 0$, tum expreſſio ſummam exhibens debet euaneſcere, vti iam annotauimus; quod niſi fiat, eiusmodi quantitas conſtans ad ſummam addi vel inde auferri debet, vt huic conditioni ſatisfiat.

Quo facto si ponatur $x = 1$, summa inuenta praebebit terminum primum seriei: sin $x = 2$, aggregatum primi & secundi; sin $x = 3$, orietur aggregatum trium terminorum initialium seriei, & ita porro. His igitur casibus, quia summa vnius, vel duorum, vel trium, &c. terminorum est cognita, seriei infinitae, qua ista summa exprimitur, valor innotescet; ex hocque fonte innumerabiles series summari poterunt.

142. Quoniam, si eiusmodi constans summae fuerit adiecta, vt ea euanescat posito $x = 0$, tum summa omnibus reliquis casibus, quicunque numeri pro x substituantur, satisfacit; manifestum est, dummodo summae inuentae eiusmodi quantitas constans adiiciatur, vt vno quodam casu vera summa indicetur, tum omnibus reliquis casibus veram summam prodire debere. Quare si ponendo $x = 0$, non pateat, cuiusmodi valorem expressio summae recipiat, neque igitur constans adiicienda hinc inueniri queat; tum alius quicunque numerus pro x statui poterit, adiiciendaque constante effici vt debita summa indicetur: quod quomodo fieri debeat, ex sequentibus magis fiet perspicuum.

142. Consideremus primum hanc progressionem harmonicam:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x} = s,$$

cuius terminus generalis cum sit $= \frac{1}{x}$, fiet $z = \frac{1}{x}$, &

ter-

terminus summatorius s ita inuenietur. Primo erit $\int z\,dx = \int \frac{dx}{x} = lx$; deinde differentialia ita se habebunt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2};\quad \frac{ddz}{2\,dx^2} = \frac{1}{x^3};\quad \frac{d^3z}{6\,dx^3} = -\frac{1}{x^4};$$

$$\frac{d^4z}{24\,dx^4} = \frac{1}{x^5};\quad \frac{d^5z}{120\,dx^6} = -\frac{1}{x^6}$$ &c. Hinc itaque erit:

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \&c.$$
$$+ \text{Constante.}$$

Constans igitur hic addenda ex casu $x = 0$ non potest definiri. Ponatur ergo $x = 1$, quia tum fit $s = 1$, erit $1 = \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{4} - \frac{\mathfrak{C}}{6} + \frac{\mathfrak{D}}{8} + \text{Const.}$ vnde fit ista constans $= \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \&c.$ eritque ideo terminus summatorius quaesitus:

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \&c.$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \&c.$$

143. Quoniam numeri Bernoulliani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. constituunt seriem diuergentem, hic valor constantis cognosci nequit. Sin autem loco x substituatur numerus maior, atque summa totidem terminorum actu quaeratur, valor constantis commode inuestigabitur. Ponatur

in hunc finem $x = 10$, decemque primis terminis colligendis reperietur eorum summa $=$

$$2,928968253968253968$$

cui aequalis esse debet expressio summae, si in ea ponatur $x = 10$, quae fit:

$$l10 + \frac{1}{20} - \frac{\mathfrak{A}}{200} + \frac{\mathfrak{B}}{40000} - \frac{\mathfrak{C}}{6000000} + \frac{\mathfrak{D}}{800000000} - \&c. + C.$$

sumto ergo pro $l10$ logarithmo hyperbolico denarii & loco $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. substitutis valoribus supra inuentis, reperietur constans illa:

$$C = 0,577|215|664|901|5325|$$

qui numerus ergo exprimit summam seriei:

$$\frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \frac{\mathfrak{E}}{10} - \&c.$$

144. Si pro x numeri non nimis magni substituantur, quia summa seriei facile actu inuenitur, obtinebitur summa seriei huius:

$$\frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \&c. = s - lx - C.$$

Sin autem x significet numerum valde magnum, quia tum valor huius expressionis in infinitum excurrentis facile in fractionibus decimalibus assignatur, vicissim summa seriei definietur. Ac primo quidem constat, si series in infinitum continuetur, eius summam futuram esse infinite magnam; facto enim $x = \infty$ fit lx quoque infini-

nitus; etsi s ad x rationem infinite paruam teneat. Quo autem commodius summa quotcunque terminorum seriei assignari queat, valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. in fractionibus decimalibus exprimamus:

$$\mathfrak{A} = 0,1666666666666$$
$$\mathfrak{B} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{C} = 0,0238095238095$$
$$\mathfrak{D} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{E} = 0,0757575757575$$
$$\mathfrak{F} = 0,2531135531135$$
$$\mathfrak{G} = 1,1666666666666$$
$$\mathfrak{H} = 7,0921568627451 \quad \&c.$$

vnde ergo erit:

$$\frac{\mathfrak{A}}{2} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{4} = 0,0083333333333$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{6} = 0,0039682539682$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{8} = 0,0041666666666$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{10} = 0,0075757575757$$
$$\frac{\mathfrak{F}}{12} = 0,0210927960928$$
$$\frac{\mathfrak{G}}{14} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{H}}{16} = 0,4432598039216 \quad \&c.$$

EXEMPLUM I.

Inuenire ſummam mille terminorum ſeriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \&c.$$

Ponatur ergo $x = 1000$, & cum ſit

$l10 = 2,3025850929940456840$ erit

$lx = 6,9077552789821$

Conſt. $= 0,5772156649015$

$\frac{1}{2x} = 0,0005000000000$

$7,4849709438836$

ſubt. $\frac{\mathfrak{A}}{2xx} = 0,0000000833333$

$7,4849708605503$

add. $\frac{\mathfrak{B}}{4x^4} = 0,0000000000000$

Ergo $7,4849708605503$ eſt ſumma quaeſita mille terminorum, qui nequidem ſeptem vnitates cum ſemiſſe conficiunt.

EXEMPLUM II.

Inuenire ſummam millies mille terminorum ſeriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$$

Quia eſt $x = 1000000$, erit $lx = 6.l10$, ergo

$lx = 13,8155105579642$

Conſt. $= 0,5772156649015$

$\frac{1}{2x} = 0,0000005000000$

$14,3927262228657 =$ ſummae quaeſitae.

145. Si ergo pro x statuatur numerus vehementer magnus, summa satis exacte inuenitur ex solo primo termino lx constante C aucto: vnde egregia corollaria deduci possunt. Sic si x fuerit numerus vehementer magnus, ponaturque:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ \ldots\ \frac{1}{x}=s$$

$$\&\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{x}+\ \ldots\ \frac{1}{x+y}=t$$

quia est proxime $s=lx+C$, & $t=l(x+y)+C$; erit $t-s=l(x+y)-lx=l\frac{x+y}{x}$, ideoque hic logarithmus proxime per seriem harmonicam finito terminorum numero constantem exprimetur hoc modo:

$$l\frac{x+y}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\ \ldots\ldots\ +\frac{1}{x+y}.$$

Accuratius autem hic logarithmus exhibebitur, si superiores summae s & t exactius capiantur. Sic cum sit

$$s=lx+C+\frac{1}{2x}-\frac{1}{12xx},\quad \&$$

$$t=l(x+y)+C+\frac{1}{2(x+y)}-\frac{1}{12(x+y)^2};\ \text{erit}$$

$$t-s=l\frac{x+y}{x}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+y)}+\frac{1}{12xx}-\frac{1}{12(x+y)^2},$$

ideoque

$$l\frac{x+y}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\ \ldots\ +\frac{1}{x+y}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+y)}-\frac{1}{12xx}+\frac{1}{12(x+y)^2}.$$

Sin

Sin autem ſit numerus tam magnus, vt bini termini vltimi reiici queant, erit proxime:

$$l\frac{x+y}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\ldots+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}\right).$$

145. Ex hac quoque ſerie harmonica deriuare poterimus ſummam huius ſeriei, in qua tantum numeri impares occurrunt:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots+\frac{1}{2x+1}.$$

Cum enim omnibus terminis capiendis ſit:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+1}=$$

$$l(2x+1)+C+\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4}-\frac{\mathfrak{C}}{6(2x+1)^6}+\&c.$$

terminorum vero ordine parium:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2x}$$

ſumma ſit ſemiſſis ſuperioris nempe:

$$\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}lx+\frac{1}{4x}-\frac{\mathfrak{A}}{4x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{8x^4}-\frac{\mathfrak{C}}{12x^6}+\frac{\mathfrak{D}}{16x^8}-\&c.$$

erit hac ſerie ab illa ablata:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2x+1}=$$

$$\tfrac{1}{2}C+l\frac{2x+1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4}-\&c.$$

$$-\frac{1}{4x}+\frac{\mathfrak{A}}{4x^2}-\frac{\mathfrak{B}}{8x^4}+\&c.$$

146. Poteſt vero etiam per eandem expreſſionem generalem ſumma cuiusque ſeriei harmonicae inueniri; ſit enim:

$$\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2m+n}+\frac{1}{3m+n}+\frac{1}{4m+n}+\ldots+\frac{1}{mx+n}=s,$$

quia eſt terminus generalis $z=\frac{1}{mx+n}$, erit:

$$\int z\,dx=\frac{1}{m}l(mx+n);\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{m}{(mx+n)^2}$$

$$\frac{ddz}{2dx^2}=\frac{mm}{(mx+n)^3};\quad \frac{d^3z}{6dx^3}=-\frac{m^3}{(mx+n)^4}$$

$$\frac{d^4z}{24dx^4}=\frac{m^4}{(mx+n)^5};\quad \frac{d^5z}{120dx^5}=-\frac{m^5}{(mx+n)^6}\ \&c.$$

Ex his ergo reperitur:

$$s=D+\frac{1}{m}l(mx+n)+\frac{1}{2(mx+n)}-\frac{\mathfrak{A}m}{2(mx+n)^2}+\frac{\mathfrak{B}m^3}{4(mx+n)^4}$$
$$-\frac{\mathfrak{C}m^5}{6(mx+n)^6}+\frac{\mathfrak{D}m^7}{8(mx+n)^8}-\&c.$$

Poſito ergo $x=0$, fiet conſtans illa addenda:

$$D=-\frac{1}{m}ln-\frac{1}{2n}+\frac{\mathfrak{A}m}{2n^2}-\frac{\mathfrak{B}m^3}{4n^4}+\frac{\mathfrak{C}m^5}{6n^6}-\&c.$$

147. Si vero ſit $n=0$, quoniam ſeriei:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m}+\frac{1}{4m}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{mx}$$

ſumma eſt $=\frac{1}{m}C+\frac{1}{m}lx+\frac{1}{2mx}-\frac{\mathfrak{A}}{2mx^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4mx^4}-\&c.$

at vero huius feriei:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{mx}$$

fumma eft $= C + lmx + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4} - \&c.$ fi ab hac ferie illa m vicibus fumta fubtrahatur vt prodeat haec feries:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{3m} + \ldots + \frac{1}{mx}$$
$$\quad - \frac{m}{m} \qquad - \frac{m}{2m} \qquad - \frac{m}{3m} \qquad - \frac{m}{mx}$$

eius fumma erit $= lm + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4} - \&c.$

$$- \frac{1}{2x} + \frac{\mathfrak{A}}{2xx} - \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} + \&c.$$

atque fi ftatuatur $x = \infty$ fumma erit $= lm$. Hinc pro m ponendo numeros 2, 3, 4, &c. erit:

$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \&c.$

$l3 = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9}\ \&c.$

$l4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} + \&c.$

$l5 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{10}\ \&c.$

&c.

148. Relicta autem ferie harmonica progrediamur ad feriem quadratorum reciprocam, fitque:

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{xx},$$

in

in qua cum ſit terminus generalis $z = \frac{1}{xx}$, erit $\int z\,dx = -\frac{1}{x}$, & differentialia ipſius z ita ſe habebunt

$$\frac{dz}{2\,dx} = -\frac{1}{x^3};\quad \frac{ddz}{2.3dx^2} = \frac{1}{x^4};\quad \frac{d^3z}{2.3.4dx^3} = -\frac{1}{x^5};\quad \&c.$$

vnde erit ſumma

$$s = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{\mathfrak{A}}{x^3} + \frac{\mathfrak{B}}{x^5} - \frac{\mathfrak{C}}{x^7} + \frac{\mathfrak{D}}{x^9} - \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} + \&c.$$

in qua conſtans addenda C ex vno caſu, quo ſumma conſtat, eſt definienda. Ponamus ergo $x = 1$, quia fit $s = 1$ debet eſſe:

$$C = 1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \&c.$$

quae ſeries autem cum ſit maxime diuergens, valorem conſtantis C non oſtendit. Quia autem ſupra demonſtrauimus ſummam huius ſeriei in infinitum continuatae eſſe $= \frac{\pi\pi}{6}$; facto $x = \infty$, ſi ponatur $s = \frac{\pi\pi}{6}$, fiet $C = \frac{\pi\pi}{6}$, ob reliquos terminos omnes euaneſcentes.

Erit ergo

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \&c. = \frac{\pi\pi}{6}.$$

149. Sin autem ſumma huius ſeriei cognita non fuiſſet, valor conſtantis illius C ex alio quopiam caſu, quo ſumma actu eſt inuenta, determinari deberet. Hunc in finem ponamus $x = 10$, atque decem terminis actu addendis reperietur:

	s	$=$	1, 54976773111665406690
add.	$\frac{1}{x}$	$=$	0, 1
ſubtr.	$\frac{1}{2xx}$	$=$	0, 005
			1, 64476773111665406690
add.	$\frac{\mathfrak{A}}{x^3}$	$=$	0, 00016666666666666666
			1, 64493439783320 7356
ſubtr.	$\frac{\mathfrak{B}}{x^5}$	$=$	0, 00000033333333333333
			1, 64493406449987402 3
add.	$\frac{\mathfrak{C}}{x^7}$	$=$	0, 0000000023809523 81
			1, 6449340668808264 04
ſubtr.	$\frac{\mathfrak{D}}{x^9}$	$=$	0, 00000000003333333 3
			1, 6449340668474930 71
add.	$\frac{\mathfrak{E}}{x^{11}}$	$=$	0, 00000000000075757 5
			1, 6449340668482506 46
ſubtr.	$\frac{\mathfrak{F}}{x^{13}}$	$=$	0, 00000000000002531 1
			1, 6449340668482253 35
add.	$\frac{\mathfrak{G}}{x^{15}}$	$=$	0, 0000000000000011 66
			71
ſubtr.	$\frac{\mathfrak{H}}{x^{17}}$	$=$	1, 64493406684822643 0 $=$ C.

Hicque numerus ſimul eſt valor expreſſionis $\frac{\pi\pi}{6}$, quemadmodum ex valore ipſius π cognito calculum inſtituenti patebit. Vnde ſimul intelligitur, etiamſi ſeries $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. diuergat, tamen hoc modo veram prodire ſummam.

150.

150. Sit nunc $z = \frac{1}{x^3}$; atque

$$s = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x^3},$$

quia est

$$\int z\,dx = -\frac{1}{2xx};\quad \frac{dz}{1.2.3\,dx} = -\frac{1}{2x^4};\quad \frac{ddz}{1.2.3.4\,dx^2} = \frac{1}{2x^5}$$

$$\frac{d^3 z}{1.2\ldots 5\,dx^3} = -\frac{1}{2x^6};\quad \frac{d^5 z}{1.2\ldots 7\,dx^5} = -\frac{1}{2x^8};\ \&c.$$

erit

$$s = C - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} + \frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} - \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} + \&c.$$

hincque posito $x = 1$, ob $s = 1$, fiet:

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mathfrak{A} - \tfrac{5}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{7}{2}\mathfrak{C} - \tfrac{9}{2}\mathfrak{D} + \&c.$$

atque iste valor ipsius C simul ostendet summam seriei propositae in infinitum continuatae. Quoniam vero summae potestatum imparium non aeque ac parium constant, iste ipsius C valor ex cognita summa aliquot terminorum definiri debet. Sit ergo $x = 10$, erit:

$$C = s + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} - \frac{5\mathfrak{B}}{2x^4} + \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} - \&c.$$

Est vero ad computum facilius instituendum:

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2} = 0,250000000000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2} = 0,0833333333333$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2} = 0,0833333333333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2} = 0,150000000000$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2} = 0,41666666666666$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2} = 1,6452380952380$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2} = 8,750000000000$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2} = 60,2833333333333 \quad \&c.$$

Hinc ergo fient termini ad s addendi:

$$\frac{1}{2xx} = 0,005000000000000000$$

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} = 0,000025000000000000$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} = 0,000000000833333333$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2x^{12}} = 0,000000000000416666$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2x^{16}} = 0,000000000000000875$$

$$0,005025000833750875$$

ter-

termini autem ſubtrahendi ſunt :

$$\frac{1}{2x^3} = 0,000500000000000000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} = 0,000000083333333333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2x^{10}} = 0,000000000015000000$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2x^{14}} = 0,000000000000016452$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2x^{18}} = 0,000000000000000060$$

$$0,000500083348349845$$

$$\text{ab} : 0,005025000833750875$$

$$0,004524917485401030$$

$$s = 1,197531985674193251$$

$$C = 1,202056903159594281.$$

151. Si hoc modo vlterius progrediamur, inueniemus ſummas omnium ſerierum poteſtatum reciprocarum in fractionibus decimalibus expreſſas :

1 +

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. = 1,6449340668482264 = \frac{2\mathfrak{A}}{1.\ 2}\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c. = 1,2020569031595942$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. = 1,0823232337111381 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c. = 1,0369277551068632$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. = 1,0173430619844491 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \&c. = 1,0083492773866018$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. = 1,0040773561979443 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2\ldots8}\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \&c. = 1,0020083928260822$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \&c. = 1,0009945751278180 = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2\ldots10}\pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{4^{11}} + \&c. = 1,0004941886041094$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \&c. = 1,0002460865533080 = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2\ldots12}\pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{4^{13}} + \&c. = 1,0001227233475857$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \&c. = 1,0000612481350587 = \frac{2^{13}\mathfrak{G}}{1.2\ldots14}\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \frac{1}{4^{15}} + \&c. = 1,0000305882363070$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \&c. = 1,0000152822594086 = \frac{2^{15}\mathfrak{H}}{1.2\ldots16}\pi^{16}$$

&c.

152.

152. Ex his ergo viciſſim ſummae illarum ſerierum infinitarum numeris Bernoullianis conſtantium exhiberi poterunt. Erit enim:

$$1+0-\tfrac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\&c.=0,57721\,\&c.$$

$$1+1-\tfrac{1}{2}+\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-\mathfrak{D}+\&c.=\frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\pi^2$$

$$1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\frac{3\mathfrak{A}}{2}-\frac{5\mathfrak{B}}{2}+\frac{7\mathfrak{C}}{2}-\frac{9\mathfrak{D}}{2}+\&c.=1,2020\,\&c.$$

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4\mathfrak{A}}{2.3}-\frac{5.6\mathfrak{B}}{2.3}+\frac{7.8\mathfrak{C}}{2.3}-\frac{9.10\mathfrak{D}}{2.3}+\&c.=\frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4.5\mathfrak{A}}{2.3.4}-\frac{5.6.7\mathfrak{B}}{2.3.4}+\frac{7.8.9\mathfrak{C}}{2.3.4}-\frac{9.10.11\mathfrak{D}}{2.3.4}+\&c.=1,0369\,\&c.$$

$$1+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4.5.6\mathfrak{A}}{2.3.4.5}-\frac{5.6.7.8\mathfrak{B}}{2.3.4.5}+\frac{7.8.9.10\mathfrak{C}}{2.3.4.5}-\&c.=\frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\pi^6$$

&c.

Harum ergo ſerierum alternae ope quadraturae circuli ſummari poſſunt; a quanam vero quantitate transcendente reliquae pendeant, adhuc non conſtat: neque enim ad poteſtates ipſius π exponentes impares habentes revocari poſſunt, ita vt coefficientes eſſent numeri rationales. Quo autem ſaltem proxime appareat, quales futuri ſint coefficientes poteſtatum ipſius π pro exponentibus imparibus, tabellam ſequentem adiunximus:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$ in infin. $= \frac{\pi}{0,0000} = \infty$

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.$ . . $= \frac{\pi^2}{6,0000}$ vere

$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.$ . . $= \frac{\pi^3}{25,79436}$ prox.

$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c.$ . . $= \frac{\pi^4}{90,00000}$ vere

$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c.$ . . $= \frac{\pi^5}{295,1215}$ prox.

$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c.$ . . $= \frac{\pi^6}{945,000}$ vere

$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \&c.$ . . $= \frac{\pi^7}{2995,286}$ prox.

$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c.$ . . $= \frac{\pi^8}{9450,000}$ vere

$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \&c.$ . . $= \frac{\pi^9}{29749,35}$ prox.

&c.

153. Ex hoc fonte series numerorum Bernoullianorum

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈,	𝔉,	𝔊,	ℌ,	ℑ,	&c.

quantumuis irregularis videatur interpolari, seu termini in medio binorum quorumcunque constituti assignari poterunt: si enim terminus medium interiacens inter primum 𝔄 & secundum 𝔅, seu indici $1\frac{1}{2}$ respondens fuerit $= p$; erit vtique:

1 +

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\&c. = \frac{2^2 p}{1.2.3}\pi^3$$

ideoque $p=\frac{3}{2\pi^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\&c.\right)=0,05815227$

Simili modo ſi terminus inter 𝔅 & ℭ medium interiacens ſeu indicem habens $2\frac{1}{2}$ ponatur $=q$, quia erit:

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\&c. = \frac{2^4 q}{1.2.3.4.5}\pi^5$$

fiet $q=\frac{15}{2\pi^5}\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\&c.\right)=0,02541327$

Si ergo iſtarum ſerierum, in quibus exponentes poteſtatum ſunt numeri impares, ſummae exhiberi poſſent, tum quoque ſeries numerorum Bernoullianorum interpolari poſſet.

154. Ponamus nunc $z=\frac{1}{nn+xx}$, & quaeratur ſumma huius ſeriei:

$$s=\frac{1}{nn+1}+\frac{1}{nn+4}+\frac{1}{nn+9}+\ \ldots\ldots\ +\frac{1}{nn+xx}.$$

Quia eſt $\int z dx=\int\frac{dx}{nn+xx}$; erit $\int z dx=\frac{1}{n}\,\mathrm{A}\tang\frac{x}{n}$.

Ponatur $\mathrm{A}\cot\frac{x}{n}=u$, erit $\int z dx=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$, &

$\frac{x}{n}=\cot u=\frac{\cos u}{\sin u}$, & $\frac{nn+xx}{nn}=\frac{1}{\sin u^2}$, & $z=\frac{\sin u^2}{nn}$,

& $\frac{dx}{n}=-\frac{du}{\sin u^2}$, vnde fit $du=-\frac{dx\sin u^2}{n}$.

Hinc differentialia ipſius z inuenientur hoc modo:

$$dz = \frac{2\,du \operatorname{ſin} u . \operatorname{coſ} u}{nn} = -\frac{dx \operatorname{ſin} u^2 . \operatorname{ſin} 2u}{n^3}$$

$$\& \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\operatorname{ſin} u^2 . \operatorname{ſin} 2u}{n^3}$$

$$\frac{ddz}{2\,dx} = -\frac{du(\operatorname{ſin} u \operatorname{coſ} u \operatorname{ſin} 2u + \operatorname{ſin} u^2 . \operatorname{coſ} 2u)}{n^3} = \frac{dx \operatorname{ſin} u^3 . \operatorname{ſin} 3u}{n^4}$$

$$\& \quad \frac{ddz}{2\,dx^2} = \frac{\operatorname{ſin} u^3 . \operatorname{ſin} 3u}{n^4}.$$

Similι modo erit, vti iam ſupra pro eodem caſu inuenimus:

$$\frac{d^3 z}{2.3\,dx^3} = -\frac{\operatorname{ſin} u^4 . \operatorname{ſin} 4u}{n^5}; \quad \frac{d^4 z}{2.3.4\,dx^4} = \frac{\operatorname{ſin} u^5 . \operatorname{ſin} 5u}{n^6} \quad \&c.$$

ex quibus formabitur ſumma quaeſita:

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} + \frac{\operatorname{ſin} u . \operatorname{ſin} u}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2} . \frac{\operatorname{ſin} u^2 . \operatorname{ſin} 2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4} . \frac{\operatorname{ſin} u^4 . \operatorname{ſin} 4u}{n^5}$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{6} . \frac{\operatorname{ſin} u^6 . \operatorname{ſin} 6u}{n^7} + \frac{\mathfrak{D}}{8} . \frac{\operatorname{ſin} u^8 . \operatorname{ſin} 8u}{n^9} - \&c.$$

$$+ \text{Conſt.}$$

Si hic ad conſtantem determinandam ponatur $x = 0$, quo fiat $s = 0$, erit $\cot u = 0$, ideoque u angulus $90°$, ac propterea $\operatorname{ſin} u = 1$, $\operatorname{ſin} 2u = 0$, $\operatorname{ſin} 4u = 0$, $\operatorname{ſin} 6u = 0$, &c. videtur ergo fore $0 = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2nn} + C$, hinc $C = -\frac{1}{2nn}$: at vero notandum eſt, etiamſi reliqui termini euaneſcant, tamen quia coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. tan-

tandem in infinitum excrescunt, eorum summam posse esse finitam.

155. Ad hanc ergo constantem rite determinandam ponamus esse $x = \infty$, summam enim huius seriei in infinitum excurrentis supra iam in introductione definiuimus, ostendimusque esse eam $= -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$. Posito autem $x = \infty$, fiet $u = 0$, ideoque $\sin u = 0$, simulque sinus omnium arcuum multiplorum euanescent. Cum autem in hac serie potestates ipsius $\sin u$ crescant, diuergentia seriei impedire nequit, quominus valor seriei hoc casu euanescat. Fiet ergo $s = \frac{\pi}{2n} + C$; vnde erit

$$\frac{\pi}{2n} + C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}, \;\&$$

$C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$. Quare summa seriei quaesita erit

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} - \frac{\sin u^2}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2} \cdot \frac{\sin u^2 . \sin 2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4} \cdot \frac{\sin u^4 . \sin 4u}{n^5} - \frac{\mathfrak{C}}{6} \cdot \frac{\sin u^6 . \sin 6u}{n^7} + \&c. + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}.$$

Vbi notandum est, si n fuerit numerus mediocriter magnus, vltimum terminum $\frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$ tantopere fieri exiguum, vt negligi queat.

156. Ponamus esse $x = n$, ita vt denotet:

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{nn+nn}.$$

Tum vero erit $\cot u = 1$, & $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Quamobrem habebitur $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$; $\sin 4u = 0$; $\sin 6u = -1$; $\sin 8u = 0$; $\sin 10u = 1$; &c.

Hancobrem erit:

$$s = \frac{\pi}{4n} - \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2.2n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{6.8n^7} - \frac{\mathfrak{E}}{10.2^5 n^{11}} + \frac{\mathfrak{G}}{14.2^7 n^{15}} - \&c. + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)},$$

in qua expressione tantum numeri alterni ex Bernoullianis occurrunt. Si igitur valor ipsius s per computum actu institutum iam fuerit inuentus, hinc quantitas π definiri poterit, erit enim:

$$\pi = 4ns + \frac{1}{n} + \frac{\mathfrak{A}}{1.n^2} - \frac{\mathfrak{C}}{3.2^2 n^6} + \frac{\mathfrak{E}}{5.2^4 n^{10}} - \frac{\mathfrak{G}}{7.2^6.n^{14}} + \&c. - \frac{\pi}{e^{2n\pi}-1}.$$

Etsi enim in termino vltimo inest π, tamen quia is tantopere est paruus, sufficit valorem ipsius π proxime nosse.

EXEMPLUM: Sit $n = 5$; erit:

$$s = \frac{1}{26} + \frac{1}{29} + \frac{1}{34} + \frac{1}{41} + \frac{1}{50}$$

qui

qui termini actu additi dabunt:

$$s = 0,146746305690549494$$

vnde erunt termini illi:

$$4ns = 2,93492611381098988$$

$$\frac{1}{n} = 0,2$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{nn} = 0,00666666666666666$$

$$\overline{3,14159278047765654}$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{3.2^2.n^6} = 0,00000012698412698$$

$$\overline{3,14159265349352956}$$

$$\frac{\mathfrak{E}}{5.2^4.n^{10}} = 0,00000000009696969$$

$$\overline{3,14159265359049925}$$

$$\frac{\mathfrak{G}}{7.2^6.n^{14}} = 0,00000000000042666$$

$$\overline{3,14159265359007259}$$

$$\frac{\mathfrak{I}}{9.2^8.n^{18}} = 625$$

$$\overline{3,14159265359007884}$$

Hic valor iam tam prope ad veritatem accedit, vt mirandum ſit tam leui calculo eousque perueniri poſſe. Eſt vero haec expreſſio aliquantillum iuſto maior, ſubtrahi enim adhuc inde debet $\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1}$, cuius valor, dummodo π prope ſit cognitum, exhiberi poteſt; quod per logarithmos ita expedietur.

Quia eſt $\pi le = 1,3643763538$

erit $le^{2n\pi} = 10\pi le = 13,6437635.$

Cum

Cum iam ſit $\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1} = \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} + \frac{4\pi}{e^{4n\pi}} +$ &c. facile intelligitur ad noſtrum calculum ſufficere primum terminorum ſumſiſſe. Augeamus ergo characteriſticam numero 17, quia habemus totidem figuras decimales, erit:

$$l\pi = 17,4971498$$
$$l4 = 0,6020600$$

$$18,0992098$$

ſubtr. $le^{2n\pi} = 13,6437635$

$$4,4554463$$

Ergo $\frac{4\pi}{e^{2n\pi}} = 28539$ ſubtrahatur

ab $3,14159265359007884$ erit

$$\pi = 3,14159265358979345$$

quae expreſſio in figura demum penultima a veritate recedit; quod mirandum non eſt, cum adhuc terminum $\frac{\mathfrak{L}}{11 \cdot 2^{10} \cdot n^{22}}$, qui dat 22, ſubtrahere debuiſſemus, ſicque ne vltima quidem figura aberraſſet. Ceterum intelligitur, ſi pro n maiorem numerum vti 10 aſſumſiſſemus, tum facili negotio peripheriam π ad 25 pluresque figuras inueniri potuiſſe.

157. Ponamus nunc quoque pro z functiones transcendentes ipſius x, ſitque $z = lx$, ſumendo logarithmos hyperbolicos, quoniam vulgares facile eo reuocantur; ſit-

ſitque: $s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx$.
Quia igitur eſt $z = lx$, erit $\int z\,dx = xlx - x$, huius enim differentiale dat $dx\,lx$. Deinde eſt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x};\ \frac{ddz}{dx^2} = -\frac{1}{x^2};\ \frac{d^3z}{1.2\,dx^3} = \frac{1}{x^3};\ \frac{d^5z}{1.2.3.4\,dx^5} = \frac{1}{x^5};$$
&c.

Hinc itaque concluditur fore:

$$s = xlx - x + \tfrac{1}{2}lx + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7} + \&c.$$
$$+ \text{Conſt.}$$

Haec autem conſtans ponendo $x = 1$, quia fit $s = l1 = 0$ ita definietur, vt ſit:

$$C = 1 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6} + \frac{\mathfrak{D}}{7.8} - \&c.$$

quae ſeries ob nimiam diuergentiam eſt inepta ad valorem ipſius C ſaltem proxime eruendum.

158. Non ſolum autem proximum ſed etiam ipſum verum valorem ipſius C inueniemus, ſi conſideremus expreſſionem Walliſianam pro valore ipſius π inuentam, atque in introductione demonſtratam: quae erat:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\,2.\,4.\,4.\,6.\,6.\,8.\,8.\,10.\,10.\,12.\ \&c.}{1.\,3.\,3.\,5.\,5.\,7.\,7.\,9.\,9.\,11.\,11.\ \&c.}$$

hinc enim logarithmis ſumendis erit:

$$l\pi - l2 = 2l2 + 2l4 + 2l6 + 2l8 + 2l10 + \&c.$$
$$- l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 - 2l9 - 2l11 - \&c.$$

Ponamus ergo in ſerie aſſumta $x = \infty$, & cum ſit:

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx = C + (x + \tfrac{1}{2})\, lx - x$$

erit $l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + l2x = C + (2x + \tfrac{1}{2})\, l2x - 2x$

& $l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots + l2x = C + (x + \tfrac{1}{2}) lx + xl2 - x$

hinc $l1 + l3 + l5 + l7 + \ldots + l(2x-1) = xlx + (x + \tfrac{1}{2})\, l2 - x$

Cum igitur ſit:

$$l\frac{\pi}{2} = 2l2 + 2l4 + 2l6 + \ldots + 2l2x - l2x$$
$$- 2l1 - 2l3 - 2l5 - \ldots - 2l(2x-1)$$

poſito $x = \infty$, erit:

$$l\frac{\pi}{2} = 2C + (2x+1)\, lx + 2xl2 - 2x - l2 - lx$$
$$- 2xlx - (2x+1)\, l2 + 2x,$$

ideoque $l\frac{\pi}{2} = 2C - 2l2$, ergo $2C = l2\pi$, & $C = \frac{1}{2} l2\pi$, vnde in fractionibus decimalibus reperitur:

$$C = 0{,}91893853320467274178032 97$$

atque ſimul ſequens ſeries ſummatur:

$$1 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6} + \frac{\mathfrak{D}}{7.8} - \frac{\mathfrak{E}}{9.10} + \&c. = \tfrac{1}{2}\, l2\pi.$$

159. Cognita nunc iſta conſtante $C = \frac{1}{2} l2\pi$, ſumma quotcunque logarithmorum ex hac ſerie $l1 + l2 + l3 + \&c.$ exhiberi poteſt. Si enim ponatur:

$s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx$, erit

$$s = \tfrac{1}{2} l2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) lx - x + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7} + \&c.$$

ſiqui-

ſi quidem logarithmi propoſiti fuerit hyperbolici; ſin autem proponantur logarithmi vulgares, tum in terminis $\frac{1}{2}l2\pi+(x+\frac{1}{2})lx$ pro $l2\pi$ & lx ſumi debebunt logarithmi vulgares, reliqui autem ſeriei termini $-x+\frac{\mathfrak{A}}{1.2x}-\frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3}+\&c.$ multiplicari debent per $0,4342944819032518 27 = n$.

Erit igitur hoc caſu pro logarithmis vulgaribus:

$$\begin{aligned} l\pi &= 0,49714987269413385435 1268 \\ l2 &= 0,30102999566398119521 3738 \\ \hline l2\pi &= 0,79817986835811504956 5006 \\ \tfrac{1}{2}l2\pi &= 0,39908993417905752478 2503 \end{aligned}$$

EXEMPLUM.

Quaeratur aggregatum mille logarithmorum tabularium

$$s = l1 + l2 + l3 + \ldots\ldots + l1000.$$

$$\begin{aligned} &\text{Erit ergo } x = 1000, \ \& \ lx = 3,0000000000000 \\ &\text{vnde fit} \qquad xlx = 3000,0000000000000 \\ &\qquad \tfrac{1}{2}lx = 1,5000000000000 \\ &\qquad \tfrac{1}{2}l2\pi = 0,3990899341790 \\ &\qquad\qquad 3001,8990899341790 \\ &\text{ſubtr.} \qquad nx = 434,2944819032518 \\ &\qquad\qquad 2567,6046080309272 \\ &\text{Deinde eſt} \quad \frac{n\mathfrak{A}}{1.2x} = 0,0000361912068 \\ &\text{ſubtr.} \quad \frac{n\mathfrak{B}}{3.4x^3} = 0,0000000000012 \\ &\qquad\qquad 0,0000361912056 \\ &\text{addatur} \qquad 2567,6046080309272 \\ &\text{ſumma quaeſita} \quad s = 2567,6046442221328. \end{aligned}$$

 Cum

Cum igitur s ſit logarithmus producti numerorum:

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ 1000$$

patet hoc productum, ſi actu multiplicetur, conſtare ex 2568 figuris, atque notas a leua initiales fore 4023872 quas inſuper 2561 figurae ſequentur.

160. Ope ergo huius logarithmorum ſummationis producta ex quocunque factoribus, qui ſecundum numeros naturales procedunt, proxime aſſignari poterunt. Huc potiſſimum referri poteſt problema, quo quaeritur vncia media ſeu maxima in poteſtate binomii quacunque $(a+b)^m$; vbiquidem notandum eſt, ſi m ſit numerus impar, binas dari medias inter ſe aequales, quae iunctim ſumtae praebeant vnciam mediam in poteſtate ſequente pari. Quare cum vncia maxima in quaque poteſtate pari ſit duplo maior quam vncia media in poteſtate praecedente impari, ſufficiet pro poteſtatibus paribus vnciam mediam maximam determinaſſe. Sit igitur $m = 2n$, & vncia media ita exprimetur vt ſit:

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ \ldots\ (n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n}$$

Vocetur iſta vncia media quae quaeritur $= u$, atque ea hoc modo repraeſentari poterit, vt ſit:

$$u = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots\ 2n}{(1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n)^2}$$

ſumtisque logarithmis erit:

$$lu = l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \ldots + l2n$$
$$- 2l1 - 2l2 - 2l3 - 2l4 - 2l5 \ldots - 2ln.$$

161.

161. Iam vero ſumendis his logarithmis hyperbolicis erit:

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots + l2n =$$

$$= \tfrac{1}{2}l2\pi + (2n+\tfrac{1}{2})\,ln + (2n+\tfrac{1}{2})\,l2 - 2n$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} - \&c.$$

& $2l1 + 2l2 + 2l3 + 2l4 + \ldots + 2ln =$

$$l2\pi + (2n+1)\,ln - 2n + \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} - \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} + \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} - \&c.$$

qua expreſſione ab illa ſublata relinquetur:

$$lu = -\tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}ln + 2nl2 + \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} - \&c.$$

$$- \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} + \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} - \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} + \&c.$$

his vero binis terminis colligendis, erit:

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^7n^7} - \&c.$$

Sit $\frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2^2n^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^4n^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^6n^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^8n^8} + \&c.$

$= l\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \frac{D}{2^8n^8} + \&c.\right)$; erit

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - 2nl\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \&c.\right);$$

ideoque $u = \dfrac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \&c.\right)^{2n}\sqrt{n\pi}}.$

Erit vero posito $2n = m$

$$l\left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \frac{D}{2^8 n^8} + \&c.\right) =$$

$$\frac{A}{m^3} + \frac{B}{m^4} + \frac{C}{m^6} + \frac{D}{m^8} + \frac{E}{m^{10}} + \&c.$$

$$- \frac{A^2}{2m^4} - \frac{AB}{m^6} - \frac{AC}{m^8} - \frac{AD}{m^{10}} - \&c.$$

$$- \frac{BB}{2m^8} - \frac{BC}{m^{10}} - \&c.$$

$$+ \frac{A^3}{3m^6} + \frac{A^2B}{m^8} + \frac{A^2C}{m^{10}} + \&c.$$

$$+ \frac{AB^2}{m^{10}} + \&c.$$

$$- \frac{A^4}{4m^8} - \frac{A^3B}{m^{10}} - \&c.$$

$$+ \frac{A^5}{5m^{10}} + \&c.$$

quae expressio cum aequalis esse debeat huic:

$$\frac{3\mathfrak{A}}{1.2m^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4m^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6m^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8m^8} + \&c.$$

fiet:

$$A = \frac{3\mathfrak{A}}{1.2}$$

$$B = \frac{A^2}{2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4}$$

$$C = AB - \tfrac{1}{3}A^3 + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6}$$

D =

$$D = AC + \tfrac{1}{2}B^2 - A^2B + \tfrac{1}{4}A^4 - \frac{255\,\mathfrak{D}}{7.8}$$

$$E = AD + BC - A^2C - AB^2 + A^3B - \tfrac{1}{5}A^5 + \frac{1023\,\mathfrak{E}}{9.10}$$

&c.

162. Cum iam sit $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{E} = \frac{5}{66}$; erit:

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{1}{96}$$

$$C = \frac{27}{640}$$

$$D = -\frac{90031}{2^{11}.3^2.5.7} \qquad \&c.$$

Hinc efficitur:

$$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{1}{2^4 n^2} - \frac{1}{2^9.3n^4} + \frac{27}{2^{15}.5n^6} - \frac{90031}{2^{19}.3^2.5.7n^8} + \&c.\right)^{2n} \sqrt{n\pi}}$$

$$\text{seu } u = \frac{2^{2n}\left(1 - \frac{1}{2^4 n^2} + \frac{7}{2^9.3n^4} - \frac{121}{2^{13}.3.5n^6} + \frac{104969}{2^{19}.3^2.5.7n^8} - \&c.\right)^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

vel si ista seriei eleuatio actu instituatur, erit proxime:

$$u = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16.128n^4}\ \&c.\right)}$$

hinc

hinc terminus medius in $(1+1)^{2n}$, erit ad summam omnium terminorum 2^{2n}

vti 1 ad $\sqrt{n\pi}\left(1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{32n^2}-\frac{1}{12.8n^3}-\frac{5}{16.128n^4}-\&c.\right)$

vel posito breuitatis gratia $4n=\nu$, erit ista ratio:

vt 1 ad $\sqrt{n\pi}\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{2\nu^2}-\frac{1}{2\nu^3}-\frac{5}{8\nu^4}+\frac{23}{8\nu^5}+\frac{53}{16\nu^6}-\&c.\right)$

EXEMPLUM I.

Quaeratur vncia media in binomio $(a+b)^{10}$ *euoluto, quam constat esse* $=\frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}=252.$

Adhibendo vltimam formulam pro u inuentam erit $n=5$

$$\frac{1}{4n} = 0{,}0500000$$

$$\frac{1}{32n^2} = 0{,}0012500$$

$$0{,}0512500$$

subtr. $\frac{1}{128n^3} = 625$

$$0{,}0511875$$

subtr. $\frac{5}{16.128n^4} = 39$

Ergo $1+\frac{1}{4n}+\&c. = 1{,}0511836$

Huius log. $= 0{,}0216784$

$ln = 0{,}6989700$

$l\pi = 0{,}4971498$

$$1{,}2177982$$

$l\sqrt{n}$

$$l\sqrt{n\pi}(1+\&c.) = 0,6088991$$
$$\text{a} \quad l2^{2n} = 3,0102999$$
$$lu = 2,4014008.$$
vnde fit $u = 252$.

EXEMPLUM II.

Inuestigetur ratio, quam in potestate centesima binomii $1+1$ *terminus medius ad summam omnium* 2^{100} *tenet.*

Vtamur ad hoc formula primum inuenta:

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \&c.$$

in qua posito $2n = m$ vt habeatur ista potestas $(1+1)^m$ & loco $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, substitutis valoribus; fiet:

$$lu = l\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{1}{4m} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{20m^5} + \frac{17}{112m^7} - \frac{31}{36m^9} + \frac{691}{88m^{11}} - \&c.$$

qui logarithmi cum sint hyperbolici, multiplicentur ii per

$$k = 0,434294481903251,$$

vt transmutentur in tabulares, eritque

$$lu = l\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{k}{4m} + \frac{k}{24m^3} - \frac{k}{20m^5} + \frac{17k}{112m^7} - \frac{31k}{36m^9} + \&c.$$

vnde cum vncia media sit u, erit $2^m : u$ ratio quaesita, ideoque

$$l\frac{2^m}{u} = l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} + \frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \frac{k}{20m^5} - \frac{17k}{112m^7} + \frac{31k}{36m^9} - \frac{691k}{88m^{11}} + \&c.$$

Quare cum ſit ob exponentem $m = 100$

$\frac{k}{m} = 0,0043429448$: $\frac{k}{m^3} = 0,0000004343$;

$\frac{k}{m^5} = 0,0000000000$:

erit :

$$\frac{k}{4m} = 0,0010857362$$

$$\frac{k}{24m^3} = 0,0000000181$$

$$0,0010857181$$

Tum eſt $l\pi = 0,4971498726$

$$l\tfrac{1}{2}m = 1,6989700043$$

$$l\tfrac{1}{2}m\pi = 2,1961198769$$

$$l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} = 1,0980599384$$

$$\frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \&c. = 0,0010857181$$

$$1,0991456565 = l\frac{2^{100}}{u}.$$

Erit ergo $\frac{2^{100}}{u} = 12,56451$, atque adeo in poteſtate $(1+1)^{100}$ euoluta terminus medius ſe habebit ad ſummam omnium 2^{100} vti 1 ad 12, 56451.

163. Denotet nunc terminus generalis z functionem exponentialem a^x, ita vt ſummari debeat haec ſeries geometrica :

$$s = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots + a^x$$

quae

quae cum ſit geometrica, eius ſumma iam conſtat, erit enim $s = \frac{(a^x - 1)a}{a - 1}$. Modo autem hic expoſito hanc ſummam inueſtigemus. Quia eſt $z = a^x$, erit $\int z\,dx = \frac{a^x}{la}$, huius enim differentiale eſt $a^x dx$, tum vero erit:

$$\frac{dz}{dx} = a^x la;\quad \frac{ddz}{dx^2} = a^x (la)^2;\quad \frac{d^3 z}{dx^3} = a^x (la)^3;\ \&c.$$

vnde ſequitur fore:

$$s = a^x\left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3\ldots6}(la)^5 - \&c.\right) + C.$$

Ad conſtantem C definiendam ponatur $x = 0$, & ob $s = 0$, erit $C = -\frac{1}{la} - \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la + \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 - \&c.$

ideoque fiet:

$$s = (a^x - 1)\left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3\ldots6}(la)^5 - \&c.\right)$$

Cum igitur ſumma ſit $\frac{(a^x - 1)a}{a - 1}$, erit:

$$\frac{a}{a-1} = \frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}(la)^5}{1.2\ldots6} - \&c.$$

vbi la denotat logarithmum hyperbolicum ipſius a: hinc fit $\frac{(a+1)la}{2(a-1)} = 1 + \frac{\mathfrak{A}(la)^2}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}(la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}(la)^6}{1.2\ldots6} - \&c.$ ſicque iſtius ſeriei ſumma exhiberi poterit.

164. Sit terminus generalis $z = \sin ax$, &

$$s = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots\ldots + \sin ax$$

quae series cum sit recurrens quoque summari potest; erit enim

$$s = \frac{\sin a + \sin ax - \sin(ax+a)}{1 - 2\cos a + 1} = \frac{\sin a + (1-\cos a)\sin ax - \sin a \cos ax}{2(1-\cos a)}$$

Erit vero $\int z\,dx = \int dx \sin ax = -\frac{1}{a}\cos ax$, & $\frac{dz}{dx} = a\cos ax$;

$\frac{ddz}{dx^2} = -aa\sin ax$; $\frac{d^3z}{dx^3} = a^3\cos ax$; $\frac{d^5z}{dx^5} = a^5\cos ax$ &c.

$$s = C - \frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{2}\sin ax + \frac{\mathfrak{A}a\cos ax}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}a^3\cos ax}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}a^5\cos ax}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\mathfrak{D}a^7\cos ax}{1.2\ldots 8} + \&c.$$

Ponatur $x = 0$ vt fiat $s = 0$; eritque:

$$C = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots 6} - \&c. \text{ ergo}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\sin ax + (1-\cos ax)\left(\frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}u}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3\,4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots 6} - \&c.\right)$$

At cum sit $s = \frac{1}{2}\sin ax + \frac{(1-\cos ax)\sin a}{2(1-\cos a)}$, fiet:

$$\frac{\sin a}{2(1-\cos a)} = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots 6} - \&c.$$

quam eandem seriem iam supra §. 127. habuimus.

165. Sit nunc $z = \cos ax$, ac series summanda:

$$s = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots\ldots + \cos ax$$

cu-

cuius seriei, quia est recurrens, erit summa:

$$s = \frac{\cos a - 1 + \cos ax - \cos(ax+a)}{1 - 2\cos a + 1} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos ax + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a.\sin ax.$$

At vero ad summam nostra methodo exprimendam, erit:

$$\int z\,dx = \int dx \cos ax = \frac{1}{a}\sin ax, \quad \& \quad \frac{dz}{dx} = -a\sin ax;$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = a^3 \sin ax\,; \quad \frac{d^5 z}{dx^5} = -a^5 \sin ax\,; \quad \&c. \quad \text{Ergo}$$

$$s = C + \frac{1}{a}\sin ax + \tfrac{1}{2}\cos ax - \frac{\mathfrak{A} a \sin ax}{1.\,2} - \frac{\mathfrak{B} a^3 \sin ax}{1.2.3.4} - \&c.$$

Sit $x = 0$, erit $s = 0$, & $C = -\frac{1}{2}$, hincque erit:

$$s = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos ax + \frac{1}{a}\sin ax - \frac{\mathfrak{A} a \sin ax}{1.\,2} - \frac{\mathfrak{B} a^3 \sin ax}{1.2.3.4} - \&c.$$

Quare cum sit $s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos ax + \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a.\sin ax$, erit vti iam modo inuenimus:

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A} a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C} a^5}{1.2.3.4.5.6} - \&c.$$

166. Quoniam supra inuenimus, si a denotet arcum quemcunque, esse

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2} + \sin a + \tfrac{1}{2}\sin 2a + \tfrac{1}{3}\sin 3a + \tfrac{1}{4}\sin 4a + \&c.$$

consideremus hanc seriem, sitque $z = \frac{1}{x}\sin ax$, vt sit

$$s = \sin a + \tfrac{1}{2}\sin 2a + \tfrac{1}{3}\sin 3a + \quad \ldots \quad + \frac{1}{x}\sin ax.$$

Hoc autem casu fit $\int z\,dx = \int \frac{dx}{x}\sin ax$, quod integrale exhiberi nequit.



Erit vero $\frac{dz}{dx} = \frac{a}{x}\cos ax - \frac{1}{xx}\sin ax$;

$$\frac{ddz}{dx^2} = -\frac{a^2}{x}\sin ax - \frac{2a}{xx}\cos ax + \frac{2}{x^3}\sin ax;$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = -\frac{a^3}{x}\cos ax + \frac{3a^2}{x^2}\sin ax + \frac{6a}{x^3}\cos ax - \frac{6}{x^4}\sin ax;$$

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \frac{a^4}{x}\sin ax + \frac{4a^3}{xx}\cos ax - \frac{12a^2}{x^3}\sin ax - \frac{24a}{x^4}\cos ax + \frac{24}{x^5}\sin ax.$$

Quia igitur neque formulam integralem $\int z\,dx$ exhibere, neque haec differentialia ſatis commode exprimere licet, ſummam huius ſeriei per hanc methodum definire non poſſumus, ita vt quicquam inde concludi poſſet. Idem incommodum in multis aliis ſeriebus occurrit, quoties terminus generalis non ſatis eſt ſimplex, vt eius differentialia ad commodam legem exprimi queant. Quamobrem in ſequenti Capite alias expreſſiones generales pro ſummis ſerierum, quarum termini generales vel nimis ſunt compoſiti vel prorſus dari nequeunt, eliciemus; quae feliciori ſucceſſu in vſum vocari poterunt. Imprimis autem inſufficientia methodi hic traditae elucet, ſi ſigna terminorum ſeriei propoſitae alternentur, tum enim quantumuis termini generales ſint ſimplices, tamen termini ſummatorii hac methodo exhiberi commode nequeunt.

CA-

CAPUT VII.

METHODUS SUMMANDI SUPERIOR VLTERIUS PROMOTA.

167.

Vt defectum methodi ſummandi ante traditae ſuppleamus, in hoc Capite eiusmodi ſeries conſiderabimus, quarum termini generales magis ſint complexi. Cum igitur expreſſio ante inuenta in progreſſionibus geometricis, etſi aliis methodis facillime ſummari poſſunt, veram ſummam finita formula contentam non praebeat, hic primum eiusmodi ſeries contemplabimur, quarum termini ſint producta ex terminis ſeriei geometricae & alius cuiuscunque. Sit igitur propoſita haec ſeries:

$$s = \overset{1}{ap} + \overset{2}{bp^2} + \overset{3}{cp^3} + \overset{4}{dp^4} + \ldots + \overset{x}{yp^x}$$

quae eſt compoſita ex geometrica p, p^2, p^3, &c. & alia quacunque ſerie $a + b + c + d +$ &c. cuius terminus generalis ſeu indici x reſpondens ſit $= y$, atque expreſſionem generalem inueſtigemus pro valore eius ſummae $s = S.yp^x$.

168. Inſtituamus ratiocinium eodem modo, quo ſupra vſi ſumus, ſitque v terminus antecedens ipſi y in ſerie $a + b + c + d +$ &c. atque A praecedens ipſi a ſeu is qui indici o reſpondet, eritque vp^{x-1} terminus generalis huius ſeriei:

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{ap} + \overset{3}{bp^2} + \overset{4}{cp^3} + \ldots + \overset{x}{vp^{x-1}}$$

cuius summa, si indicetur per $S.vp^{x-1}$ erit:

$$S.vp^{x-1} = \frac{1}{p}S.vp^x = S.yp^x - yp^x + A.$$

Cum autem sit:

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

erit:

$$S.yp^x - yp^x + A = \frac{1}{p}S.yp^x - \frac{1}{p}S\frac{dy}{dx}p^x + \frac{1}{2p}S\frac{ddy}{dx^2}p^x$$

$$- \frac{1}{6p}S\frac{d^3y}{dx^3}p^x + \frac{1}{24p}S\frac{d^4y}{dx^4}p^x - \&c.$$

Ex qua fit:

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S\frac{dy}{dx}p^x + S\frac{ddy}{2dx^2}p^x - S\frac{d^3y}{6dx^3}p^x + \&c.\right)$$

Si ergo habeantur termini summatorii serierum, quarum termini generales sunt $\frac{dy}{dx}p^x$; $\frac{ddy}{dx^2}p^x$; $\frac{d^3y}{dx^3}p^x$; &c. ex iis definiri poterit terminus summatorius Syp^x.

169. Hinc iam summae inueniri poterunt serierum, quarum termini generales in hac forma x^np^x continentur. Sit enim $y = x^n$, erit $A = 0$, nisi sit $n = 0$, quo casu foret $A = 1$, & quia est:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}; \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3};$$

&c.

erit:

erit:

$$S.x^n p^x = \frac{1}{p-1}\Big(x^n p^{x+1} - Ap - nS.x^{n-1}p^x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} S.x^{n-2}p^x$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} S.x^{n-3}p^x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} S.x^{n-4}p^x - \&c.\Big)$$

Ex hac forma nunc ſucceſſiue pro n ſubſtituendo numeros 0, 1, 2, 3, &c. obtinebuntur ſequentes ſummationes; ac primo quidem ſi $n = 0$, fit $A = 1$, in reliquis autem caſibus erit $A = 0$:

$$S.x^0 p^x = S.p^x = \frac{1}{p-1}(p^{x+1} - p) = \frac{p^{x+1}-p}{p-1} = \frac{p(p^x - 1)}{p-1},$$

quae eſt ſumma progreſſionis geometricae cognita:

$$S.xp^x = \frac{1}{p-1}(xp^{x+1} - S.p^x) = \frac{xp^{x+1}}{p-1} - \frac{(p^{x+1}-p)}{(p-1)^2}$$

ſeu $$S.xp^x = \frac{pxp^x}{p-1} - \frac{p(p^x-1)}{(p-1)^2},$$

$$S.x^2p^x = \frac{1}{p-1}(x^2p^{x+1} - 2S.xp^x + S.p^x) \quad \text{ſeu}$$

$$S.x^2p^x = \frac{x^2p^{x+1}}{p-1} - \frac{2xp^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)(p^x-1)}{(p-1)^3}.$$

Porro eſt

$$S.x^3p^x = \frac{1}{p-1}(x^3p^{x+1} - S.x^2p^x + 3S.xp^x - S.p^x)$$

ſeu

$$S.x^3p^x = \frac{x^3p^{x+1}}{p-1} - \frac{3x^2p^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{3(p+1)xp^{x+1}}{(p-1)^3} - \frac{p(pp+4p+1)(p^x-1)}{(p-1)^4}$$

ſicque vlterius progrediendo ſuperiorum poteſtatum x^4p^x; x^5p^x; x^6p^x; &c. ſummae definiri poterunt, hoc vero commodius praeſtabitur ope expreſſionis generalis, quam nunc inueſtigabimus.

170. Quoniam inuenimus eſſe:

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S.\frac{dy}{dx}p^x + S.\frac{ddy}{2\,dx^2}p^x - S.\frac{d^3y}{6\,dx^3}p^x + \&c.\right)$$

vbi A eſt eiusmodi conſtans, vt ſumma fiat $=0$, ſi ponatur $x=0$: namque hoc caſu fit $y=A$, & $yp^{x+1}=Ap$; hanc conſtantem omittere poterimus, dummodo perpetuo meminerimus ad ſummam quamque ſemper eiusmodi conſtantem adiici oportere, vt facto $x=0$, euaneſcat, ſeu vt alii cuipiam caſui ſatisfiat. Statuamus ergo z loco y, eritque

$$S.p^xz = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{1}{p-1}S.p^x\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2(p-1)}S.p^x\frac{ddz}{dx^2}$$
$$-\frac{1}{6(p-1)}S.p^x\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{24(p-1)}S.p^x\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{120(p-1)}S.p^x\frac{d^5z}{dx^5}$$
$$+\ \&c.$$

Deinde ſtatuamus ſucceſſiue $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. in locum y eritque:

$$S.\frac{p^x dz}{dx} = \frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \&c.$$

$$S.\frac{p^x ddz}{dx^2} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^4 z}{dx^4} - \&c.$$

$$S.\frac{p^x d^3 z}{dx^3} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^4 z}{dx^4} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^5 z}{dx^5} - \&c.$$

&c.

Si igitur hi valores ſucceſſiue ſubſtituantur, $S.p^x z$ huiusmodi forma exprimetur:

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{\alpha p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{dz}{dx} + \frac{\beta p^{x+1}}{(p-1)}\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\gamma p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{ddz}{dx^3}$$

$$+ \frac{\delta p^{x+1}}{(p-1)}\frac{d^4 z}{dx^4} - \frac{\varepsilon p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{d^5 z}{dx^5} + \&c.$$

171. Ad valores litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. definiendos, ſubſtituantur pro quouis termino ſeries ante inuentae nempe:

$$\frac{p^{x+1}z}{p-1} = S.p^x z + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x dz}{dx} - \frac{1}{2(p-1)}S\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{6(p-1)}S\frac{p^x d^3 z}{dx^3} - \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}dz}{(p-1)dx} = S\frac{p^x dz}{dx} + \frac{1}{p-1}S\frac{p^x ddz}{dx^2} - \frac{1}{2(p-1)}S\frac{p^x d^3 dz}{dx^3} + \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}ddz}{(p-1)dx^2} = S\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{(p-1)}S\frac{p^x d^3 z}{dx^3} - \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}d^3 z}{(p-1)dx^3} = S\frac{p^x d^3 z}{dx^3} + \&c.$$

Habebimus ergo : $S.p^x z =$

$$\begin{array}{lllll}
S.p^x z + \dfrac{1}{p-1} & S\dfrac{p^x dz}{dx} - \dfrac{1}{2(p-1)} & S.\dfrac{p^x ddz}{dx^2} + \dfrac{1}{6(p-1)} & S\dfrac{p^x d^3 z}{dx^3} - \dfrac{1}{24(p-1)} & S\dfrac{p^x d^4 z}{dx^4} + \&c. \\
-\alpha & -\dfrac{\alpha}{p-1} & +\dfrac{\alpha}{2(p-1)} & -\dfrac{\alpha}{6(p-1)} & \\
 & +\beta & +\dfrac{\beta}{p-1} & -\dfrac{\beta}{2(p-1)} & \\
 & & -\gamma & -\dfrac{\gamma}{p-1} & \\
 & & & +\delta &
\end{array}$$

vnde coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. valores sequentes obtinebuntur :

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

$$\beta = \frac{1}{p-1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{p-1}\left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{p-1}\left(\gamma + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{p-1}\left(\delta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120}\right) \quad \&c.$$

172. Sit breuitatis gratia $\frac{1}{p-1} = q$, erit :

$$\alpha = q$$

$$\beta = \alpha q + \tfrac{1}{2} q = qq + \tfrac{1}{2} q$$

$$\gamma = \beta q + \tfrac{1}{2}\alpha q + \tfrac{1}{6} q = q^3 + qq + \tfrac{1}{6} q$$

$$\delta = \gamma q + \tfrac{1}{2}\beta q + \tfrac{1}{6}\alpha q + \tfrac{1}{24} q = q^4 + \tfrac{3}{2} q^3 + \tfrac{7}{12} q^2 + \tfrac{1}{24} q$$

$$\varepsilon = \delta q + \tfrac{1}{2}\gamma q + \tfrac{1}{6}\beta q + \tfrac{1}{24}\alpha q + \tfrac{1}{120} q$$

seu

seu $\varepsilon = q^5 + 2q^4 + \frac{5}{4}q^3 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{120}q$ &

$\zeta = q^6 + \frac{5}{2}q^5 + \frac{13}{6}q^4 + \frac{3}{4}q^3 + \frac{31}{360}q^2 + \frac{1}{720}q$ &c.

seu hoc modo exprimantur:

$$\alpha = \frac{q}{1}$$

$$\beta = \frac{2qq + q}{1.\ 2}$$

$$\gamma = \frac{6q^3 + 6q^2 + q}{1.\ 2.\ 3}$$

$$\delta = \frac{24q^4 + 36q^3 + 14q^2 + q}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$\varepsilon = \frac{120q^5 + 240q^4 + 150q^3 + 30q^2 + q}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

$$\zeta = \frac{720q^6 + 1800q^5 + 1560q^4 + 540q^3 + 62q^2 + q}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$$

$$\eta = \frac{5040q^7 + 15120q^6 + 16800q^5 + 8400q^4 + 1806q^3 + 126q^2 + q}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}$$ &c.

vbi quilibet coefficiens 16800 oritur, si summa binorum superiorum 1560 + 1800 per exponentem ipsius q, qui hic est 5, multiplicetur.

173. Restituamus autem loco q valorem $\frac{1}{p-1}$,

$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$

$$\beta = \frac{p+1}{1.2\,(p-1)^2}$$

$$\gamma = \frac{pp + 4p + 1}{1.2.3\,(p-1)^3}$$

 $\delta =$

$$\delta = \frac{p^3 + 11p^2 + 11p + 1}{1.2.3.4(p-1)^4}$$

$$\varepsilon = \frac{p^4 + 26p^3 + 66p^2 + 26p + 1}{1.2.3.4.5(p-1)^5}$$

$$\zeta = \frac{p^5 + 57p^4 + 302p^3 + 302p^2 + 57p + 1}{1.2.3.4.5.6(p-1)^6}$$

$$\eta = \frac{p^6 + 120p^5 + 1191p^4 + 2416p^3 + 1191p^2 + 120p + 1}{1.2.3.4.5.6.7(p-1)^7}$$

&c.

Lex harum quantitatum ita ſe habet, vt ſi ponatur terminus quicunque:

$$\frac{p^{n-2} + Ap^{n-3} + Bp^{n-4} + Cp^{n-5} + Dp^{n-6} + \&c.}{1.2.3 \ldots\ldots (n-1)(p-1)^{n-1}}$$

futurum ſit:

$$A = 2^{n-1} - n$$

$$B = 3^{n-1} - n.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$C = 4^{n-1} - n.3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$D = 5^{n-1} - n.4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}3^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}2^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

&c.

vnde iſti coefficientes α, β, γ, δ, &c. quousque libuerit, continuari poſſunt.

174. Quodſi vero legem, qua hi coefficientes inter ſe cohaerent, conſideremus, facile patet, eos ſeriem re-

recurrentem constituere, atque prodire si haec fractio euoluatur:

$$\frac{1}{1-\frac{u}{p-1}-\frac{u^2}{2(p-1)}-\frac{u^3}{6(p-1)}-\frac{u^4}{24(p-1)}-\&c.}$$

prodibit enim haec series:

$$1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\&c.$$

Ponatur illa fractio $=V$, & cum sit:

$$V=\frac{p-1}{p-1-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}-\frac{u^4}{24}-\&c.}$$

erit $V=\frac{p-1}{p-e^u}$; vbi e est numerus cuius logarithmus hyperbolicus est $=1$.

Atque si valor ipsius V per seriem exprimatur secundum potestates ipsius u, orietur:

$$V=1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\&c.$$

cuius coefficientes α, β, γ, δ, &c. erunt ii ipsi, quorum in praesenti negotio opus habemus. Iis igitur inventis erit:

$$S.p^x z=\frac{p^{x+1}}{p-1}\left(z-\frac{\alpha dz}{dx}+\frac{\beta ddz}{dx^2}-\frac{\gamma d^3z}{dx^3}+\frac{\delta d^4z}{dx^4}-\&c.\right)$$
$$\pm \text{ Const.}$$

quae ergo expressio est terminus summatorius seriei huius:

$$ap+bp^2+cp^3+\ldots\ldots+p^x z$$

cuius terminus generalis est $=p^x z$.

175.

175. Quoniam inuenimus esse $V = \frac{p-1}{p-e^u}$, erit $e^u = \frac{pV - p + 1}{V}$, & logarithmis sumendis fiet $u = l(pV - p + 1) - lV$, hincq; differentiando $du = \frac{(p-1)dV}{pV^2 - (p-1)V}$ quocirca erit $pV^2 = (p-1)V + \frac{(p-1)dV}{du}$. Quoniam ergo est $V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \&c.$ erit:

$$pV^2 = p + 2\alpha pu + 2\beta pu^2 + 2\gamma pu^3 + 2\delta pu^4 + 2\varepsilon pu^5 + \&c.$$
$$+ \alpha^2 pu^2 + 2\alpha\beta pu^3 + 2\alpha\gamma pu^4 + 2\alpha\delta pu^5 + \&c.$$
$$+ \beta\beta pu^4 + 2\beta\gamma pu^5 + \&c.$$

$$(p-1)V = (p-1) + \alpha(p-1)u + \beta(p-1)u^2 + \gamma(p-1)u^3$$
$$+ \delta(p-1)u^4 + \varepsilon(p-1)u^5 + \&c.$$
$$\frac{(p-1)dV}{du} = (p-1)\alpha + 2(p-1)\beta u + 3(p-1)\gamma u^2 + 4(p-1)\delta u^3$$
$$+ 5(p-1)\varepsilon u^4 + 6(p-1)\zeta u^5 + \&c.$$

quibus expressionibus inter se coaequatis reperietur:

$$(p-1)\alpha = 1$$
$$2(p-1)\beta = \alpha(p+1)$$
$$3(p-1)\gamma = \beta(p+1) + \alpha^2 p$$
$$4(p-1)\delta = \gamma(p+1) + 2\alpha\beta p$$
$$5(p-1)\varepsilon = \delta(p+1) + 2\alpha\gamma p + \beta\beta p$$
$$6(p-1)\zeta = \varepsilon(p+1) + 2\alpha\delta p + 2\beta\gamma p$$
$$7(p-1)\eta = \zeta(p+1) + 2\alpha\varepsilon p + 2\beta\delta p + \gamma\gamma p$$
&c.

ex

ex quibus formulis, si pro p datus numerus assumatur, valores coefficientium α, β, γ, δ, &c. facilius determinari possunt, quam ex lege primum inuenta.

176. Antequam ad casus speciales ratione valoris ipsius p descendamus, ponamus esse $z = x^n$, ita vt haec series summari debeat:

$$s = p + 2^n p^2 + 3^n p^3 + 4^n p^4 + \ldots + x^n p^x$$

eritque per expressionem ante inuentam:

$$s = p^x \left(\frac{p}{p-1} . x^n - \frac{p}{(p-1)^2} n x^{n-1} + \frac{pp+p}{(p-1)^3} . \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{x-2} \right.$$
$$\left. - \frac{(p^3 + 4p^2 + p)}{(p-1)^4} . \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} + \&c. \right)$$

$\pm$ C, quae reddat $s = 0$ si ponatur $x = 0$.

Hinc ponendo pro n successiue numeros 0, 1, 2, 3, 4, &c. erit:

$$S.x^0 p^x = p^x . \frac{p}{p-1} - \frac{p}{p-1}$$

$$S.x^1 p^x = p^x \left(\frac{px}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2} \right) + \frac{p}{(p-1)^2}$$

$$S.x^2 p^x = p^x \left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)}{(p-1)^3} \right) - \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}$$

$$S.x^3 p^x = p^x \left(\frac{px^3}{p-1} - \frac{3px^2}{(p-1)^2} + \frac{3p(p+1)x}{(p-1)^3} - \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4} \right)$$
$$+ \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}.$$

$$S.x^4p^x = p^x\left(\frac{px^4}{p-1} - \frac{4px^3}{(p-1)^2} + \frac{6p(p+1)x^2}{(p-1)^3} - \frac{4p(p^2+4p+1)x}{(p-1)^4} + \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}\right) - \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}$$

$$S.x^5p^x = \frac{p^{x+1}x^5}{p-1} - \frac{5p^{x+1}x^4}{(p-1)^2} + \frac{10(p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^3} - \frac{10(p^2+4p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^4} + \frac{5(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^5} - \frac{(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^6}$$

$$S.x^6p^x = \frac{p^{x+1}x^6}{p-1} - \frac{6p^{x+1}x^5}{(p-1)^2} + \frac{15(p+1)p^{x+1}x^4}{(p-1)^3} - \frac{20(p^2+4p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^4} + \frac{15(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^5} - \frac{6(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^6} + \frac{(p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^7}$$

&c.

177. Hinc intelligitur, quoties z fuerit functio rationalis integra ipsius x, toties seriei, cuius terminus generalis est p^xz, summam exhiberi posse; propterea quod differentialia ipsius z sumendo, tandem ad euanescentia perueniatur. Ita si proponatur haec series:

$$p + 3p^2 + 6p^3 + 10p^4 + \ldots + \frac{(xx+x)}{2}p^x,$$

qb

ob $z = \frac{xx+x}{2}$, & $\frac{dz}{dx} = x + \frac{1}{2}$; atque $\frac{ddz}{dx^2} = 1$;

erit terminus ſummatorius:

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}x - \frac{(2x+1)}{2(p-1)} + \frac{(p+1)}{2(p-1)^2}\right) - \frac{p}{p-1}\left(\frac{p+1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{2(p-1)}\right)$$

ſeu $s = p^{x+1}\left(\frac{xx}{2(p-1)} + \frac{(p-3)x}{2(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^3}$.

Sin autem z fuerit functio non rationalis integra, tum iſta termini ſummatorii expreſſio in infinitum excurret. Ita ſi ſit $z = \frac{1}{x}$, vt ſummanda ſit haec ſeries:

$$s = p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{4}p^4 + \ldots \ldots + \frac{1}{x}p^x,$$

ob

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{xx};\ \frac{ddz}{dx^2} = \frac{2}{x^3};\ \frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{2.3}{x^4};\ \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{2.3.4}{x^5};\ \&c.$$

prodibit terminus ſummatorius:

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(p-1)x^2} + \frac{p+1}{(p-1)^2x^3} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3x^4} + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{(p-1)^4x^5} + \&c.\right)$$
$$+ C.$$

Hoc ergo caſu conſtans C non ex caſu $x = 0$ definiri poteſt: ad eam igitur definiendam ponatur $x = 1$, & quia fit $s = p$, erit:

$$C = p - \frac{pp}{p-1}\left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{p+1}{(p-1)^2} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3} + \&c.\right)$$

178. Ex his perſpicuum eſt, niſi p determinatum numerum ſignificet, parum vtilitatis hinc ad ſummas ſerierum proxime exhibendas redundare. Primum autem patet pro p non poſſe ſcribi 1, propterea, quod omnes coefficientes α, β, γ, δ, &c. fierent infinite magni. Quare cum ſeries, quam nunc tractamus, abeat in eam quam ante iam ſumus contemplati, ſi ponatur $p = 1$, mirum eſt, quod ille caſus tanquam facillimus ex hoc erui nequeat. Tum vero quoque notabile eſt, quod caſu $p = 1$ ſummatio requirat integrale $\int z\,dx$, cum tamen generaliter ſumma ſine vllo integrali exhiberi queat. Sic igitur fit, vt dum omnes coefficientes α, β, γ, δ, &c. in infinitum excreſcunt, ſimul formula illa integralis inuehatur. Hicque adeo caſus, quo $p = 1$, eſt ſolus, ad quem generalis expreſſio hic inuenta applicari nequeat. Neque vero hoc caſu generalis forma a vero recedere cenſenda eſt; nam etſi ſinguli termini fiunt infiniti, tamen reuera omnia infinita ſe deſtruunt, reſtatque quantitas finita ſummae aequalis, & congruens cum ea, quae per priorem methodum inuenitur, quod infra fuſius ſumus declaraturi.

179. Sit igitur $p = -1$, atque ſigna in ſerie ſummanda alternatim ſe excipient:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ -a & +b & -c & +d & \ldots\ldots & \pm z \end{matrix}$$

vbi z erit affirmatiuum ſi x fuerit numerus par, negatiuum autem, ſi x ſit numerus impar. Poſito ergo

$-a+b-c+d \ldots \pm z = s$, erit

$$s = \frac{\pm 1}{2}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \&c.\right) + C.$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperius valet, ſi x ſit numerus par, contra vero ſi x ſit numerus impar. Mutandis ergo ſignis erit:

$$a-b+c-d+e-f+ \ldots \mp z =$$

$$\mp \frac{1}{2}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \&c.\right) + C.$$

vbi ſignorum ambiguitas eandem ſequitur legem.

180. Hoc caſu coefficientes α, β, γ, δ, ϵ, ζ, &c. inueniri poſſunt ex valoribus ante traditis ponendo vbique $p = -1$. Facilius autem eruentur ex formulis generalibus §. 175. datis, ex quibus ſimul perſpicietur alternos iſtos coefficientes euaneſcere. Facto enim $p = -1$ iſtae formulae abibunt in

$$-\alpha = 1$$
$$-4\beta = 0$$
$$-6\gamma = 0 - \alpha^2$$
$$-8\delta = 0 - 2\alpha\beta$$
$$-10\epsilon = 0 - 2\alpha\gamma - \beta\beta$$
$$-12\zeta = 0 - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma$$
&c.

 vnde

vnde cum ſit $\beta = 0$, erit quoque $\delta = 0$, porroque $\zeta = 0$, $\theta = 0$, &c. & reliquae litterae ita determinabuntur, vt ſit:

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{\alpha^2}{6}$$

$$\varepsilon = \frac{2\alpha\gamma}{10}$$

$$\eta = \frac{2\alpha\varepsilon + \gamma\gamma}{14}$$

$$\iota = \frac{2\alpha\eta + 2\gamma\varepsilon}{18} \quad \&c.$$

181. Quo iſte calculus commodius abſolui poſſit introducamus nouas litteras ſitque:

$$\alpha = -\frac{A}{1.2}$$

$$\gamma = \frac{B}{1.2.3.4}$$

$$\varepsilon = -\frac{C}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\eta = \frac{D}{1.2.3\ldots 8}$$

$$\iota = -\frac{E}{1.2.3\ldots 10} \quad \&c.$$

Eritque ſumma ante exhibita:

$$= \frac{1}{2}\left(z + \frac{A dz}{1.2\, dx} - \frac{B d^3 z}{1.2.3.4\, dx^3} + \frac{C d^5 z}{1.2\ldots 6\, dx^5} - \frac{D d^7 z}{1.2\ldots 8\, dx^7} + \&c.\right)$$
$$+ C.$$

Co-

Coefficientes vero ex ſequentibus formulis definientur:

$$A = 1$$
$$3B = \frac{4.3}{1.2}\frac{AA}{2}$$
$$5C = \frac{6.5}{1.2}AB$$
$$7D = \frac{8.7}{1.2}AC + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\frac{BB}{2}$$
$$9E = \frac{10.9}{1.2}AD + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.BC$$
$$11F = \frac{12.11}{1.2}AE + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}.BD + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\frac{CC}{2}$$

&c.

quae hoc modo facilius atque ad calculum accommodatius repraeſentari poſſunt:

$$A = 1$$
$$B = 2.\frac{AA}{2}$$
$$C = 3.AB$$
$$D = 4.AC + 4.\frac{6.5}{3.4}.\frac{BB}{2}$$
$$E = 5.AD + 5.\frac{8.7}{3.4}.BC$$
$$F = 6.AE + 6.\frac{10.9}{3.4}.BD + 6.\frac{10.9.8.7}{3.4.5.6}.\frac{CC}{2}$$
$$G = 7.AF + 7.\frac{12.11}{3.4}.BE + 7.\frac{12.11.10.9}{3.4.5.6}.CD$$

&c.

Hinc

Hinc igitur calculo instituto reperietur:

$$
\begin{aligned}
A &= 1 \\
B &= 1 \\
C &= 3 \\
D &= 17 \\
E &= 155 = 5.31 \\
F &= 2073 = 691.3 \\
G &= 38227 = 7.5461 = 7.\frac{127.129}{3} \\
H &= 929569 = 3617.257 \\
I &= 28820619 = 43867.9.73 \quad \&c.
\end{aligned}
$$

182. Si hos numeros attentius perpendamus, ex factoribus 691, 3617, 43867, facile concludere licet, hos numeros cum supra exhibitis Bernoullianis nexum habere, indeque determinari posse. Hanc igitur relationem inuestiganti mox patebit hos numeros ex Bernoullianis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, &c. sequenti modo formari posse:

$$
\begin{aligned}
A &= 2.\ 1.\ 3\ \mathfrak{A} = 2(2^2-1)\,\mathfrak{A} \\
B &= 2.\ 3.\ 5\ \mathfrak{B} = 2(2^4-1)\,\mathfrak{B} \\
C &= 2.\ 7.\ 9\ \mathfrak{C} = 2(2^6-1)\,\mathfrak{C} \\
D &= 2.\ 15.\ 17\ \mathfrak{D} = 2(2^8-1)\,\mathfrak{D} \\
E &= 2.\ 31.\ 33\ \mathfrak{E} = 2(2^{10}-1)\,\mathfrak{E} \\
F &= 2.\ 63.\ 65\ \mathfrak{F} = 2(2^{12}-1)\,\mathfrak{F} \\
G &= 2.127.129\ \mathfrak{G} = 2(2^{14}-1)\,\mathfrak{G} \\
H &= 2.255.257\ \mathfrak{H} = 2(2^{16}-1)\,\mathfrak{H} \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

Cum

Cum igitur numeri Bernoulliani ſint fracti, coefficientes vero noſtri integri, patet hos factores ſemper tollere fractiones; eruntque ergo:

A = 1
B = 1
C = 3
D = 17
E = 5.31 = 155
F = 3.691 = 2073
G = 7.43.127 = 38227
H = 257.3617 = 929569
I = 9.73.43867 = 28820619
K = 5.31.41.174611 = 1109652905
L = 89.683.854513 = 51943281731
M = 3.4097.236364091 = 2905151042481
N = 2731.8191.8553103 = 191329672483963
&c.

Ex his ergo numeris integris viciſſim numeri Bernoulliani inueniri poterunt.

183. Adhibendo igitur numeros Bernoullianos ſeriei propoſitae:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & x \\ a- & b+ & c- & d+ & e- & \ldots & \mp z, \end{matrix}$$

ſumma erit:

$$\mp\left(\frac{1}{2}z+\frac{(2^2-1)\mathfrak{A}dz}{1.2dx}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3}+\frac{(2^6-1)\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots 6dx^5}-\frac{(2^8-1)\mathfrak{D}d^7z}{1.2\ldots 8dx^7}+\&c.\right)$$
$$+\ \text{Conſt.}$$

Hinc autem perſpicitur iſtos numeros non caſu in hanc expreſſionem ingredi; quemadmodum enim ſeries propoſita oritur, ſi ab iſta:

$$a + b + c + d + \ldots\ldots + z,$$

vbi omnes termini ſignum habent + ſubtrahatur ſumma alternorum $b + d + f +$ &c. bis ſumta; ita quoque expreſſio inuenta in duas reſolui poteſt partes, quarum altera eſt ſumma omnium terminorum ſigno + affectorum, quae erit:

$$\int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}\,dz}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \&c.$$

Summa vero alternorum pari modo inuenietur, quo ſupra vſi ſumus. Cum enim vltimus terminus ſit z indici x reſpondens, antecedens indici $x-2$ reſpondens erit:

$$z - \frac{2\,dz}{dx} + \frac{2^2\,ddz}{1.2\,dx^2} - \frac{2^3\,d^3z}{1.2.3\,dx^3} + \frac{2^4\,d^4z}{1.2.3.4\,dx^4} - \&c.$$

quae forma ex illa, qua ante terminus antecedens exprimebatur; oritur, ſi loco x ſcribatur $\frac{x}{2}$. Habebitur ergo ſumma alternorum, ſi in ſumma omnium vbique loco x ſcribatur $\frac{x}{2}$, quae propterea erit:

$$\frac{1}{2}\int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{2\mathfrak{A}\,dz}{1.2\,dx} - \frac{2^3\mathfrak{B}\,d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{2^5\mathfrak{C}\,d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \&c.$$

cuius duplum ſi a ſumma praecedente ſubtrahatur, exiſtente x numero pari, vel ſi praecedens ſumma a duplo huius ſi x eſt numerus impar ſubtrahatur, reſiduum oſtendet ſummam ſeriei:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & x \\ a & -b & +c & -d & +e & \ldots\ldots & & \mp z \end{array}$$

quae ergo erit:

$$\mp\left(\frac{1}{2}z+\frac{(2^2-1)\mathfrak{A}dz}{1.2dx}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3}+\&c.\right)+C.$$

quae eſt eadem expreſſio, quam modo inueneramus.

184. Sumatur pro z poteſtas ipſius x, nempe x^n, vt reperiatur ſumma ſeriei:

$$1-2^n+3^n-4^n+\ldots\ldots\mp x^n.$$

Ob $\frac{dz}{1dx}=\frac{n}{1}x^{n-1}$; $\frac{d^3z}{1.2.3dx^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3}$; &c.

erit adhibendis coefficientibus A, B, C, D, &c. ſumma quaeſita:

$$\mp\frac{1}{2}\left(x^n+\frac{A}{2}nx^{n-1}-\frac{B}{4}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3}+\frac{C}{6}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}x^{n-5}\right.$$

$$\left.-\frac{D}{8}\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-6)}{1.\ 2\ldots\ldots 7}x^{n-7}+\&c.\right)+\text{Conſt.}$$

vbi ſignum ſuperius valet ſi ſit x numerus par, inferius vero ſi impar. Conſtans autem ita definiri debet, vt ſumma euaneſcat, ſi $x=0$, quo caſu ſignum ſuperius valet. Pro n ergo ſucceſſiue numeros 0, 1, 2, 3, &c. ſubſtituendo ſequentes prodibunt ſummationes:

I. $1-1+1-1+\ldots\ldots\mp 1=\mp\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}$

ſcilicet ſi numerus terminorum fuerit par, ſumma erit $=0$, ſin impar erit $=+1$.

II. $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \mp x = \mp \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$
ſcilicet ſi numerus terminorum ſit par, ſumma erit $= -\frac{1}{2}x$
& pro numero terminorum impari $= +\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

III. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots \mp x^2 = \mp \frac{1}{2}(x^2 + x)$
ſcilicet pro pari numero $= -\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x$
& pro impari numero $= +\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$

IV. $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots \mp x^3 = \mp \frac{1}{2}(x^3 + \frac{3}{2}xx - \frac{1}{4}) - \frac{1}{8}$
ſcilicet pro pari $= -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2$
& pro impari $= \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$.

V. $1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots \mp x^4 = \mp \frac{1}{2}(x^4 + 2x^3 - x)$
ſcilicet pro numero pari $= -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x$
& pro numero impari $= \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x$
&c.

185. Apparet ergo in poteſtatibus paribus praeter $n = 0$, conſtantem adiiciendam euaneſcere, hisque caſibus ſummam terminorum numero ſiue parium ſiue imparium tantum ratione ſigni diſcrepare. Quodſi ergo x fuerit numerus infinitus, quoniam is eſt neque par neque impar, haec conſideratio ceſſare debet, ac propterea in ſumma termini ambigui ſunt reiiciendi: vnde ſequitur huiusmodi ſerierum in infinitum continuatarum ſummam exprimi per ſolam quantitatem conſtantem adiiciendam.

Hanc-

Hancobrem erit:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \&c. \text{ in infinitum} = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \&c. \;\ldots\; = \frac{A}{4} = + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}}{2}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \&c. \;\ldots\; = 0$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \&c. \;\ldots\; = - \frac{B}{8} = - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}}{4}$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \&c. \;\ldots\; = 0$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \&c. \;\ldots\; = \frac{C}{12} = + \frac{(2^6-1)\mathfrak{C}}{6}$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \&c. \;\ldots\; = 0$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \&c. \;\ldots\; = - \frac{D}{16} = - \frac{(2^8-1)\mathfrak{D}}{8}$$

&c.

Quae eaedem ſummae per methodum ſupra traditam ſeries, in quibus ſigna + & — alternantur, ſummandi inueniuntur.

186. Si pro n ſtatuantur numeri negatiui, expresſio ſummae in infinitum excurret. Sit $n = -1$, erit ſumma ſeriei:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \;\ldots\; \mp \frac{1}{x} =$$

$$= \mp \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{A}{2x^2} + \frac{B}{4x^4} - \frac{C}{6x^6} + \frac{D}{8x^8} - \&c.\right) + \text{Conſt.}$$

Hic autem quia conſtans non ex caſu $x = 0$ definiri poteſt, ex alio caſu erit definienda. Ponatur $x = 1$,

 at-

atque ob ſummam $= 1$ & ſignum inferius erit:

$$\text{Conſt.} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{6} + \&c.\right) \quad \text{ſeu}$$

$$\text{Conſt.} = \frac{1}{2} + \frac{A}{4} - \frac{B}{8} + \frac{C}{12} - \frac{D}{16} + \&c.$$

Vel ponatur $x = 2$, ob ſummam $= \frac{1}{2}$, & ſignum ſuperius reperietur:

$$\text{Conſt.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2.2^2} + \frac{B}{4.2^4} - \frac{C}{6.2^6} + \&c.\right)$$

$$\text{ſeu}\quad \text{Conſt.} = \frac{3}{4} - \frac{A}{4.2^2} + \frac{B}{8.2^4} - \frac{C}{12.2^6} + \frac{D}{16.2^8} - \&c.$$

ſin autem ponatur $x = 4$, erit:

$$\text{Conſt.} = \frac{17}{24} - \frac{A}{4.4^2} + \frac{B}{8.4^4} - \frac{C}{12.4^6} + \frac{D}{16.4^8} - \&c.$$

Vtcunque autem conſtans definiatur, idem prodibit valor, qui ſimul ſummam ſeriei in infinitum continuatae, quae eſt $= l2$, indicabit.

187. Ceterum ex his nouis numeris A, B, C, D, E, &c. ſummae ſerierum poteſtatum reciprocarum parium, in quibus tantum numeri impares occurrunt, commode ſummari poterunt. Si enim ponatur:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \&c. = s \quad \text{erit}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} \qquad + \frac{1}{4^{2n}} \qquad + \frac{1}{6^{2n}} + \&c. = \frac{s}{2^{2n}},$$

quae ab illa ſubtracta relinquet:

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \&c. = \frac{(2^{2n}-1)s}{2^{2n}}.$$

Cum

Cum igitur valores ipſius s pro ſingulis numeris n iam ſupra exhibuerimus: (125), erit:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. = \frac{A}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{7^4} + \&c. = \frac{B}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \&c. = \frac{C}{1.2.3 \ldots 6} \cdot \frac{\pi^6}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \&c. = \frac{D}{1.2.3 \ldots 8} \cdot \frac{\pi^8}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \&c. = \frac{E}{1.2.3 \ldots 10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4}$$

&c.

Sin autem omnes numeri ingrediantur, ſignaque alternentur quia erit:

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \&c. = \frac{(2^{2n}-1)\,s - s}{2^{2n}}$$

habebitur:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c. = \frac{(A-2\mathfrak{A})}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \pi^2$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c. = \frac{(B-2\mathfrak{B})}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4} = \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \&c. = \frac{(C-2\mathfrak{C})}{1.2 \ldots 6} \cdot \frac{\pi^6}{4} = \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1.2 \ldots 6} \cdot \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \&c. = \frac{(D-2\mathfrak{D})}{1.2 \ldots 8} \cdot \frac{\pi^8}{4} = \frac{(2^7-1)\mathfrak{D}}{1.2 \ldots 8} \cdot \pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \&c. = \frac{(E-2\mathfrak{E})}{1.2 \ldots 10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4} = \frac{(2^9-1)\mathfrak{E}}{1.2 \ldots 10} \cdot \pi^{10}$$

&c.

188.

188. Quemadmodum hactenus seriem sumus contemplati, cuius termini erant producta ex terminis progressionis geometricae p, p^2, p^3, &c. & ex terminis seriei cuiuscunque a, b, c, &c. ita poterimus simili ratione prosequi seriem, cuius termini sint producta ex terminis duarum quarumcunque serierum, quarum altera tanquam cognita assumatur. Sit series cognita:

$$\overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}+\ldots+\overset{x}{Z}$$ altera vero incognita

$$a+b+c+\ldots+z$$

atque quaeratur summa huius seriei:

$$Aa+Bb+Cc+\ldots+Zz$$

quae ponatur $=Zs$. Sit in serie cognita terminus penultimus $=Y$, atque posito $x-1$ loco x expressio summae $S.Zs$ abibit in

$$Y\left(s-\frac{ds}{dx}+\frac{dds}{2dx^2}-\frac{d^3s}{6dx^3}+\frac{d^4s}{24dx^4}-\&c.\right)$$

Quae cum exprimat summam seriei Zs termino vltimo Zz multatae, erit:

$$Zs-Zz=Ys-\frac{Yds}{dx}+\frac{Ydds}{2dx^2}-\frac{Y^3d^3s}{6dx^3}+\&c.$$

quae aequatio continet relationem, qua summa Zs pendet ab Y, Z & z.

189. Ad hanc aequationem resoluendam negligantur primum termini differentiales, eritque $s=\frac{Zz}{Z-Y}$, ponatur iste valor $\frac{Zz}{Z-Y}=P^1$, sit que reuera $s=P^1+p$, quo

quo valore in aequatione ſubſtituto fiet:

$$(Z-Y)p = -\frac{YdP^{I}}{dx} + \frac{YddP^{I}}{2dx^{2}} - \&c.$$
$$-\frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^{2}} - \&c.$$

addatur vtrinque YP^{I}, & cum $P^{I} - \frac{dP^{I}}{dx} + \frac{ddP^{I}}{2dP^{I}} - \&c.$ ſit valor ipſius P^{I}, qui prodit ſi loco x ponatur $x-1$, ſit iſte valor $= P$, eritque

$$(Z-Y)p + YP^{I} = YP - \frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^{2}} - \&c.$$

vnde neglectis differentialibus erit: $p = \frac{Y(P-P^{I})}{Z-Y}$.

Ponatur $\frac{Y(P-P^{I})}{Z-Y} = Q^{I}$, ſitque $p = Q^{I} + q$; fiet

$$(Z-Y)q = -\frac{Y(dQ^{I}+dq)}{dx} + \frac{Y(ddQ^{I}+ddq)}{2dx^{2}} - \&c.$$

poſitoque Q pro valore ipſius Q^{I}, quem induit ſi loco x ſcribatur $x-1$, erit:

$$(Z-Y)q + YQ^{I} = YQ - \frac{Ydq}{dx} + \frac{Yddq}{2dx^{2}} - \&c.$$

vnde neglectis differentialibus fit $q = \frac{Y(Q-Q^{I})}{Z-Y}$.

Ponatur $\frac{Y(Q-Q^{I})}{Z-Y} = R^{I}$, ſitque reuera $q = R^{I} + r$; ac ſimili modo reperitur $r = \frac{Y(R-R^{I})}{Z-Y}$; ſicque procedendo erit ſumma quaeſita:

$$Zs = Z(P^{I} + Q^{I} + R^{I} + \&c.).$$

190. Propoſita ergo ſerie quacunque:

$$Aa + Bb + Cc + \ldots\ldots + Yy + Zz$$

eius ſumma ſequenti modo definietur:

Ponatur — poſito $x - 1$ loco x

$\frac{Zz}{Z-Y} = P^1$; abeatque P^1 in P

$\frac{Y(P-P^1)}{Z-Y} = Q^1$; abeatque Q^1 in Q

$\frac{Y(Q-Q^1)}{Z-Y} = R^1$; abeatque R^1 in R

$\frac{Y(R-R^1)}{Z-Y} = S^1$; abeatque S^1 in S

&c.

His valoribus inuentis erit ſumma ſeriei =

$$ZP^1 + ZQ^1 + ZR^1 + ZS^1 + \&c.$$

+ Conſtante, quae reddat ſummam $= 0$, ſi ponatur $x = 0$, ſeu quod eodem redit, quae efficiat, vt cuipiam caſui ſatisfiat.

191. Formula haec, quia nullis differentialibus eſt implicata, in plurimis caſibus facillime adhibetur, atque etiam veram ſummam ſaepenumero exhibet. Sic ſi proponatur haec ſeries:

$$p + 4p^2 + 9p^3 + 16p^4 + \ldots + x^2p^x$$

fiat $Z = p^x$ & $z = x^2$, erit $Y = p^{x-1}$, atque $\frac{Z}{Z-Y} = \frac{p}{p-1}$, & $\frac{Y}{Z-Y} = \frac{1}{p-1}$. Hinc fiet

$P^1 =$

$$P^{I} = \frac{px^2}{p-1}; \quad P = \frac{pxx - 2px + p}{p-1}$$

$$Q^{I} = -\frac{2px+p}{(p-1)^2}; \quad Q = -\frac{2px+3p}{(p-1)^2}$$

$$R^{I} = \frac{2p}{(p-1)^3}; \quad R = \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$S^{I} = 0$, & reliqui euanescunt omnes: vnde erit summa =

$$p^x\left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px+p}{(p-1)^2} + \frac{2p}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^2} - \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$$= p^{x+1}\left(\frac{x^2}{p-1} - \frac{2x}{(p-1)^2} + \frac{p+1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p-1}{(p-1)^3},$$

quemadmodum iam supra inuenimus.

192. Simili modo, quo ad hanc summae expressionem peruenimus, aliam inuenire poterimus expressionem, si series proposita non ex duabus aliis sit composita: quae illis potissimum casibus in vsum vocari poterit, cum in praecedente expressione ad denominatores euanescentes peruenitur. Sit igitur proposita haec series:

$$\begin{matrix} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & & & & & x \\ s = & a & + & b & + & c & + & d & + & \ldots & & & + & z \end{matrix}$$

quoniam posito $x-1$ loco x, summa vltimo termino truncatur, erit:

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \&c.$$

seu $$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \&c.$$

Quia hic ipsa summa s non occurrit, negligantur differentialia altiora, fietque $s = \int z\,dx$, ponatur $\int z\,dx = P^{I}$, cuius valor abeat in P si pro x scribatur $x - 1$: sitque reuera $s = P^{I} + p$; erit:

$$z = \frac{dP^{I}}{dx} - \frac{ddP^{I}}{2\,dx^2} + \&c. + \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2\,dx^2} + \&c.$$

$$\text{quia est}\quad P = P^{I} - \frac{dP^{I}}{dx} + \frac{ddP^{I}}{2\,dx^2} - \&c.$$

$$\text{erit}\quad z - P^{I} + P = \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2\,dx^2} + \&c.\quad \text{vnde fit}$$

$p = \int (z - P^{I} + P)\,dx$. Si porro ponatur $\int (z - P^{I} + P)\,dx = Q^{I}$, hicque valor abeat in Q posito $x - 1$ loco x, sit $\int (z - P^{I} + P - Q^{I} + Q)\,dx = R^{I} = Q^{I} - \int (Q^{I} - Q)\,dx$ porro $R^{I} - \int (R^{I} - R)\,dx = S^{I}$; &c. erit summa quaesita:

$$s = P^{I} + Q^{I} + R^{I} + S^{I} + \&c. + \text{Const.}$$

qua vni casui satisfiat.

193. Mutatis aliquantum litteris ista summatio huc redit. Proposita serie summanda:

$$\overset{1}{s = a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \;.\;.\;.\;.\; + \overset{x}{z}$$

ponatur	*posito* $x - 1$	*loco* x
$\int z\,dx = P$	abeatque P	in p
$P - \int (P - p)\,dx = Q$	abeatque Q	in q
$Q - \int (Q - q)\,dx = R$	abeatque R	in r, &c.

quibus valoribus inuentis erit summa quaesita:

$$s = P + Q + R + S + \&c.$$

hac-

haecque expreſſio expedite oſtendit ſummam, ſi formulae iſtae integrales exhiberi queant. Sit, vt vſum eius exemplo illuſtremus, $z = xx + x$ eritque

$$P = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx \; ; \quad p = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}$$

$$P - p = xx - \tfrac{1}{6} \quad \& \quad \int(P - p)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x$$

$$Q = \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x \; ; \quad q = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{5}{6}x + \tfrac{1}{3}$$

$$Q - q = x - \tfrac{1}{3} \quad \& \quad \int(Q - q)\,dx = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{3}x$$

$$R = \tfrac{1}{2}x \quad ; \quad r = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

$$R - r = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \int(R - r)\,dx = \tfrac{1}{2}x$$

$S = 0$, reliquique valores euaneſcunt. Quare ſumma quaeſita erit:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx\\ &+ \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x = \tfrac{1}{3}x^3 + xx + \tfrac{2}{3}x = \tfrac{1}{3}x(x+1)(x+2)\\ &+ \tfrac{1}{2}x.\end{aligned}$$

Hocque ergo modo omnium ſerierum, quarum termini generales ſunt functiones rationales integrae ipſius x, ſummae ope integrationum continuarum inueniri poſſunt. Ex quibus facile perſpicitur, quam amplum occupet campum doctrina de ſummatione ſerierum, neque omnibus methodis, quae tum habentur tum adhuc excogitari poſſunt, capiendis plura volumina ſufficere.

194. Hactenus ſummas ſerierum inueſtigauimus a termino primo vsque ad eum cuius index eſt x, quibus cognitis ponendo $x = \infty$ ipſius ſeriei in infinitum continuatae ſumma innoteſcet. Saepenumero autem hoc expeditius praeſtatur, ſi non ſumma terminorum a primo

vsque ad eum cuius index eſt x, ſed ſumma omnium terminorum ab iſto, cuius index eſt x, in infinitum vsque quaeratur, hocque caſu imprimis expreſſiones vltimae fiunt tractabiliores. Sit igitur propoſita ſeries cuius terminus generalis ſeu indici x reſpondens ſit $= z$, ſequens indici $x + 1$ reſpondens ſit $= z^{I}$, huncque vltra ſequentes ſint z^{II}, z^{III}, &c. quaeraturque ſumma huius ſeriei infinitae:

$$x, \quad x+1, \quad x+2, \quad x+3, \quad \&c.$$

$$s = z + z^{I} + z^{II} + z^{III} + \&c. \text{ in infinitum.}$$

Haec igitur ſumma s erit functio ipſius x, in qua ſi ponatur $x + 1$ loco x, orietur ſumma prior termino z truncata. Cum ergo hac mutatione s abeat in $s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2\,dx^2} + \&c.$ erit:

$$s - z = s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2\,dx^2} + \frac{d^3s}{6\,dx^3} + \frac{d^4s}{24\,dx^4} + \frac{d^5s}{120\,dx^5} + \&c.$$

$$\text{ſeu } 0 = z + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2\,dx^2} + \frac{d^3s}{6\,dx^3} + \frac{d^4s}{24\,dx^4} + \frac{d^5s}{120\,dx^5} + \&c.$$

195. Si nunc vt ante ratiocinium inſtituamus, fiet neglectis differentialibus ſuperioribus, $s = C - \int z\,dx$. Ponatur ergo $\int z\,dx = P$, ſitque reuera $s = C - P + p$, erit

$$0 = z - \frac{dP}{dx} - \frac{ddP}{2\,dx^2} - \frac{d^3P}{6\,dx^3} - \&c.$$

$$+ \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2\,dx^2} + \frac{d^3p}{6\,dx^3} + \&c.$$

Abe-

Abeat P in P^{I}, si loco x ponatur $x+1$, eritque:

$$0 = z + P - P^{I} + \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2\,dx^2} + \frac{d^3 p}{6\,dx^3} + \&c.$$

Hinc neglectis differentialibus altioribus fiet: $p = \int(P^{I} - P)\,dx - P$. Statuatur $\int(P^{I} - P)\,dx - P = -Q$, sitque $p = -Q + q$, erit:

$$0 = z + P - P^{I} - \frac{dQ}{dx} - \frac{ddQ}{2\,dx^2} - \&c. + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2\,dx^2} + \&c.$$

Abeat Q in Q^{I} si loco x ponatur $x+1$ eritque

$$0 = z + P - P^{I} + Q - Q^{I} + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2\,dx^2} + \&c.$$

vnde sequitur $q = \int(Q^{I} - Q)\,dx - Q$. Quamobrem si comma cuique quantitati infixum denotet eius valorem, quem induit posito $x+1$ loco x, ponaturque

$$\int z\,dx = P$$
$$P - \int(P^{I} - P)\,dx = Q$$
$$Q - \int(Q^{I} - Q)\,dx = R$$
$$R - \int(R^{I} - R)\,dx = S \quad \&c.$$

erit seriei propositae $z + z^{I} + z^{II} + z^{III} + z^{IV} + \&c.$ summa $= C - P - Q - R - S - \&c.$ vbi constans C ita debet definiri, vt posito $x = \infty$ tota summa euanescat. Quia autem applicatio huius expressionis integrationes requirit, hoc loco eius vsum declarare non licet.

196. Vt autem formulas integrales euitemus, statuamus summam seriei $= ys$, existente y functione ipsius

ſius x quacunque cognita, cuius valores y^{I}, y^{II}, &c. qui prodeunt ponendo $x+1$, $x+2$, &c. loco x, erunt noti. Si iam ponatur $x+1$ loco x prodibit ſuperior ſeries termino primo mulctata, cuius ſumma propterea

erit $y'\left(s+\frac{ds}{dx}+\frac{dds}{2dx^2}+\frac{d^3s}{6dx^3}+\&c.\right)=ys-z$

ſeu $z+\frac{y'ds}{dx}+\frac{y'dds}{2dx^2}+\frac{y'd^3s}{6dx^3}+\&c.=(y-y')s$

vnde neglectis differentialibus oritur $s=\frac{z}{y-y'}$. Statuatur $\frac{z}{y'-y}=P$, ſitque reuera $s=-P+p$, erit:

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{y'dP}{dx}-\frac{y'ddP}{2dx^2}-\frac{y'd^3P}{6dx^3}-\&c.\\+\frac{y'dp}{dx}+\frac{y'ddp}{2dx^2}+\frac{y'd^3p}{6dx^3}+\&c.\end{array}\right\}=(y-y')p$$

ideoque $\frac{y'dp}{dx}+\frac{y'ddp}{2dx^2}+\frac{y'd^3p}{6dx^3}+\&c.=y'(P'-P)-(y'-y)p.$

Statuatur $Q=\frac{y'(P'-P)}{y'-y}$, ſitque $p=Q+q$; erit:

$$y'(Q'-Q)+y'\left(\frac{dq}{dx}+\frac{ddq}{2dx^2}+\&c.\right)=-(y'-y)q.$$

Statuatur $R=\frac{y'(Q'-Q)}{y'-y}$, ſitque $q=-R+r$.

Hocque modo ſi vlterius progrediamur. Seriei propoſitae: $z+z^{I}+z^{II}+z^{III}+z^{IV}+\&c.$ ſumma ſequenti modo inuenietur.

Sum-

Sumta pro lubitu functione ipsius x, quae sit $= y$, statuatur:

$$P = \frac{z}{y' - y} = \frac{z}{\Delta y}$$

$$Q = \frac{y'(P' - P)}{y' - y} = \frac{y \Delta P}{\Delta y} + \Delta P$$

$$R = \frac{y'(Q' - Q)}{y' - y} = \frac{y \Delta Q}{\Delta y} + \Delta Q$$

$$S = \frac{y'(R' - R)}{y' - y} = \frac{y \Delta R}{\Delta y} + \Delta R$$

&c.

Hincque erit summa quaesita:

$$= C - Py + Qy - Ry + Sy - \&c.$$

Sumta pro C eiusmodi constante, vt posito $x = \infty$ summa euanescat.

192. Sumatur $y = a^x$, ob $y' = a^{x+1}$, erit: $y' - y = a^x (a - 1)$, vnde fiet:

$$P = \frac{z}{a^x(a-1)} \; ; \quad P' = \frac{z'}{a^{x+1}(a-1)}$$

$$Q = \frac{a(P' - P)}{a - 1} = \frac{(z' - az)}{a^x(a-1)^2} \; ; \quad Q' = \frac{(z'' - az')}{a^{x+1}(a-1)^2}$$

$$R = \frac{a(Q' - Q)}{a - 1} = \frac{z'' - 2az' + aaz}{a^x(a-1)^3}$$

$$S = \frac{a(R' - R)}{a - 1} = \frac{z''' - 3az'' + 3a^2z' - a^3z}{a^x(a-1)^4}$$

&c.

Quocirca summa seriei propositae erit:

$$C - \frac{z}{a-1} + \frac{z' - az}{(a-1)^2} - \frac{z'' + 2az' - a^2 z}{(a-1)^3}$$

$$+ \frac{z''' - 3az'' + 3a^2 z' - a^3 z}{(a-1)^4}$$

&c.

Haec vero eadem summae expressio iam supra est inventa Capite primo. Hinc autem aliis pro y valoribus accipiendis infinitae aliae expressiones erui poterunt; vnde ea, quae cuique casui maxime sit accommodata, eligi potest.

CAPUT

CAPUT VIII.

DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS IN FORMANDIS SERIEBUS.

198.

Vnum adhuc calculi differentialis vſum in doctrina ſerierum commemorabimus, qui in ipſa formatione ſerierum conſiſtit, & ad quem iam ſupra prouocauimus, cum quaeſtio eſſet de fractione, cuius denominator ſit poteſtas quaecunque functionis cuiuspiam, in ſeriem euoluenda. Iſta methodus autem ſimilis eſt ei, qua iam aliquoties ſumus vſi, dum functio in ſeriem conuertenda aequalis fingitur cuipiam ſeriei, in ſingulis terminis coefficientes indeterminatos habenti, qui deinceps aequalitate conſtituta determinentur. Haec autem determinatio ſaepenumero mirifice adiuuatur, ſi antequam ea ſuſcipiatur ad differentialia cum prima, tum nonnunquam quoque ad ſecunda aequatio perducatur. Quae methodus cum in calculo integrali ampliſſimi ſit vſus, eam hic diligentius exponemus.

199. Primum igitur breuiter repetamus, quae ſupra de euolutione fractionum in ſeries ſine calculi differentialis ſubſidio attulimus. Sit fractio quaecunque propoſita:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.} = s$$

quam in seriem secundum potestates ipsius x procedentem conuerti oporteat. Fingatur pro s series indeterminata:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \&c.$$

Cum igitur fractione per multiplicationem sublata sit:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \&c.$$
$$= s(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \&c.)$$

si pro s series ficta substituatur prodibit sequens aequatio:

$$\begin{array}{llllllll}
A & + Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & + Ex^4 & + Fx^5 & + \&c. = \\
\hline
\mathfrak{A}\alpha & + \mathfrak{B}\alpha x & + \mathfrak{C}\alpha x^2 & + \mathfrak{D}\alpha x^3 & + \mathfrak{E}\alpha x^4 & + \mathfrak{F}\alpha x^5 & + \&c. \\
 & + \mathfrak{A}\beta & + \mathfrak{B}\beta & + \mathfrak{C}\beta & + \mathfrak{D}\beta & + \mathfrak{E}\beta & + \&c. \\
 & & + \mathfrak{A}\gamma & + \mathfrak{B}\gamma & + \mathfrak{C}\gamma & + \mathfrak{D}\gamma & + \&c. \\
 & & & + \mathfrak{A}\delta & + \mathfrak{B}\delta & + \mathfrak{C}\delta & + \&c. \\
 & & & & + \mathfrak{A}\varepsilon & + \mathfrak{B}\varepsilon & + \&c. \\
 & & & & & + \mathfrak{A}\zeta & + \&c.
\end{array}$$

Aequalitate ergo inter singulos terminos, qui easdem ipsius x potestates continent, constituta fiet:

$$\mathfrak{A}\alpha - A = 0$$
$$\mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{A}\beta - B = 0$$
$$\mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{A}\gamma - C = 0$$
$$\mathfrak{D}\alpha + \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{A}\delta - D = 0$$
$$\mathfrak{E}\alpha + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{B}\delta + \mathfrak{A}\varepsilon - E = 0 \quad \&c.$$

ex

ex quibus aequationibus coefficientes ficti $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. determinantur, ficque feries infinita inuenitur:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

fractioni propofitae s aequalis. Atque in hac forma fi tam numerator quam denominator fractionis s finito terminorum numero conftent, omnes feries recurrentes comprehenduntur, de quibus iam fupra fufius eft tractatum.

200. Quodfi autem vel numerator vel denominator vel vterque ad dignitatem quamcunque fuerit eleuatus, tum hoc modo feries difficulter obtinetur; propterea quod negotium, nifi functio eleuata fit binomium, perquam fit laboriofum. Calculo autem differentiali ifte labor euitari poteft. Adfit primum folus numerator, fitque:

$$s = (A + Bx + Cxx)^n,$$

vnde quaeratur feries fecundum poteftates ipfius x procedens huic trinomii dignitati aequalis; quam quidem finitam fore conftat, fi exponens n fuerit numerus integer affirmatiuus. Fingatur iterum pro s feries indefinita:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \&c.$$

cuius terminum primum $\mathfrak{A}$ conftat effe $= A^n$: fi enim ponatur $x = 0$, ex priori forma propofita fit $s = A^n$, ex ferie autem ficta $s = \mathfrak{A}$. Haec autem primi termini determinatio ex ipfa rei natura eft petenda, fi ad differentialia defcendere velimus, quia hinc primus terminus non determinatur, vti mox patebit.

201. Cum sit $s = (A + Bx + Cx^2)^n$, erit logarithmis sumendis $ls = nl(A + Bx + Cx^2)$, hincque sumtis differentialibus habebitur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{nBdx + 2nCxdx}{A + Bx + Cx^2}, \text{ seu}$$

$$(A + Bx + Cx^2)\frac{ds}{dx} = ns(B + 2Cx).$$

Ex serie autem ficta est:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \&c.$$

si igitur haec series loco $\frac{ds}{dx}$, & pro s ipsa series ficta substituatur, prodibit sequens aequatio:

$$\begin{array}{llllll}
A\mathfrak{B} & + 2A\mathfrak{C}x & + 3A\mathfrak{D}x^2 & + 4A\mathfrak{E}x^3 & + 5A\mathfrak{F}x^4 & + \&c. \\
 & + B\mathfrak{B} & + 2B\mathfrak{C} & + 3B\mathfrak{D} & + 4B\mathfrak{E} & + \&c. \\
 & & + C\mathfrak{B} & + 2C\mathfrak{C} & + 3C\mathfrak{D} & + \&c. \\
\hline
nB\mathfrak{A} & + nB\mathfrak{B} & + nB\mathfrak{C} & + nB\mathfrak{D} & + nB\mathfrak{E} & + \&c. \\
 & + 2nC\mathfrak{A} & + 2nC\mathfrak{B} & + 2nC\mathfrak{C} & + 2nC\mathfrak{D} & + \&c.
\end{array} =$$

Aequalitate ergo hic inter terminos eiusdem ipsius x potestatis constituta erit:

$$\mathfrak{B} = \frac{nB\mathfrak{A}}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(n-1)B\mathfrak{B} + 2nCA}{2A}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{(n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B}}{3A}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{(n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C}}{4A}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{(n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D}}{5A}$$

&c.

Cum igitur vt ante vidimus sit $\mathfrak{A} = A^n$, erit $\mathfrak{B} = nA^{n-1}B$, hincque reliqui coefficientes omnes ſucceſſiue determinabuntur. Lex autem, quam ipſi ſequuntur facillime ex his formulis patet, quae vehementer obſcura manſiſſet, ſi trinomium actu eleuare voluiſſemus.

202. Haec eadem methodus ſuccedit, ſi polynomium quodcunque ad quampiam dignitatem eleuari debeat. Sit

$$s = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)^n$$

fingaturque:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

erit $\mathfrak{A} = A^n$, qui valor colligitur, ſi ponatur $x = 0$. Sumtis iam vt ante logarithmis, eorumque differentialibus reperietur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{nBdx + 2nCxdx + 3nDx^2dx + 4nEx^3dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.}$$

ſeu $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)\frac{ds}{dx} =$

$$s(nB + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \&c.)$$

Cum

Cum igitur sit:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \&c.$$

Erit his seriebus pro s & $\frac{ds}{dx}$ substitutis:

$$\begin{array}{llllll}
A\mathfrak{B} & + 2A\mathfrak{C}x & + 3A\mathfrak{D}x^2 & + 4A\mathfrak{E}x^3 & + 5A\mathfrak{F}x^4 & + \&c. \\
 & + B\mathfrak{B} & + 2B\mathfrak{C} & + 3B\mathfrak{D} & + 4B\mathfrak{E} & + \&c. \\
 & & + C\mathfrak{B} & + 2C\mathfrak{C} & + 3C\mathfrak{D} & + \&c. \\
 & & & + D\mathfrak{B} & + 2D\mathfrak{C} & + \&c. \\
 & & & & + E\mathfrak{B} & + \&c. = \\
\hline
nB\mathfrak{A} & + nB\mathfrak{B} & + nB\mathfrak{C} & + nB\mathfrak{D} & + nB\mathfrak{E} & + \&c. \\
 & + 2nC\mathfrak{A} & + 2nC\mathfrak{B} & + 2nC\mathfrak{C} & + 2nC\mathfrak{D} & + \&c. \\
 & & + 3nD\mathfrak{A} & + 3nD\mathfrak{B} & + 3nD\mathfrak{C} & + \&c. \\
 & & & + 4nE\mathfrak{A} & + 4nE\mathfrak{B} & + \&c. \\
 & & & & + 5nF\mathfrak{A} & + \&c.
\end{array}$$

Vnde deriuantur sequentes determinationes:

$$A\mathfrak{B} = n\,B\mathfrak{A}$$
$$2A\mathfrak{C} = (n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A}$$
$$3A\mathfrak{D} = (n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A}$$
$$4A\mathfrak{E} = (n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C} + (3n-1)D\mathfrak{B} + 4nE\mathfrak{A}$$
$$5A\mathfrak{F} = (n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D} + (3n-2)C\mathfrak{C} + (4n-1)E\mathfrak{B} + 5nF\mathfrak{A}$$
&c.

vnde quemadmodum coefficientes ficti $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. a se inuicem pendeant, hincque determinentur, cum sit $\mathfrak{A} = A^n$, luculentissime apparet.

203. Quoniam, si quantitas $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$ ex finito terminorum numero constat, numerusque n fuerit integer affirmatiuus, quaecunque potestas finito etiam terminorum numero constare debet: manifestum est hoc casu, formulas modo inuentas tandem euanescere debere, atque cum omnes termini adesse debeant, vt primum vnus euanuerit, simul omnes sequentes euanescere debere. Ponamus formulam propositam $A+Bx+Cx^2$ esse trinomium, eiusque cubum quaeri, vt sit $n=3$, erit

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{A}= A^3 & \text{ideoque} ; & \mathfrak{A}= A^3 \\
A\mathfrak{B}= 3B\mathfrak{A} & ; & \mathfrak{B}= 3A^2B \\
2A\mathfrak{C}= 2B\mathfrak{B}+6C\mathfrak{A} & ; & \mathfrak{C}= 3AB^2+3A^2C \\
3A\mathfrak{D}= 1B\mathfrak{C}+5C\mathfrak{B} & ; & \mathfrak{D}= B^3+6ABC \\
4A\mathfrak{E}= 0\ +4C\mathfrak{C} & ; & \mathfrak{E}= 3B^2C+3AC^2 \\
5A\mathfrak{F}=- B\mathfrak{E}+3C\mathfrak{D} & ; & \mathfrak{F}= 3BC^2 \\
6A\mathfrak{G}=-2B\mathfrak{F}+2C\mathfrak{E} & ; & \mathfrak{G}= C^3 \\
7A\mathfrak{H}=-3B\mathfrak{G}+1C\mathfrak{F} & ; & \mathfrak{H}= 0 \\
8A\mathfrak{I}=-4B\mathfrak{H}+0 & ; & \mathfrak{I}= 0.
\end{array}
$$

Quoniam igitur iam bini sunt $=0$, sequentiumque quilibet a duobus praecedentibus pendet, patet, omnes sequentes pariter euanescere debere. Hancque ob causam lex, qua hi coefficientes a se inuicem pendere sunt inventi, eo magis est notatu digna.

204. Si n fuerit numerus negatiuus, ita vt s aequale fiat fractioni, series in infinitum excurret. Sit igitur

$$s = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.)^n}$$

fingatur pro eius valore haec feries:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \&c.$$

Atque fi in fuperioribus formulis pro litteris A, B, C, D, &c. ponantur α, β, γ, δ, &c. fimulque fiat n negatiuum, fequentes determinationes coefficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. prodibunt:

$$\mathfrak{A} = \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

$$\alpha\mathfrak{B} + n\beta\mathfrak{A} = 0$$

$$2\alpha\mathfrak{C} + (n+1)\beta\mathfrak{B} + 2n\gamma\mathfrak{A} = 0$$

$$3\alpha\mathfrak{D} + (n+2)\beta\mathfrak{C} + (2n+1)\gamma\mathfrak{B} + 3n\delta\mathfrak{A} = 0$$

$$4\alpha\mathfrak{E} + (n+3)\beta\mathfrak{D} + (2n+2)\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)\delta\mathfrak{B} + 4n\varepsilon\mathfrak{A} = 0$$

$$5\alpha\mathfrak{F} + (n+4)\beta\mathfrak{E} + (2n+3)\gamma\mathfrak{D} + (3n+2)\delta\mathfrak{C} + (4n+1)\varepsilon\mathfrak{B} + 5n\zeta\mathfrak{A} = 0$$

&c.

Quae formulae eandem continent legem horum coefficientium numerorum, quam iam fupra obferuauimus in introductione; cuiusque adeo veritatem nunc demum rigide demonftrare licuit.

205. Haec ita fe habent, fi numerator fractionis fuerit vnitas, vel etiam quaepiam ipfius x poteftas, puta x^m; pofteriori enim cafu tantum oportebit feriem priori inuentam $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \&c.$ multiplicare per x^m. At fi numerator conftet ex duobus pluribusue terminis, tum fupra quidem legem progreffionis

nis non obseruauimus, quamobrem eam hic per differentiationem inuestigemus. Sit igitur:

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.)^n}$$

fingaturque pro valore huius fractionis sequens series:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \&c.$$

cuius primus terminus $\mathfrak{A}$ vt definiatur, ponatur $x = 0$, eritque ex priori expressione $s = \frac{A}{\alpha^n}$, ex ficta vero $s = \mathfrak{A}$, vnde necesse est, vt sit $\mathfrak{A} = \frac{A}{\alpha^n}$. Quo termino determinato reliqui per differentiationem innotescent.

206. Sumtis logarithmis erit:

$$ls = l(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)$$
$$- nl(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.)$$

hincque differentiando orietur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{Bdx + 2Cdx + 3Dx^2dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}$$
$$- \frac{n\beta dx - 2n\gamma xdx - 3n\delta x^2dx - \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.}$$

Sublatisque per multiplicationem fractionibus erit:

$$\left(\begin{array}{lllll} A\alpha + A\beta x & + A\gamma x^2 & + A\delta x^3 & + \&c. \\ \quad + B\alpha & + B\beta & + B\gamma & + \&c. \\ & + C\alpha & + C\beta & + \&c. \\ & & + D\alpha & + \&c. \end{array}\right\} \frac{ds}{dx} =$$

$$\left(\begin{array}{llllll} B\alpha + B\beta x & + B\gamma x^2 & + B\delta x^3 & + B\varepsilon x^4 & + \&c. \\ \quad + 2C\alpha & + 2C\beta & + 2C\gamma & + 2C\delta & + \&c. \\ & + 3D\alpha & + 3D\beta & + 3D\gamma & + \&c. \\ & & + 4E\alpha & + 4E\beta & + \&c. \\ & & & + 5F\alpha & + \&c. \end{array}\right\} s$$

$$-\left(\begin{array}{llllll} A\beta + 2A\gamma x & + 3A\delta x^2 & + 4A\varepsilon x^3 & + 5A\zeta x^4 & + \&c. \\ \quad + B\beta & + 2B\gamma & + 3B\delta & + 4B\varepsilon & + \&c. \\ & + C\beta & + 2C\gamma & + 3C\delta & + \&c. \\ & & + D\beta & + 2D\gamma & + \&c. \\ & & & + E\beta & + \&c. \end{array}\right\} ns.$$

Cum nunc sit $\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + \&c.$ erit factis substitutionibus:

$$A\alpha\mathfrak{B} + nA\beta\mathfrak{A} - B\alpha\mathfrak{A} = 0$$

$$2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\beta\mathfrak{B} + 2nA\gamma\mathfrak{A} + (n-1)B\beta\mathfrak{A} - 2C\alpha\mathfrak{A} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\beta\mathfrak{C} + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} + 3nA\delta\mathfrak{A} \\ \quad + B\alpha\mathfrak{C} + nB\beta\mathfrak{B} + (2n-1)B\gamma\mathfrak{A} \\ \quad - C\alpha\mathfrak{B} + (n-2)C\beta\mathfrak{A} \\ \quad - 3D\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\beta\mathfrak{D} + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} + 4nA\varepsilon\mathfrak{A} \\ \quad + 2B\alpha\mathfrak{D} + (n+1)B\beta\mathfrak{C} + 2nB\gamma\mathfrak{B} + (3n-1)B\delta\mathfrak{A} \\ \quad + 0\,C\alpha\mathfrak{C} + (n-1)C\beta\mathfrak{B} + (2n-2)C\gamma\mathfrak{A} \\ \quad - 2D\alpha\mathfrak{B} + (n-3)D\beta\mathfrak{A} \\ \quad - 4E\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

Hinc

Hinc lex, qua iſtae formulae progrediuntur, facile perſpicitur: prima enim cuiusque aequationis linea eandem ſequitur legem, quam §. 284. habuimus. Tum vero coefficientes ſecundarum linearum oriuntur, ſi a coefficientibus ſuperioribus ſubtrahatur $n+1$, ſimilique modo ex linea ſecunda formatur linea tertia & ſequentes, a coefficientibus ſuperioribus continuo ſubtrahendo $n+1$; ipſae autem litterae quemvis terminum componentes per ſolam inſpectionem facillime formantur.

207. Sin autem quoque numerator fractionis fuerit quaepiam poteſtas: ſcilicet

$$s = \frac{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)^m}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.)^n}$$

fingaturque $s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$ erit $\mathfrak{A} = \frac{A^m}{\alpha^n}$; reliqui vero coefficientes ex ſequentibus formulis determinabuntur:

$$\left.\begin{array}{r} A\alpha\mathfrak{B} + nA\beta\mathfrak{A} \\ -\,mB\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\beta\mathfrak{B} + 2nA\gamma\mathfrak{A} \\ -\,(m-1)B\alpha\mathfrak{B} + (n-m)B\beta\mathfrak{A} \\ -\,2mC\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\beta\mathfrak{C} + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} + 3nA\delta\mathfrak{A} \\ -\,(m-2)B\alpha\mathfrak{C} + (n-m+1)B\beta\mathfrak{B} + (2n-m)B\gamma\mathfrak{A} \\ -\,(2m-1)C\alpha\mathfrak{B} + (n-2m)C\beta\mathfrak{A} \\ -\,3mD\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\beta\mathfrak{D} + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} + 4nA\varepsilon\mathfrak{A} \\ -\,(m-3)B\alpha\mathfrak{D} + (n-m+2)B\beta\mathfrak{C} + (2n-m+1)B\gamma\mathfrak{B} + (3n-m)B\delta\mathfrak{A} \\ -\,(2m-2)C\alpha\mathfrak{C} + (n-2m+1)C\beta\mathfrak{B} + (2n-2m)C\gamma\mathfrak{A} \\ -\,(3m-1)D\alpha\mathfrak{B} + (n-3m)D\beta\mathfrak{A} \\ \&c. \qquad\qquad -\,4mE\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

Lex

Lex, qua iſtae formulae vlterius continuantur, ex inſpectione facilius apparet, quam verbis deſcribi queat. Deſcendendo autem coefficientes diminuuntur differentia $n+m$; horizontaliter autem progrediendo augentur continuo differentia $n-1$.

208. Hoc igitur modo doctrina de ſeriebus recurrentibus amplificatur, dum iſtum defectum ſuppleuimus, atque legem coefficientium definiuimus, ſi non ſolum denominator fractionis fuerit poteſtas quaecunque, ſed etiam numerator ex quotlibet terminis conſtet, ad quam legem detegendam ſola inductio non ſufficiebat. Praeter plurimos autem vſus ſerierum recurrentium, quos iam expoſuimus, maximam quoque afferunt vtilitatem ad ſummas quarumuis ſerierum proxime inueniendas: cuius ſpecimen iam in Capite primo huius ſectionis exhibuimus, dum ſeriem ſubſtitutione $x = \frac{y}{1+ny}$ in aliam transmutauimus, quae ſaepenumero terminorum numero finito conſtet. Eaque methodus vlterius extendi potuiſſet, ſi pro x aliae functiones ſubſtitutae fuiſſent. Quoniam vero tum lex progreſſionis ſerierum, quae loco poteſtatum ipſius x poni deberent, non ſatis luculenter conſtabat, in hunc locum iſtam amplificationem reſeruare viſum eſt; cum memorata lex iam penitus eſſet detecta. Interim tamen re diligentius perpenſa comperimus idem negotium ſine hac progreſſionis lege expediri poſſe, in ſubſidium tantum vocando methodum, qua hic ad hanc ipſam legem inueſtigandam ſumus vſi.

209. Sit igitur proposita series quaecunque

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

quam in aliam transformari oporteat, cuius termini singuli sint fractiones, quarum denominatores secundum potestates formulae huiusmodi $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.$ procedant. Quo igitur a simplicioribus incipiamus, ponamus esse:

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha+\beta x)^4} + \&c.$$

aequalitate illius serei cum hac expressione constituta, multiplicetur vbique per $\alpha + \beta x$, fietque:

$$\begin{matrix} A\alpha + B\alpha x + C\alpha x^2 + D\alpha x^3 + \&c. \\ + A\beta + B\beta \;\; + C\beta \;\; + \&c. \end{matrix} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\beta x)^2} + \&c.$$

statuatur $\mathfrak{A} = A\alpha$; fiatque:

$$A\beta + B\alpha = A^{I}$$
$$B\beta + C\alpha = B^{I}$$
$$C\beta + D\alpha = C^{I}$$
$$D\beta + E\alpha = D^{I} \quad \&c.$$

erit diuisione per x instituta:

$$A^{I} + B^{I}x + C^{I}x^2 + D^{I}x^3 + \&c. = \frac{\mathfrak{B}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \&c.$$

Multiplicetur denuo per $\alpha + \beta x$, positoque

$$A^{I}\beta + B^{I}\alpha = A^{II}$$
$$B^{I}\beta + C^{I}\alpha = B^{II}$$
$$C^{I}\beta + D^{I}\alpha = C^{II} \quad \&c. \qquad \text{fiet}$$

$$A^{I}\alpha + A^{II}x + B^{II}x^2 + C^{II}x^3 + \&c. = \mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{C}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^2} + \&c.$$

Sit

Sit igitur $\mathfrak{B} = A^{I}\alpha$; atque operationem vt ante instituendo, si fiat:

$A^{II}\beta + B^{II}\alpha = A^{III}$	$A^{III}\beta + B^{III}\alpha = A^{IV}$
$B^{II}\beta + C^{II}\alpha = B^{III}$	$B^{III}\beta + C^{III}\alpha = B^{IV}$
$C^{II}\beta + D^{II}\alpha = C^{III}$	$C^{III}\beta + D^{III}\alpha = C^{IV}$
&c.	&c.

erit $\mathfrak{C} = A^{II}\alpha$; $\mathfrak{D} = A^{III}\alpha$; $\mathfrak{E} = A^{IV}\alpha$; &c. vnde summa seriei propositae hoc modo exprimetur, vt sit:

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha+\beta x} + \frac{A^{I}\alpha x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{A^{II}\alpha x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{A^{III}\alpha x^3}{(\alpha+\beta x)^4} + \&c.$$

Quae eadem series orta fuisset ex substitutione $\frac{x}{\alpha+\beta x} = y$ seu $x = \frac{\alpha y}{1-\beta y}$.

210. Haec transformatio optimo cum successu adhibetur, si series proposita $A + Bx + Cx^2 + \&c.$ ita fuerit comparata, vt tandem confundatur cum serie recurrente seu potius geometrica ex fractione $\frac{P}{\alpha+\beta x}$ orta. Tum enim valores A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I}, &c. tandem euanescent; hincque multo magis litterae A^{II}, A^{III}, A^{IV}, &c. constituent seriem maxime conuergentem. Poterimus autem simili modo denominatores trinomiales & polynomiales quoscunque adhibere, qui vsum habebunt eximium, si series proposita tandem cum recurrente confundatur. Proposita ergo serie:

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

sta-

ſtatuatur $s = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}^{I}x^2 + \mathfrak{B}^{I}x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} +$

$$\frac{\mathfrak{A}^{II}x^4 + \mathfrak{B}^{II}x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}^{III}x^6 + \mathfrak{B}^{III}x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^4} + \&c.$$

Multiplicetur vbique per $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, poſitoque

$$\begin{aligned} A\gamma + B\beta + C\alpha &= A^{I} \\ B\gamma + C\beta + D\alpha &= B^{I} \\ C\gamma + D\beta + E\alpha &= C^{I} \\ &\&c. \end{aligned} \quad \& \quad \begin{aligned} \mathfrak{A} &= A\alpha \\ \mathfrak{B} &= A\beta + B\alpha \end{aligned}$$

orietur aequatio priori ſimilis, diuiſione per xx inſtituta:

$$A^{I} + B^{I}x + C^{I}x^2 + D^{I}x^3 + E^{I}x^4 + \&c. =$$

$$\frac{\mathfrak{A}^{I} + \mathfrak{B}^{I}x}{\alpha + \beta x + \gamma xx} + \frac{\mathfrak{A}^{II}x^2 + \mathfrak{B}^{II}x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} + \frac{\mathfrak{A}^{III}x^4 + \mathfrak{B}^{III}x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^3} + \&c.$$

Si igitur vt ante operatio inſtituatur faciendo

$$\begin{aligned} A^{I}\gamma + B^{I}\beta + C^{I}\alpha &= A^{II} \\ B^{I}\gamma + C^{I}\beta + D^{I}\alpha &= B^{II} \\ C^{I}\gamma + D^{I}\beta + E^{I}\alpha &= C^{II} \\ &\&c. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}^{I} &= A^{I}\alpha \\ \mathfrak{B}^{I} &= A^{I}\beta + B^{I}\alpha \end{aligned}$$

porroque:

$$\begin{aligned} A^{II}\gamma + B^{II}\beta + C^{II}\alpha &= A^{III} \\ B^{II}\gamma + C^{II}\beta + D^{II}\alpha &= B^{III} \\ C^{II}\gamma + D^{II}\beta + E^{II}\alpha &= C^{III} \\ &\&c. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}^{II} &= A^{II}\alpha \\ \mathfrak{B}^{II} &= A^{II}\beta + B^{II}\alpha \end{aligned}$$

ſicque vlterius valores ſimiles inueſtigando erit:

$$s =$$

$$\frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x}{\alpha + \beta x + \gamma xx} + \frac{(A^{I}\alpha + (A^{I}\beta + B^{I}\alpha)x)x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} + \frac{(A^{II} + (A^{II}\beta + B^{II}\alpha)x)x^4}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^3}$$

$$+ \&c.$$

211. Si ponatur $x = 1$, qua poſitione amplitudini nihil decedit, cum α, β, γ pro lubitu accipi poſſint, fueritque

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

Cum putentur ſucceſſiue ſequentes valores:

$$\begin{array}{l|l} A\gamma + B\beta + C\alpha = A' & A'\gamma + B'\beta + C'\alpha = A'' \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B' & B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = B'' \text{ ſicque} \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C' & C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = C'' \text{ porro} \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

inſuper vero brevitatis ergo ponatur:

$$\alpha + \beta + \gamma = m$$

obtinebitur ſumma ſeriei propoſitae hoc modo expreſſa

$$s = \begin{array}{l} (\alpha + \beta)\left(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \&c.\right) \\ + \alpha \left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \&c.\right) \end{array}$$

212. Eodem modo denominatores ex pluribus terminis conſtantes accipi poſſunt; & quoniam operatio ex praecedentibus facile perſpicitur, hic tantum caſum pro quadrinomio euoluamus: Sit ergo

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

Quaerantur valores ſequentes:

$$\begin{array}{c} A\delta + B\gamma + C\beta + D\alpha = A' \\ B\delta + C\gamma + D\beta + E\alpha = B' \\ C\delta + D\gamma + E\beta + F\alpha = C' \\ \&c. \end{array}$$

$$A'\delta + B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = A''$$
$$B'\delta + C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = B''$$
$$C'\delta + D'\gamma + E'\beta + F'\alpha = C''$$
&c.
$$A''\delta + B''\gamma + C''\beta + D''\alpha = A'''$$
$$B''\delta + C''\gamma + D''\beta + E''\alpha = B'''$$
$$C''\delta + D''\gamma + E''\beta + F''\alpha = C'''$$
&c.

Tum vero sit $\alpha + \beta + \gamma + \delta = m$; eritque

$$s = \begin{array}{l}(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \&c.\right)\\ (\alpha+\beta)\left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \&c.\right)\\ +\alpha\left(\frac{C}{m} + \frac{C'}{m^2} + \frac{C''}{m^3} + \frac{C'''}{m^4} + \&c.\right)\end{array}$$

vnde simul progressio, si adhuc plures partes denominatori m tribuantur, clarissime perspicitur.

213. Neque vero absolute opus est, vt denominatores fractionum, ad quas summam seriei reducimus, sint potestates eiusdem formulae $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \&c.$ sed haec ipsa in singulis terminis variari potest. Quo hoc clarius pateat, sumamus primo tantum duos terminos, fingaturque series

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

in hanc seriem fractionum conuerti:

 $s =$

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{A}'x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)} + \frac{\mathfrak{A}''x^2}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)}$$
$$+ \text{ \&c.}$$

Multiplicetur primum vtrinque per $\alpha + \beta x$, ponaturque

$$A\beta + B\alpha = A'$$
$$B\beta + C\alpha = B' \quad \& \quad \mathfrak{A} = A\alpha$$
$$C\beta + D\alpha = C'$$
&c. fietque per x diuiſo

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{\&c.} = \frac{\mathfrak{A}'}{\alpha' + \beta' x} + \frac{\mathfrak{A}''x}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)}$$
$$+ \text{ \&c.}$$

Deinde ſimili modo multiplicando per $\alpha' + \beta' x$; tumque per $\alpha'' + \beta'' x$, & ita porro, ſi ſtatuatur:

$A'\beta' + B'\alpha' = A''$	$A''\beta'' + B''\alpha'' = A'''$	$A'''\beta''' + B'''\alpha''' = A''''$
$B'\beta' + C'\alpha' = B''$	$B''\beta'' + C''\alpha'' = B'''$	$B'''\beta''' + C'''\alpha''' = B''''$
$C'\beta' + D'\alpha' = C''$	$C''\beta'' + D''\alpha'' = C'''$	$C'''\beta''' + D'''\alpha''' = C''''$
&c.	&c.	&c.

fiet $\mathfrak{A}' = A'\alpha'$; $\mathfrak{A}'' = A''\alpha''$; $\mathfrak{A}''' = A'''\alpha'''$; &c. atque hinc ſeries propoſita conuertetur in hanc:

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A'\alpha' x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)} + \frac{A''\alpha'' x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)}$$
$$+ \text{ \&c.}$$

vbi valores α, β, α', β', α'', β'', α''', β''', &c. ſunt arbitrarii; quouis autem caſu ita accipi poſſunt, vt iſta noua ſeries maxime conuergat.

214. Applicemus hoc quoque ad factores trinomiales, ſitque propoſita ſerie quacunque:

$s =$

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

$$\begin{array}{l|l} A\gamma + B\beta + C\alpha = A' & A'\gamma' + B'\beta' + C'\alpha' = A'' \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B' & B'\gamma' + C'\beta' + D'\alpha' = B'' \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C' & C'\gamma' + D'\beta' + E'\alpha' = C'' \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} A''\gamma'' + B''\beta'' + C''\alpha'' = A''' & A'''\gamma''' + B'''\beta''' + C'''\alpha''' = A'''' \\ B''\gamma'' + C''\beta'' + D''\alpha'' = B''' & B'''\gamma''' + C'''\beta''' + D'''\alpha''' = B'''' \\ C''\gamma'' + D''\beta'' + E''\alpha'' = C''' & C'''\gamma''' + D'''\beta''' + E'''\alpha''' = C'''' \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

Deinde ſtatuatur breuitatis gratia:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= m \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= m' \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= m'' \\ \alpha''' + \beta''' + \gamma''' &= m''' \\ &\&c. \end{aligned}$$

eritque ſeriei propoſitae ſumma:

$$s = \frac{\alpha(A+B)}{m} + \frac{\alpha'(A'+B')}{mm'} + \frac{\alpha''(A''+B'')}{mm'm''} + \frac{\alpha'''(A'''+B''')}{mm'm''m'''} + \&c.$$

$$+ \frac{\beta A}{m} + \frac{\beta' A'}{mm'} + \frac{\beta'' A''}{mm'm''} + \frac{\beta''' A'''}{mm'm''m'''} + \&c.$$

215. Quoniam haec tam late patent, vt vſus minus clare percipi poſſit, reſtringamus transformationem §. 213. traditam, ſitque $x = -1$, vt habeatur haec ſeries:

$$s = A - B + C - D + E - F + G - \&c.$$

ſtatuaturque:

$B-A=A'$	$B'-2A'=A''$	$B''-3A''=A'''$	$B'''-4A'''=A''''$
$C-B=B'$	$C'-2B'=B''$	$C''-3B''=B'''$	$C'''-4B'''=B''''$
$D-C=C'$	$D'-2C'=C''$	$D''-3C''=C'''$	$D'''-4C'''=C''''$
$E-D=D'$	$E'-2D'=D''$	$E''-3D''=D'''$	$E'''-4D'''=D''''$
&c.	&c.	&c.	&c.

Quibus valoribus inuentis, erit ſumma ſeriei propoſitae aequalis ſequenti ſeriei:

$$s=\frac{A}{2}-\frac{A'}{2.3}+\frac{A''}{2.3.4}-\frac{A'''}{2.3.4.5}+\frac{A''''}{2.3.4.5.6}-\&c.$$

Simili igitur modo ſeries quaecunque propoſita in innumerabiles alias ſibi aequales transmutari poteſt, inter quas ſine dubio ſeries maxime conuergentes reperientur, quarum ope ſumma propoſita vero proxime indagari queat.

216. Reuertamur autem ad inuentionem ſerierum, quarum progreſſionis legem calculus differentialis declarat. Cum igitur hoc in quantitatibus algebraicis iam ſit praeſtitum, progrediamur ad transcendentes, quaeraturque ſeries huic logarithmo aequalis:

$$s=l(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\&c.)$$

fingatur quaeſito ſatisfacere haec ſeries:

$$s=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^2+\mathfrak{C}x^3+\mathfrak{D}x^4+\mathfrak{E}x^5+\mathfrak{F}x^6+\&c.$$

Cum igitur ex illius aequationis differentiatione ſequatur

$$\frac{ds}{dx}=\frac{\alpha+2\beta x+3\gamma x^2+4\delta x^3+5\varepsilon x^4+\&c.}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\&c.}$$

erit:

$$(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\&c.)\frac{ds}{dx}=\alpha+2\beta x+3\gamma x^2+4\delta x^3+\&c.$$

Quia

Quia vero ex ficta aequatione est:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

facta hac substitutione oritur haec aequatio:

$$\begin{array}{rrrrrl} \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x & + 3\mathfrak{C}x^2 & + 4\mathfrak{D}x^3 & + 5\mathfrak{E}x^4 & + \&c. & \\ + \mathfrak{A}\alpha & + 2\mathfrak{B}\alpha & + 3\mathfrak{C}\alpha & + 4\mathfrak{D}\alpha & + \&c. & \\ & + \mathfrak{A}\beta & + 2\mathfrak{B}\beta & + 3\mathfrak{C}\beta & + \&c. & \\ & & + \mathfrak{A}\gamma & + 2\mathfrak{B}\gamma & + \&c. & \\ & & & + \mathfrak{A}\delta & + \&c. & = \\ \hline \alpha + 2\beta x & + 3\gamma x^2 & + 4\delta x^3 & + 5\varepsilon x^4 & + \&c. & \end{array}$$

Ex qua sequentes determinationes obtinentur:

$$\mathfrak{A} = \alpha$$

$$\mathfrak{B} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha + \beta$$

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{2}{3}\mathfrak{B}\alpha - \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\beta - \tfrac{1}{3}\mathfrak{A}\beta + \gamma$$

$$\mathfrak{D} = -\tfrac{3}{4}\mathfrak{C}\alpha - \tfrac{2}{4}\mathfrak{B}\beta - \tfrac{1}{4}\mathfrak{A}\gamma + \delta$$

$$\mathfrak{E} = -\tfrac{4}{5}\mathfrak{D}\alpha - \tfrac{3}{5}\mathfrak{C}\beta - \tfrac{2}{5}\mathfrak{B}\gamma - \tfrac{1}{5}\mathfrak{A}\delta + \varepsilon$$

&c.

217. Proposita nunc sit quantitas exponentialis:

$$s = e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \&c.}$$

in qua e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, atque fingatur series quaesita:

$$s = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \&c.$$

iam enim ex casu $x = 0$ patet, primum terminum esse debere vnitatem. Cum igitur sumendis logarithmis sit

$ls =$

$$ls = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \&c.$$

erit differentialibus sumtis:

$$\frac{ds}{dx} = s(\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \&c.)$$

At vero ex aequatione ficta erit:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \&c. =$$

$$\begin{array}{llllll}
\alpha & + \mathfrak{A}\alpha x & + \mathfrak{B}\alpha x^2 & + \mathfrak{C}\alpha x^3 & + \mathfrak{D}\alpha x^4 & + \&c. \\
 & + 2\beta & + 2\mathfrak{A}\beta & + 2\mathfrak{B}\beta & + 2\mathfrak{C}\beta & + \&c. \\
 & & + 3\gamma & + 3\mathfrak{A}\gamma & + 3\mathfrak{B}\gamma & + \&c. \\
 & & & + 4\delta & + 4\mathfrak{A}\delta & + \&c. \\
 & & & & + 5\varepsilon & + \&c.
\end{array}$$

ex quibus sequentes prodeunt litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. determinationes:

$$\mathfrak{A} = \alpha$$

$$\mathfrak{B} = \beta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha$$

$$\mathfrak{C} = \gamma + \tfrac{2}{3}\mathfrak{A}\beta + \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\alpha$$

$$\mathfrak{D} = \delta + \tfrac{3}{4}\mathfrak{A}\gamma + \tfrac{2}{4}\mathfrak{B}\beta + \tfrac{1}{4}\mathfrak{C}\alpha$$

$$\mathfrak{E} = \varepsilon + \tfrac{4}{5}\mathfrak{A}\delta + \tfrac{3}{5}\mathfrak{B}\gamma + \tfrac{2}{5}\mathfrak{C}\beta + \tfrac{1}{5}\mathfrak{D}\alpha \quad \&c.$$

218. Si quoque arcus, cuius sinus vel cosinus quaeritur, exprimatur binomio vel polynomio, vel etiam serie infinita, hoc modo quoque eius sinus & cosinus per seriem infinitam exprimi possunt. At vero quo hoc commodissime fiat, non sufficit ad differentialia prima processisse, sed opus est, vt differentialia secundi gradus in subsidium vocemus. Sit igitur

$s =$

$$s = \sin(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \&c.)$$

fingaturque ſeries quae quaeritur:

$$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \&c.$$

primum enim terminum conſtat euaneſcere: quia vero ad differentialia ſecunda deſcendendum eſt, coefficientem $\mathfrak{A}$ quoque aliunde definiri oportet, quod fiet ſi x ponamus infinite paruum. Tum enim ob arcum $= \alpha x$ ſinus ipſi fiet aequalis, eritque ergo $\mathfrak{A} = \alpha$. Ponamus nunc breuitatis gratia $z = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \&c.$ vt ſit $s = \sin z$, erit differentiando $ds = dz \cos z$, denuoque differentiando $dds = ddz \cos z - dz^2 \sin z$. Quia igitur eſt $\sin z = s$ & $\cos z = \frac{ds}{dz}$; erit

$$dds = \frac{ds\,ddz}{dz} - s\,dz^2, \text{ ſeu } dz\,dds + s\,dz^3 = ds\,ddz.$$

219. Ponamus arcum z tantum binomio exprimi eſſeque $z = \alpha x + \beta x^2$; erit $dz = (\alpha + 2\beta x)\,dx$, & poſito dx conſtante, $ddz = 2\beta\,dx^2$; atque $dz^3 = (\alpha^3 + 6\alpha^2\beta x + 12\alpha\beta^2 x^2 + 8\beta^3 x^3)\,dx^3$. Deinde ob $s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \&c.$

erit $\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + \&c.$

& $\frac{dds}{dx^2} = 2\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C}x + 12\mathfrak{D}x^2 + \&c.$

Quibus valoribus in aequatione differentio-differentiali ſubſtitutis fiet:

 dz-

$$\frac{dz\,dds}{dx^3} = 1.2\,\mathfrak{B}\alpha + 2.3\,\mathfrak{C}\alpha x + 3.4\,\mathfrak{D}\alpha x^2 + 4.5\,\mathfrak{E}\alpha x^3 + \&c.$$

$$+ 2.1.2\,\mathfrak{B}\beta + 2.2.3\,\mathfrak{C}\beta + 2.3.4\,\mathfrak{D}\beta + \&c.$$

$$\frac{+s\,dz^3}{dx^3} = + \mathfrak{A}\alpha^3 + \mathfrak{B}\alpha^3 + \mathfrak{C}\alpha^3 + \&c.$$

$$+ 6\mathfrak{A}\alpha^2\beta + 6\mathfrak{B}\alpha^2\beta + \&c.$$

$$+ 12\,\mathfrak{A}\alpha\beta^2 + \&c.$$

$$\frac{ds\,ddz}{dx^3} = 2\mathfrak{A}\beta + 4\mathfrak{B}\beta + 6\mathfrak{C}\beta + 8\mathfrak{D}\beta + \&c.$$

Vnde coefficientes ſequenti modo definientur:

$$\mathfrak{B} = \frac{2\mathfrak{A}\beta}{2\alpha}$$

$$\mathfrak{C} = 0 - \frac{\mathfrak{A}\alpha 2}{2.3}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{2\mathfrak{C}\beta}{4\alpha} - \frac{6\mathfrak{A}\alpha\beta}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}\alpha^2}{3.4}$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{4\mathfrak{D}\beta}{5\alpha} - \frac{12\mathfrak{A}\beta^2}{4.5} - \frac{6\mathfrak{B}\alpha\beta}{4.5} - \frac{\mathfrak{C}\alpha^2}{4.5}$$

$$\mathfrak{F} = -\frac{6\mathfrak{E}\beta}{6\alpha} - \frac{8\mathfrak{A}\beta^3}{5.6\alpha} - \frac{12\mathfrak{B}\beta\beta}{5.6} - \frac{6\mathfrak{C}\alpha\beta}{5.6} - \frac{\mathfrak{D}\alpha^2}{5.6}$$

$$\mathfrak{G} = -\frac{8\mathfrak{F}\beta}{7\alpha} - \frac{8\mathfrak{B}\beta^3}{6.7\alpha} - \frac{12\mathfrak{C}\beta\beta}{6.7} - \frac{6\mathfrak{D}\alpha\beta}{6.7} - \frac{\mathfrak{E}\alpha 2}{6.7}$$

&c.

Quibus valoribus inuentis erit:

$$\text{ſin}\,(\alpha x + \beta x^2) = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \&c.$$

exiſtente $\mathfrak{A} = \alpha$.

220. Pari modo coſinus cuiusque anguli in ſeriem conuertitur, quia autem arcus rariſſime per polynomium ex-

exprimitur, ostendamus vsum differentio-differentialium in invenienda serie pro cosinu arcus x. Sit ergo $s = \cos x$, & fingatur:

$$s = 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \mathfrak{D}x^8 - \&c.$$

Quia est $ds = -dx \sin x$ & $dds = -dx^2 \cos x = -s dx^2$, erit $dds + s dx^2 = 0$; substitutione ergo facta fiet:

$$\frac{dds}{dx^2} = -1.2\,\mathfrak{A} + 3.4\,\mathfrak{B}x^2 - 5.6\,\mathfrak{C}x^4 + 7.8\,\mathfrak{D}x^6 - \&c.$$

$$s = \quad 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \&c.$$

& ex coaequatione terminorum sequitur:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{1.2}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{3.4} = \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{5.6} = \frac{1}{1.2.3\ldots 6}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}}{7.8} = \frac{1}{1.2.3\ldots 8} \qquad \&c.$$

Patet ergo quod iam supra fusius demonstrauimus esse:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3\ldots 6} + \frac{x^8}{1.2.3\ldots 8} - \&c.$$

prior vero series pro sinu posito $\mathfrak{b} = 0$ & $\alpha = 1$ dabit:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots 7} + \frac{x^9}{1.2.3\ldots 9} - \&c.$$

221. Ex his seriebus pro sinu & cosinu notissimis deducuntur series pro tangente, cotangente, secante

& cosecante cuiusuis anguli. Tangens enim prodit si sinus per cosinum, cotangens si cosinus per sinum, secans si radius 1 per cosinum, & cosecans si radius per sinum diuidatur. Series autem ex his diuisionibus ortae maxime videntur irregulares; verum excepta serie secantem exhibente reliquae per numeros Bernoullianos supra definitos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. ad facilem progressionis legem reduci possunt. Quoniam enim supra §.127 inuenimus esse:

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2}+\frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4}+\frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2.3...6}+\frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2.3...8}+\&c.=1-\frac{u}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

erit posito $\frac{1}{2}u=x$;

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2}-\frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4}-\frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2.3...6}-\frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2....8}-\&c.$$

atque si ponatur $\frac{1}{2}x$ pro x, erit:

$$\cot\tfrac{1}{2}x=\frac{2}{x}-\frac{2\mathfrak{A}x}{1.2}-\frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4}-\frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2.3...6}-\frac{2\mathfrak{D}x^7}{1.2.3...8}-\&c.$$

222. Hinc autem tangens cuiusuis arcus sequenti modo per seriem exprimetur.

Cum sit $\operatorname{tang} 2x=\frac{2\operatorname{tang}x}{1-\operatorname{tang}x^2}$, erit:

$$\operatorname{cotang.} 2x=\frac{1}{2\operatorname{tang}x}-\frac{\operatorname{tang}x}{2}=\tfrac{1}{2}\cot x-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}x;$$

ideoque $\operatorname{tang}x=\cot x-2\cot 2x$. Cum igitur sit

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2}-\frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4}-\frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2...6}-\frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2...8}-\&c.$$

$$2\cot 2x = \frac{1}{x} - \frac{2^4\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^8\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^{12}\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots 6} - \frac{2^{16}\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots 8} - \&c.$$

erit hanc feriem ab illa fubtrahendo :

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{A}x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots\ldots 6} + \frac{2^8(2^8-1)\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots\ldots 8}$$
$$+ \ \&c.$$

Si ergo hic introducantur numeri A, B, C, D, &c. §. 182. inuenti, erit:

$$\mathrm{tang}\,x = \frac{2Ax}{1.2} + \frac{2^3Bx^3}{1.2.3.4} + \frac{2^5Cx^5}{1.2\ldots 6} + \frac{2^7Dx^7}{1.2\ldots 8} + \&c.$$

223. Cofecans autem fequenti modo inuenietur. Quia eft $\cot x = \mathrm{tang}\,x + 2\cot 2x = \frac{1}{\cot x} + 2\cot 2x$; erit $\cot x^2 = 2\cot x.\cot 2x + 1$, & radice extracta:

$\cot x = \cot 2x + \mathrm{cofec.}\,2x$, unde fit

$\mathrm{cofec.}\,2x = \cot x - \cot 2x$, & x pro $2x$, pofito $\mathrm{cofec.}\,x = \cot\frac{1}{2}x - \cot x$. Quare cum cotangentes habeamus fcilicet:

$$\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots 6} - \&c.$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots 6} - \&c.$$

erit hac ferie ab illa fubtracta :

$$\mathrm{cofec.}\,x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A}x}{1.2} + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots\ldots 6} + \&c.$$

224. Per hos autem numeros Bernoullianos secans exprimi non potest, sed requirit alios numeros, qui in summas potestatum reciprocarum imparium ingrediuntur. Si enim ponatur:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c. = \alpha . \frac{\pi}{2^2}$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c. = \frac{\beta}{1.2} . \frac{\pi^3}{2^4}$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c. = \frac{\gamma}{1.2.3.4} . \frac{\pi^5}{2^6}$$

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \&c. = \frac{\delta}{1.2 \ldots 6} . \frac{\pi^7}{2^8}$$

$$1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \&c. = \frac{\varepsilon}{1.2 \ldots 8} . \frac{\pi^9}{2^{10}}$$

$$1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{7^{11}} + \frac{1}{9^{11}} - \&c. = \frac{\zeta}{1.2 \ldots 10} . \frac{\pi^{11}}{2^{12}}$$

&c.

erit:

$\alpha = 1$

$\beta = 1$

$\gamma = 5$

$\delta = 61$

$\varepsilon = 1385$

$\zeta = 50521$

$\eta = 2702765$

$\theta = 199360981$

$\iota = 19391512145$

$\kappa = 2404879661671$ &c.

ex

ex hisque valoribus obtinebitur:

$$\text{sec.}\,x = \alpha + \frac{\beta}{1.2}xx + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots6}x^6 + \frac{\epsilon}{1.2\ldots8}x^8 + \&c.$$

225. Vt autem nexum huius seriei cum numeris α, β, γ, δ, &c. ostendamus, consideremus seriem supra tractatam:

$$\frac{\pi}{n\,\text{sin}\frac{m}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \&c.$$

Ponatur $m = \frac{1}{2}n - k$, eritque

$$\frac{\pi}{2n\,\text{cos}\frac{k}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n+2k} - \frac{1}{3n-2k} - \frac{1}{3n+2k} + \frac{1}{5n-2k} + \&c.$$

Sit $\frac{k\pi}{n} = x$, seu $k\pi = nx$, erit

$$\frac{\pi}{2n}\,\text{sec.}\,x = \frac{\pi}{n\pi-2nx} + \frac{\pi}{n\pi+2nx} - \frac{\pi}{3n\pi-2nx} - \&c.$$

seu

$$\text{sec.}\,x = \frac{2}{\pi-2x} + \frac{2}{\pi+2x} - \frac{2}{3\pi-2x} - \frac{2}{3\pi+2x} + \frac{2}{5\pi-2x} + \&c.$$

$$\text{sec.}\,x = \frac{4\pi}{\pi^2-4x^2} - \frac{4.3\pi}{9\pi^2-4xx} + \frac{4.5\pi}{25\pi^2-4xx} - \frac{4.7\pi}{49\pi^2-4xx} + \&c.$$

si

ſi nunc ſinguli termini in ſeries conuertantur, fiet:

$$\text{ſec.}\, x = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.\right)$$

$$+ \frac{2^4 x^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c.\right)$$

$$+ \frac{2^6 x^4}{\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c.\right)$$

&c.

quarum ſerierum loco ſi valores ſupra aſſignati ſubſtituantur, prodibit eadem ſeries pro ſecante, quam dedimus.

226. Hinc ſimul patet lex, qua numeri α, β, γ, δ, &c. quibus ſummae poteſtatum imparium conſtituuntur, procedunt. Cum enim ſit

$$\text{ſec.}\, x = \frac{1}{\text{coſ}\, x} = \alpha + \frac{\beta}{1.2} x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4} x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots 6} + \&c.$$

neceſſe eſt vt haec ſeries aequalis ſit fractioni

$$\frac{1}{1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots 6} + \frac{x^8}{1.2\ldots 8} - \&c.}$$

aequalitate ergo conſtituta fiet $1 =$

$$\alpha + \frac{\beta}{1.2} x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4} x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots 6} x^6 + \frac{\varepsilon}{1.2\ldots 8} x^8 + \&c.$$

$$- \frac{\alpha}{1.2} - \frac{\beta}{1.2.1.2} - \frac{\gamma}{1.2.1\ldots 4} - \frac{\delta}{1.2.1\ldots 6}\ \&c.$$

+

$$+\frac{\alpha}{1.2.3.4}+\frac{\beta}{1\ldots4.1.2}+\frac{\gamma}{1\ldots4.1\ldots4}-\&c.$$

$$-\frac{\alpha}{1\ldots6}-\frac{\beta}{1\ldots6.1.2}-\&c.$$

$$+\frac{\alpha}{1\ldots8}\ \&c.$$

vnde ſequuntur hae aequationes:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{2.1}{1.2}\alpha$$

$$\gamma = \frac{4.3}{1.2}\beta - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\alpha$$

$$\delta = \frac{6.5}{1.2}\gamma - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\beta + \frac{6\ldots1}{1\ldots6}\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{8.7}{1.2}\delta - \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\gamma + \frac{8\ldots3}{3\ldots8}\beta - \frac{8\ldots1}{1\ldots8}\alpha$$

&c.

Ex hisque formulis inuenti ſunt iſtarum litterarum valores, quos in §. 224. exhibuimus; & quorum ope ſummae ſerierum in hac forma contentarum,

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\&c.$$

ſi n fuerit numerus impar, exprimi poſſunt.

CAPUT IX.

DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS IN AEQUATIONIBUS RESOLUENDIS.

227.

Conſtitutionem aequationum ad functionum rationem reduci poſſe ſupra iam ſatis oſtenſum eſt. Denotet enim y functionem quamcunque ipſius x, ſi ponatur $y = 0$, in hac forma omnes omnino aequationes finitae ſiue ſint algabraicae ſiue transcendentes comprehenduntur. Aequatio autem $y = 0$ reſolui dicitur, ſi is ipſius x valor definiatur, qui in functione y ſubſtitutus, eam actu nihilo aequalem reddat. Plerumque autem plures eiusmodi valores pro x dantur, qui aequationis $y = 0$ radices vocantur. Si igitur ponamus numeros f, g, h, i, &c. eſſe radices aequationis $y = 0$, functio y ita erit comparata, vt ſi in ea loco x vel f, vel g, vel h, &c. ſubſtituatur, fiat reuera $y = 0$.

228. Quoniam igitur functio y euaneſcit, ſi in ea loco x ponatur f, ſeu $x + (f - x)$, exiſtente f radice aequationis $y = 0$, erit per ea, quae ſupra de functionibus demonſtrauimus:

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

ex

ex qua aequatione valor radicis f ita definitur, vt quicquid pro x fuerit positum, indeque valores quantitatum y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{2dx^2}$, &c substituti, semper resultet aequatio verum valorem ipsius f exhibens. Quo hoc clarius percipiatur, ponamus esse $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$; erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$; $\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - 2$; & $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$.

Quibus valoribus substitutis oritur:

$$0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (f-x)(3xx - 4x + 3)$$
$$+ (f-x)^2(3x-2) + (f-x)^3$$

seu multiplicationibus actu institutis:

$$f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0$$

oritur scilicet aequatio similis ipsi propositae, quae propterea easdem continet radices.

229. Quanquam autem hoc modo ad nouam aequationem non peruenitur, ex qua valor radicis f facilius definiri queat; tamen hinc ingentia subsidia ad inventionem radicum deduci possunt. Si enim pro x assumtus fuerit valor iam proxime ad quampiam radicem aequationis accedens, ita vt $f - x$ sit quantitas valde parva, tum termini aequationis:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

vehementer conuergent, hancque ob causam non multum a veritate aberrabitur, si praeter binos terminos ini-

tiales reliqui reiiciantur. Erit ergo ſi pro x iam valor cuipiam aequationis $y = 0$ radici prope aequalis fuerit aſſumtus, proxime $0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx}$ ſeu $f = x - \frac{ydx}{dy}$, ex qua formula etſi non verus, tamen admodum propinquus radicis f valor reperietur, qui deinceps denuo loco x ſubſtitutus, multo adhuc propiorem valorem pro f ſuppeditabit; ſicque continuo propius ad verum radicis f valorem accedetur.

230. Hinc igitur primum radices omnium dignitatum ex quibuscunque numeris extrahi poſſunt. Sit enim propoſitus numerus $a^n + b$ ex quo radicem poteſtatis n extrahi oporteat. Ponatur $x^n = a^n + b$ ſeu $x^n - a^n - b = 0$, vt ſit $y = x^n - a^n - b$; erit

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}; \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}; \text{ \&c.}$$

Hinc ſi radix quaeſita ponatur $= f$, vt ſit $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ erit:

$$0 = x^n - a^n - b + n(f-x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(f-x)^2x^{n-2} + \text{\&c.}$$

Si igitur pro x iam ſtatuatur numerus ad valorem radicis quaeſitae f prope accedens, quod fiet ponendo $x = a$, ſi quidem b ſit numerus tam paruus, vt $a^n + b < (a+1)^n$; erit $b = na^{n-1}(f-a)$ proxime, ideoque $f = a + \frac{b}{na^{n-1}}$, vnde valor radicis multo propius

pius cognoſcetur. Sin autem adhuc tertium terminum aſſumere velimus, vt ſit

$$b = n a^{n-1}(f-a) + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}(f-a)^2, \text{ fiet}$$

$$(f-a)^2 = -\frac{2a}{n-1}(f-a) + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}, \text{ ideoque}$$

$$f = a - \frac{a}{n-1} \pm V\left(\frac{aa}{(n-1)^2} + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}\right) \text{ ſeu}$$

$$f = \frac{(n-2)a + V(aa + 2(n-1)b : na^{n-2})}{n-1}.$$

Quare ope extractionis radicis quadratae valor radicis f adhuc propius reperietur.

EXEMPLUM.

Quaeramus radicem quadratam ex numero quocunque c, *ſeu ſit* xx — c = y.

Ponatur ergo numerus radici proximus $= a$, & $b = c - aa$, ob $aa + b = c$, & quia eſt $n = 2$, fiet prior formula $f = a + \frac{c-aa}{2a} = \frac{c+aa}{2a}$, altera vero dat $f = Vc$, quae eſt ipſa radix quaeſita. Cum igitur ſit proxime radix $= \frac{c+aa}{2a}$, hic ipſe valor pro a ſcribatur, eritque propius radix $f = \frac{cc + 6aac + a^4}{4a(c+aa)}$. Sit verbi gratia $c = 5$; erit ex priori formula $f = \frac{5}{2a} + \frac{a}{2}$. Ponatur ergo $a = 2$;

erit $f = 2,25$; nunc ponatur $a = 2,25$; fiet $f = 2,236111$, ſtatuatur porro $a = 2,236111$, erit $f = 2,2360679$, qui valor iam minime a vero diſcrepat.

231. Simili autem modo radix cuiuscunque aequationis inueniri poteſt proxime ope aequationis $f = x - \frac{ydx}{dy}$, poſtquam ſcilicet pro x aſſumtus fuerit valor parum a quapiam aequationis radice diſcrepans. Ad huiusmodi vero valorem pro x inueniendum, ſubſtituantur ſucceſſiue pro x varii valores, inter eosque is eligatur, qui functionis y minimum hoc eſt cyphrae proximum valorem indicat. Sic ſi ſit $y = x^3 - 2xx + 3x - 4$,

poſito $x = 0$ fit $y = -4$
$x = 1 \ldots y = -2$
$x = 2 \ldots y = +2$

vnde videmus radicem contineri inter valores 1 & 2, ipſius x. Cum ergo ſit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$, habebitur pro radice f aequationis $x^3 - 2xx + 3x - 4 = 0$ inuenienda haec aequatio:

$$f = x - \frac{ydx}{dy} = x - \frac{(x^3 - 2xx + 3x - 4)}{3xx - 4x + 3}.$$

Sit ergo $x = 1$; fiet $f = 1 + \frac{2}{2} = 2$. Nunc ponatur $x = 2$, fiet $f = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$. Sit ergo $x = \frac{12}{7}$; erit

erit $f = \frac{12}{7} - \frac{104}{1701} = \frac{2812}{1701} = 1,653$. Si vlterius progredi velimus, logarithmis commodius vtemur.

Ponatur ergo $x = 1,653$, eritque

$lx = 0,2182729$	$x = 1,653000$
$lx^2 = 0,4365458$	$x^2 = 2,732409$
$lx^3 = 0,6548187$	$x^3 = 4,516673$

$$
\begin{array}{rlrl}
x^3 = & 4,516673 & & \\
3x = & \underline{4,959000} & & \\
 & 9,475673 & 3xx+3 = & 11,197227 \\
2xx+4 = & \underline{9,464818} & 4x = & \underline{6,612000} \\
\text{num.} & 0,010855 & \text{den.} = & 4,585227 \\
l\,\text{num.} = & 8,0356298 & & \\
l\,\text{den.} = & \underline{0,6613608} & x = & 1,653000 \\
l\,\text{fract.} = & 7,3742690\;; & \text{fractio} = & \underline{0,002367} \\
 & & f = & 2,650633
\end{array}
$$

qui valor iam proxime ad verum accedit.

232. Citiores autem approximationes ex generali expressione deducere poterimus. Cum enim posita functione quacunque $y = 0$, si radix huius aequationis fuerit $x = f$, inuenerimus esse:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2\,ddy}{2\,dx^2} + \frac{(f-x)^3\,d^3y}{6\,dx^3} + \&c.$$

sit $f-x = z$, ita vt sit radix $f = x + z$, atque ponatur

$$\frac{dy}{dx} = p;\quad \frac{dp}{dx} = q;\quad \frac{dq}{dx} = r;\quad \frac{dr}{dx} = s;\quad \text{erit:}$$

$$0 = y + zp + \frac{z^2 q}{2} + \frac{z^3 r}{6} + \frac{z^4 s}{24} + \frac{z^5 t}{120} + \&c.$$

in

in qua aequatione ſumto pro x valore quocunque, ex quo ſimul y, p, q, r, s, &c. determinantur, inueniri debet quantitas z, qua inuenta habebitur aequationis propoſitae $y = 0$, radix $f = x + z$. In id ergo eſt incumbendum, vt quam commodiſſime ex hac aequatione valor incognitae z eruatur.

233. Fingatur pro z ſeries conuergens haec:

$$z = A + B + C + D + E + \&c.$$

atque facta ſubſtitutione erit:

$$y = y$$

$$pz = Ap + Bp + Cp + Dp + Ep + \&c.$$

$$\tfrac{1}{2}qz^2 = \quad + \tfrac{1}{2}A^2q + ABq + ACq + ADq + \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{2}BBq + BCq + \&c.$$

$$\tfrac{1}{6}rz^3 = \quad \tfrac{1}{6}A^3r + \tfrac{1}{2}A^2Br + \tfrac{1}{2}A^2Cr + \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{2}AB^2r + \&c.$$

$$\tfrac{1}{24}sz^4 = \quad \tfrac{1}{24}A^4s + \tfrac{1}{6}A^3Bs + \&c.$$

$$\tfrac{1}{120}tz^5 = \quad \tfrac{1}{120}A^5t + \&c.$$

Vnde obtinentur ſequentes aequationes:

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{yyq}{2p^3}$$

$$C = -\frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4}$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5} \quad \&c.$$

ideo-

ideoque erit:

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2 q}{2p^3} - \frac{y^3 qq}{2p^5} + \frac{y^3 r}{6p^4} - \frac{5y^4 q^3}{8p^7} + \frac{5y^4 qr}{12p^6} - \frac{y^4 s}{24p^5} - \&c.$$

EXEMPLUM.

Sit propofita haec aequatio $x^5 + 2x - 2 = 0$.

Erit ergo $y = x^5 + 2x - 2$;

$$\frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2$$

$$\frac{dp}{dx} = q = 20x^3$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2$$

$$\frac{dr}{dx} = s = 120x \quad \&c.$$

Ponatur autem nunc $x = 1$, quia hic valor parum a radice discrepat, erit:

$$y = 1; \quad p = 7; \quad q = 20; \quad r = 60; \quad s = 120.$$

vnde fiet:

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5.1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5}$$

feu $z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7}$ &c. eritque ergo $z = -0{,}18$, & radix $f = 0{,}82$, qui valor fi denuo loco x fubftitueretur, prodiret radix maxime verae propinqua.

234. Inuenimus ergo ſeriem infinitam, quae cuiusvis aequationis radicem exprimit: ea autem hoc laborat incommodo vt tum lex progreſſionis non pateat, tum ipſa nimis ſit perplexa atque ad vſum non ſatis accommodata. Alio igitur modo idem negotium ſuſcipiamus, ſeriemque magis regularem inueſtigemus, cuiuscunque aequationis propoſitae radicem exprimentem.

Sit vt ante propoſita aequatio $y = 0$, exiſtente y functione quacunque ipſius x; & quaeſtio huc redit, vt valor ipſius x definiatur, qui loco x ſubſtitutus functionem y reddat nihilo aequalem. Cum autem y ſit functio ipſius x, viciſſim x tanquam functio ſpectari poterit ipſius y, atque hac conſideratione adhibita quaerendus eſt valor ipſius functionis x, quem induit, cum quantitas y euaneſcit. Si igitur f ponatur deſignare iſtum ipſius x valorem, qui erit radix aequationis $y = 0$, quoniam x abit in f, ſi ſtatuatur $y = 0$, erit per ea quae ſupra ſunt demonſtrata:

$$f = x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2\,ddx}{2dy^2} + \frac{y^3\,d^3x}{6dy^3} + \frac{y^4\,d^4x}{24dy^4} - \&c.$$

in qua aequatione ſtatuitur differentiale dy conſtans. Si igitur ponatur:

$$\frac{dx}{dy} = p; \quad \frac{dp}{dy} = q; \quad \frac{dq}{dy} = r; \quad \frac{dr}{dy} = s; \quad \&c.$$

erit his valoribus introductis, vt conſideratio differentialis conſtantis exuatur:

$$f = x - p + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \&c.$$

235.

235. Tributo ergo ipsi x quocunque valore, simul valores ipsius y, atque quantitatum p, q, r, s, &c. determinabuntur; hisque inuentis habebitur series infinita valorem radicis f exprimens. Sin autem aequatio $y=0$ plures admittat radices, tum eae prodibunt, si pro x diversi valores assumantur: quia enim y eundem valorem induere potest, etiamsi ipsi x diuersi valores tribuantur, mirum non est eandem seriem saepenumero plures valores suppeditare posse. Quo igitur his casibus ambiguitas tollatur, simulque series conuergens reddatur, pro x assumi debet valor iam prope ad valorem eius radicis, quae quaeritur, accedens. Hoc enim modo valor ipsius y fiet admodum paruus, serieique termini vehementer decrescent, ita vt paucis terminis sumendis iam satis iustus valor pro f inueniatur. Hic igitur valor si deinceps loco x substituatur, quantitas y multo minor euadet, seriesque multo magis conuerget; hocque modo statim radix f tam exacte innotescet, vt error futurus sit minimus. Hincque summa huius expressionis praerogatiua prae ea, quam ante elicueramus, manifesto perspicitur.

236. Ponamus extrahendam esse radicem potestatis n ex numero quocunque N. Sumta igitur proxima potestate exponentis n, numerus propositus facile resolvetur in hanc formam $N=a^n+b$. Erit ergo

$$x^n=a^n+b \quad \& \quad y=x^n-a^n-b; \text{ vnde fit:}$$

$$dy = nx^{n-1}dx \;;\; \& \; \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

$$dp = -\frac{(n-1)dx}{nx^2} \;;\; \& \; \frac{dp}{dy} = q = -\frac{(n-1)}{nnx^{2n-1}}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} \;;\; \& \; \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}}$$

$$dr = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx}{n^3x^{3n}} \;;\; \& \; s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n}}$$

&c.

Ponatur nunc $x = a$, eritque $y = -b$, atque radix quaesita $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ hoc modo exprimetur:

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{n.2n.a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{n.2n.3n.a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n.2n.3n.4n\;a^{4n-1}} + \&c.$$

ſicque prodit eadem ſeries, quae vulgo per euolutionem binomii $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$ erui ſolet.

237. Poſtquam ergo in actuali extractione radix proxime vera a fuerit inuenta, ſimulque reſiduum b fuerit repertum, tum ad radicem inſuper addi oportet valorem fractionis $\frac{b}{na^{n-1}}$, quo propius vera radix obtineatur. Erit autem $a^{n-1} = \frac{N-b}{a}$, ob $N = a^n + b$. At vero hoc modo radix iuſto maior inuenietur, quoniam tertius terminus ſubtrahi debet. Quo igitur per diui-

diuiſionem reſidui b radix multo propius ad verum accedens inueniatur idoneus diuiſor debet inueſtigari, qui fingatur eſſe $na^{n-1} + \alpha b + \beta bb + \gamma b^3 + \&c.$

Cum igitur debeat eſſe:

$$\frac{b}{na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \&c.} =$$

$$\frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^4a^{4n-1}} + \&c.$$

fiet multiplicatione per $na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \&c.$ inſtituta:

$$b = b$$

$$- \frac{(n-1)bb}{2na^n} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^3a^{3n}} + \&c.$$

$$+ \frac{\alpha b^2}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\alpha b^3}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)\alpha b^4}{6n^3a^{3n-1}}$$

$$+ \frac{\beta b^3}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\beta b^4}{2n^2a^{2n-1}}$$

$$+ \frac{\gamma b^4}{na^{n-1}}$$

Hinc deducuntur ſequentes determinationes:

$$\alpha = \frac{n-1}{2a}$$

$$\beta = \frac{(n-1)\alpha}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = - \frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}}$$

$$\gamma = \frac{(n-1)\beta}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)\alpha}{6nna^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^2a^{2n+1}}$$

ſeu $\gamma = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}}$.

Frac-

Fractio ergo ad radicem iam inuentam a insuper addenda erit:

$$\frac{b}{na^{n-1}+\frac{(n-1)b}{2a}-\frac{(nn-1)bb}{12na^{n+1}}+\frac{(nn-1)b^3}{24na^{2n+1}}}.$$

238. Quod si ergo radix quadrata extrahi debeat ex numero N, atque inuenta iam sit radix proxima $= a$, cum residuo $= b$, ad radicem inuentam insuper addi debet quotus, qui oritur, si residuum b diuidatur per $2a+\frac{b}{2a}-\frac{bb}{8a^3}+\frac{b^3}{16a^5}-$&c. Sin autem radix cubica extrahi debeat, tum residuum b diuidi debet per $3a^2+\frac{b}{a}-\frac{2bb}{9a^4}+\frac{b^3}{9a^7}-$&c. quarum formularum vsum in his exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Extrahatur radix quadrata ex numero 200.

Ponatur $N = 200$, & cum proximum quadratum sit 196, erit $a = 14$, & residuum $b = 4$, quod propterea diuidi debebit per $28+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}.\frac{1}{196}+\frac{1}{7.196.98}$, eritque ergo diuisor $= 28,142135$, per quem si 4 diuidatur, obtinebitur fractio decimalis ad 14 addenda, quae iusta erit ad 10 figuras & vltra.

EXEMPLUM II.

Extrahatur radix cubica ex numero $N = 10$.

Proximus cubus est 8, & residuum $= 2$, vnde $a = 2$

&

& $b = 2$, atque diuiſor $= 12 + 1 - \frac{1}{18} = 12,9444$. Quare radix cubica quaeſita erit proxime $=$ $2\frac{2}{12,9444} = 2\frac{10000}{64722}$.

239. Series pro radice inuenta etiam conſiderari poteſt tanquam recurrens orta ex quapiam fractione, hoc enim modo plures termini ſeriei ad multo pauciores, qui numeratorem & denominatorem fractionis conſtituant, reuocabuntur. Sic leui attentione adhibita perſpicietur fore proxime:

$$(a+b)^n = a^n . \frac{a + \frac{(n+1)}{2}b}{a + \frac{(n-1)}{2}b}$$ atque adhuc propius

$$(a+b)^n = a^n . \frac{aa + \frac{(n+2)}{2}ab + \frac{(n+1)(n+2)}{12}bb}{aa - \frac{(n-2)}{2}ab + \frac{(n-1)(n-2)}{12}bb}.$$

Simili modo plures terminos introducendo fractiones adhuc accuratiores obtineri poſſunt:

$$(a+b)^n = a^n .$$
$$\frac{a^3 + \frac{(n+3)}{2}a^2b + \frac{(n+3)(n+2)}{10}ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)b^3}{120}}{a^3 - \frac{(n-3)}{2}a^2b + \frac{(n-3)(n-2)}{10}ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)b^3}{120}}.$$

Quin etiam huiusmodi forma generalis exhiberi poteſt, ad quam commode exprimendam ſit:

A =

$$A = \frac{m(n+m)}{1 \cdot 2m} \qquad\qquad \mathfrak{A} = \frac{m(n-m)}{1 \cdot 2m}$$

$$B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2\ (2m-1)}A \qquad\qquad \mathfrak{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2\ (2m-1)}\mathfrak{A}$$

$$C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3\ (2m-2)}B \qquad\qquad \mathfrak{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3\ (2m-2)}\mathfrak{B}$$

$$D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4\ (2m-3)}C \qquad\qquad \mathfrak{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4\ (2m-3)}\mathfrak{C}$$

&c. &c.

His autem valoribus determinatis erit:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \&c.}{a^m - \mathfrak{A}a^{m-1}b + \mathfrak{B}a^{m-2}b^2 - \mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \&c.}$$

240. Si igitur hic pro n substituatur numerus fractus, istae formulae ad extractionem radicum apprime erunt accommodatae. Sic si radix quaecunque potestatis n extrahi debeat ex forma $a^n + b$, sequentes formulae in vsum vocari possunt:

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b}$$

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2a^{2n} + 6n(2n+1)a^nb + (2n+1)(n+1)bb}{12n^2a^{2n} + 6n(2n-1)a^nb + (2n-1)(n-1)bb}.$$

Sin autem ponatur $a^n + b = N$, vt sit $a^n = N - b$; erit:

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b}$$

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)bb}{12n^2N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)bb}.$$

241. Formula igitur generalis pro radice cuiusque aequationis inuenienda in aequationibus, quae ex pluribus terminis constant, eundem praestat vsum, quem solita regula binomii ad resolutionem aequationum purarum $x^n = c$ afferre solet, atque adeo hoc casu in regulam illam ipsam abit. Sin autem aequatio fuerit affecta vel etiam transcendens, expressio nostra generalis semper aequali successu in vsum vocatur, seriemque praebet infinitam, quae valorem radicis exhibet. Quamobrem cum in hoc negotio summa vis istius formulae generalis consistat, eius vsum hic aliquanto fusius ostendamus. Sit igitur proposita haec aequatio affecta tribus terminis constans:

$$x^n + cx = N,$$

denotantibus c & N quantitates quascunque datas. Ponatur $x^n + cx - N = y$, erit $dy = (nx^{n-1} + c)dx$, hincque fiet $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$, tum est

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2}dx}{(nx^{n-1}+c)^2}; \quad \& \quad q = -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1}+c)^3}.$$

Simili modo ob $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$ &c. reperietur:

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-3}}{(nx^{n-1}+c)^5}$$

$$s = -\frac{n^3(n-1)(2n-1)(3n-1)x^{3n-6} + 4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-5} - n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-4}}{(nx^{n-1}+c)^7}$$

$$t = +\frac{\begin{matrix} n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} - n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(29n-11)cx^{3n-7} \\ + n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(nn-29)c^2x^{2n-6} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-5} \end{matrix}}{(nx^{n-1}+c)^9}$$

&c.

 Qui-

Quibus valoribus inuentis, erit aequationis propofitae radix

$$f = x - py + \frac{1}{2}qyy - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \&c.$$

quicquid enim pro x fubftituatur, vnde fimul litterae y, p, q, r, &c. valores determinatos induunt, fumma feriei aequabitur valori vnius radicis.

EXEMPLUM I.

Sit propofita haec aequatio $x^3 + 2x = 2$.

Erit $c = 2$, $N = 2$, & $n = 3$, atque $y = x^3 + 2x - 2$, Ponatur $x = 1$, erit $y = 1$, & $p = \frac{1}{5}$; $q = -\frac{6}{5^3}$; $r = \frac{84}{5^5}$; $s = -\frac{16.90}{5^7}$ &c. atque aequationis radix erit:

$$f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^3} - \frac{14}{5^5} - \frac{60}{5^7} - \&c. = 0,770751.$$

Ponatur nunc $x = 0,77$, & quia eft $y = x^3 + 2x - 2$; $p = \frac{1}{3xx+2}$; $q = -6p^3x$; $r = 9xxp^5 - 12p^5$; atque $s = -2160p^7x^3 + 720p^7x$; habebitur logarithmis adhibendis:

$lx = 9,8864907$	$x = 0,77$
$lx^2 = 9,7729814$	$x^2 = 0,5929$
$lx^3 = 9,6594721$	$x^3 = 0,456533$
	$2x = 1,54$
	$x^3 + 2x = 1,996533$
Ergo	$y = -0,003467$

$l-y = 7,5399538$; $3xx+2 = 3,7787$

$lp = 9,4226575$; $l(3xx+2) = 0,5773424$

$l-py = 6,9626113$; $-py = 0,000917511$

$lp^3 = 8,2679725$

$lx = 9,8864907$

$l3 = 0,4771213$

$ly^2 = 5,0799076$

$l-\frac{1}{2}qyy = 3,7114922$ $-\frac{1}{2}qyy = 0,000000514$.

Ergo radix $f = 0,770916997$, quae vix in vltima figura a vero aberrabit.

EXEMPLUM II.

Sit proposita aequatio $x^4 - 2xx + 4x = 8$.

Ponatur $y = x^4 - 2xx + 4x - 8$, erit $dy = 4dx(x^3 - x + 1)$

$$p = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)}; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{-\;3xx+1}{4(x^3-x+1)^2} \text{ Ergo}$$

$$q = \frac{-\;3xx+1}{16(x^3-x+1)^3}; \quad \frac{dq}{dx} = \frac{21x^4 - 12xx - 3}{16(x^3-x+1)^4} \;\&$$

$$r = \frac{21x^4 - 12xx - 3}{64(x^3-x+1)^5} \;\&c.$$

ex quibus erit radix aequationis propositae:

$$f = x - \frac{y}{4(x^3-x+1)} - \frac{(3xx-1)yy}{32(x^3-x+1)^3} - \frac{(7x^4-4xx+1)y^3}{128(x^3-x+1)^5} - \&c.$$

Oportet ergo ipsi x idoneum valorem tribui, quo series ista fiat conuergens. Primum autem perspicuum est, si

ipſi x tribueretur talis valor, quo fieret $x^3-x+1=0$, tum omnes ſeriei terminos praeter primum euadere infinitos, neque adeo exinde quicquam concludi poſſe. Conuenit ergo ipſi x eiusmodi valorem aſſignare, quo & y fiat exiguum & x^3-x+1 non admodum paruum. Sit $x=1$, erit $y=-5$, &

$$f=1+\frac{5}{4}-\frac{25}{16}+\frac{125}{64}-\&c.$$

vbi cum tres termini $\frac{5}{4}-\frac{25}{16}+\frac{125}{64}$ congruant cum progreſſione geometrica, cuius ſumma eſt $\frac{5}{9}$ erit circiter $f=\frac{14}{9}$. Statuamus ergo $x=\frac{3}{2}$, erit $y=-\frac{23}{16}$; & $x^3-x+1=\frac{23}{8}$, vnde fit:

$$f=\frac{3}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{64}+\frac{407}{256.529}-\&c.=1,61.$$

Ponatur nunc $x=1,61$; erit:

$lx=0,2068259$	$x=1,61$	ſit $x^3-x+1=z$
$lx^2=0,4136518$	$x^2=2,5921$	
$lx^3=0,6204777$	$x^3=4,173281$	
$lx^4=0,8273036$	$x^4=6,718983$	
	hinc	
$l-y=8,4016934$	$y=-0,025217$	
$lz=0,5518502$	$z=3,563281$	
$l\frac{-y}{z}=7,8498432$		

$l4=$

$l4 = 0,6020600$	
$l\frac{-y}{4z} = 7,2477832$	$\frac{-y}{4z} = 0,0017692$
$l(3xx-1) = 0,8309926$	$3xx-1 = 6,7763$
$ly^2 = 6,8033868$	
$7,6343794$	
$lz^3 = 1,6555506$	
$5,9788288$	
$l32 = 1,2041200$	$\frac{(3xx-1)y^2}{32z^3} = 0,000005952$
$4,7747088$	

Ergo $f = 1,6117632$.

242. Methodus haec inueniendi radices aequationum proxime aeque patet ad quantitates transcendentes. Quaeramus numerum x, cuius logatithmus ex quocunque canone desumtus ad ipsum numerum datam habeat rationem vt 1 ad n, atque habebitur ista aequatio $x - nlx = 0$: sit autem k modulus horum logarithmorum, ita vt isti logarithmi obtineantur, si logarithmi hyperbolici multiplicentur per k, erit $d.lx = \frac{kdx}{x}$. Ponatur ergo $x - nlx = y$, sitque f valor ipsius x quaesitus, qui reddat $x = nlx$. Cum igitur sit $y = x - nlx$, erit $dy = dx - \frac{kndx}{x} = \frac{dx(x-kn)}{x}$

& $\frac{dx}{dy} = p = \frac{x}{x-kn}$; vnde $dp = -\frac{kndx}{(x-kn)^2}$ ergo

$\frac{dp}{dy} = q = \frac{-knx}{(x-kn)^3}$; $dq = \frac{2knxdx+k^2n^2dx}{(x-kn)^4}$

$\frac{dq}{dy} = r = \frac{knx(2x+kn)}{(x-kn)^5}$ &c.

Quare fiet:

$$f = x - \frac{xy}{x-kn} - \frac{knxyy}{2(x-kn)^3} - \frac{knxy^3(2x+kn)}{6(x-kn)^5} - \&c.$$

Infra autem ostendemus hoc problema solutionem non admittere, nisi sit $kn > e$, existente e numero cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, seu debet esse $kn > 2{,}7182818$.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus praeter 10, *cuius logarithmus tabularis aequetur decimae parti ipsius numeri.*

Quia de logarithmis tabularibus quaestio instituitur, erit $k = 0{,}4342944819032 5$, atque ob $n = 10$ habebitur $kn = 4{,}342944819032 5$. Facto iam $x = 1$, erit $y = 1$, fietque $f = 1 + \frac{1}{3{,}3429} + \frac{2{,}1714724}{(3{,}3429)^3} - \&c.$ sicque proxime erit $f = 1{,}37$. Statuatur ergo $x = 1{,}37$, erit $lx = 0{,}136720567156406$, & ob $y = x - 10lx$, erit $y = 0{,}00279432843503$, & $-x + kn = 2{,}9729448190325$. Fiat ergo

$$\begin{aligned} lx &= 0{,}1367205 \\ ly &= 7{,}4462773 \\ \hline &\ 7{,}5829978 \\ l(kn-x) &= 0{,}4731866 \\ \hline &\ 1{,}1098112 \end{aligned} \qquad \frac{-xy}{x-kn} = 0{,}00128769.$$

De-

Deinde cum sit tertius terminus $\frac{knxyy}{2(x-kn)^3} = \frac{kny}{2(x-kn)^2} \cdot \frac{xy}{x-kn}$ erit:

$$l\frac{-xy}{x-kn} = 7,1098112$$
$$ly = 7,4462773$$
$$lkn = 0,6377842$$
$$\overline{5,1938527}$$
$$l(kn-x)^2 = 0,9463732$$
$$\overline{4,2474995}$$
$$l2 = 0,3010300$$
$$\overline{}$$
$$l\,\text{tert. term.} = 3,9464695$$
$$\text{I. term. } x = 1,37$$
$$\text{II. term.} = 0,00128769$$
$$\text{III. term.} = 0,00000088$$
$$\overline{}$$
$$f = 1,37128857$$
$$lf = 0,137128857.$$

243. Si aequatio fuerit exponentialis, ea ad logarithmicam reduci poterit; ita si quaeratur valor ipsius x, vt sit $x^x = a$, erit $x\,lx = la$. Quare posito $y = x\,lx - la$, fiet $dy = dx\,lx + dx$, & $\frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1+lx}$. Tumque

$dp =$

$$dp = \frac{-dx}{x(1+lx)^2}; \quad \& \quad \frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1+lx)^3}$$

$$dy = \frac{dx}{xx(1+lx)^3} + \frac{3\,dx}{xx(1+lx)^4}, \quad \text{ideoque}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{xx(1+lx)^4} + \frac{3}{xx(1+lx)^5}; \quad \text{porro erit}$$

$$dr = \frac{-2\,dx}{x^3(1+lx)^4} - \frac{10\,dx}{x^3(1+lx)^5} - \frac{15\,dx}{x^3(1+lx)^6}; \quad \text{ergo}$$

$$s = \frac{-2}{x^3(1+lx)^5} - \frac{10}{x^3(1+lx)^6} - \frac{15}{x^3(1+lx)^7}, \quad \&$$

$$t = \frac{6}{x^4(1+lx)^6} + \frac{40}{x^4(1+lx)^7} + \frac{105}{x^4(1+lx)^8} + \frac{105}{x^4(1+lx)^9}$$

$$u = \frac{-24}{x^5(1+lx)^7} - \frac{196}{x^5(1+lx)^8} - \frac{700}{x^5(1+lx)^9} - \frac{1260}{x^5(1+lx)^{10}} - \frac{945}{x^5(1+lx)^{11}}.$$

Hinc ergo ſi verus valor ipſius x ſit $= f$, ita vt ſit $ff = a$; erit:

$$f = x - \frac{y}{(1+lx)} - \frac{yy}{2x(1+lx)^3} - \frac{y^3}{2xx(1+lx)^5} - \frac{5y^4}{8x^3(1+lx)^7} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^9}$$

$$- \frac{y^3}{6x^2(1+lx)^4} - \frac{5y^4}{12x^3(1+lx)^6} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^8}$$

$$- \frac{y^4}{12x^3(1+lx)^5} - \frac{y^5}{3x^4(1+lx)^7}$$

$$- \frac{y^5}{20x^4(1+lx)^6}$$

&c.

Haec

Haec ergo expreſſio in infinitum continuata, quicunque valor pro x ſtatuatur, ſumto $y = x\,lx - la$ verum ipſius f dabit valorem. Sic ſi ponatur $x = 1$, erit $y = -la$, &

$$f = 1 + la - \frac{(la)^2}{2} + \frac{2(la)^3}{3} - \frac{9(la)^4}{8} + \frac{32(la)^5}{15} - \frac{625(la)^6}{144} - \&c.$$

vbi notandum eſt eſſe la logarithmum hyperbolicum ipſius a.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus f, *vt ſit* $ff = 100$.

Cum ſit $a = 100$, & $y = x\,lx - la = x\,lx - l100$, quia patet eſſe $f > 3$ & < 4, ſtatuatur

$x = \frac{7}{2}$; eritque $lx = 1,25276296849$

$x\,lx = 4,38467034972$

$l100 = 4,60517018599$

$y = -0,22049983627$

$1 + lx = 2,25276296849$

Hinc erit logarithmis vulgaribus adhibendis:

$l{-y} = 9,3434083$

$l(1+lx) = 0,3527156$

$8,9906927$; $\frac{-y}{1+lx} = 0,0978797$

$ly^2 = 8,6868166$

$3l(1+lx) = 1,0581468$

$= 7,6286698$

$l2x = l7 = 0,8450980$

$6,7835718$ $\frac{y^2}{2x(1+lx)^3} = 0,0006075$

Ergo proxime erit $f = 3,5972722$

ſequentibus vero inſuper terminis

ſumtis erit $f = 3,5972852$

244. Praeterea autem calculus differentialis insignem habet vsum in resolutione aequationum, si quaepiam relatio, quae inter radices intercedit, fuerit cognita. Sit proposita aequatio $y = 0$, in qua sit y functio quaecunque ipsius x. Si iam verbi gratia constet, duas huius aequationis radices inter se differre quantitate data a, hae duae radices facile inuenientur sequenti modo. Denotet x harum duarum radicum minorem, erit maior $= x + a$, quare cum functio y euanescat, si x significet vnam ex radicibus aequationis $y = 0$, euanescet quoque y, si loco x ponatur $x + a$. Quocirca erit:

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{6dx^3} + \&c.$$

Vnde cum sit $y = 0$ erit quoque

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{addy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{a^3 d^4 y}{24dx^4} + \&c.$$

quae duae aequationes simul sumtae per methodum eliminationis dabunt valorem illius radicis x, quam alia radix superat quantitate a.

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio

$$x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0,$$

quam vndecunque constet, habere duas radices vnitate differentes.

Posito

Posito $y = x^5 - 24x^3 + 49xx - 36$ erit:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 72x^2 + 98x$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 72x + 49$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = 10x^2 - 24$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = 5x$$

$$\frac{d^5y}{120dx^5} = 1$$

Jam ob $a = 1$ erit:

A . . . $5x^4 + 10x^3 - 62x^2 + 31x + 26 = 0$. At est

B . . . $x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0$.

Multiplicetur superior per x & inferior per 5, alteraque ab altera subtracta relinquet:

$10x^4 + 58x^3 - 214x^2 + 26x + 180 = 0$ seu

C . . . $5x^4 + 29x^3 - 107x^2 + 13x + 90 = 0$

a qua prima A subtracta relinquet:

D . . . $19x^3 - 45x^2 - 18x + 64 = 0$

D.$5x$ . . . $95x^4 - 225x^3 - 90x^2 + 320x = 0$

A.19 . . . $95x^4 + 190x^3 - 1178x^2 + 589x + 494 = 0$

E . . . . $415x^3 - 1088x^2 + 269x + 494 = 0$

D.415 . . . . $7885x^3 - 18675x^2 - 7470x + 26560 = 0$

E. 19 . . . . $7885x^3 - 20672x^2 + 5111x + 9386 = 0$

F . . . . $1997x^2 - 12581x + 17174 = 0$

$$
\begin{array}{lr}
D.247 \; \ldots & 4693x^3 - 11115x^2 - 4446x + 15808 = 0 \\
E.\; 32 \; \ldots & 13280x^3 - 34816x^2 + 8608x + 15808 = 0 \\
\hline
 & 8587x^3 - 23701x^2 + 13054x = 0 \\
\hline
G \; \ldots\ldots\ldots & 8587x^3 - 23701x + 13054 = 0 \\
F.8587 \; \ldots & 17148239x^2 - 108033047x + 147473138 = 0 \\
G.1997 \; \ldots & 17148239x^2 - 47330897x + 26068838 = 0 \\
\hline
 & 60702150x - 121404300 = 0
\end{array}
$$

Ex qua aequatione sequitur $x = 2$, ac propterea quoque radix aequationis erit $x = 3$, quorum vterque valor aequationis satisfacit.

245. Potest autem haec operatio absolui fine subsidio calculi differentialis, propterea quod eadem aequatio, quam calculus differentialis suppeditauit, prodit si in ipsa aequatione proposita ponatur $x + a$ loco x. Ceterum vero haec methodus eliminandi nimium est operosa, &, si aequationes essent altioris gradus, labor penitus foret insuperabilis; ex quo multo minus in aequationibus transcendentibus locum habere potest. Quod si autem ponamus duas aequationis propositae $y = 0$ radices inter se esse aequales, tum ob $a = 0$, aequatio differentialis abit in hanc $\frac{dy}{dx} = 0$. Quoties ergo quaepiam aequatio $y = 0$ habuerit duas radices aequales, toties erit $\frac{dy}{dx} = 0$; atque hae duae aequationes coniunctae praebebunt eum ipsius x valorem, cui binae radices sunt aequa-

aequales. Vnde viciſſim ſi ambae aequationes $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ communem habeant radicem, ea erit radix duplex aequationis $y = 0$. Euenit autem hoc, ſi poſtquam quantitas x ope duarum iſtarum aequationum $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ penitus fuerit eliminata, perueniatur ad aequationem identicam. Sic ſi proponatur aequatio:

$$x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$$

erit quoque $3xx - 4x - 4 = 0$, cuius duplum ad eam additum dat $x^3 + 4xx - 12x = 0$ ſeu $xx + 4x - 12 = 0$ cuius triplum eſt $3xx + 12x - 36 = 0$

ſubtrahatur $3xx - 4x - 4 = 0$

$$16x - 32 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

Cum ergo prodierit $x = 2$, ſubſtituatur hic valor in vna praecedentium $3xx - 4x - 4 = 0$, & prodibit aequatio identica $12 - 8 - 4 = 0$, vnde colligitur aequationem propoſitam $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$ duas habere radices aequales, nempe 2.

246. Si igitur habeatur aequatio algebraica quotcunque dimenſionum:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

quae duas habeat radices inter ſe aequales, erit quoque

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \&c. = 0.$$

Scilicet illius aequationis radix duplex ſimul erit radix iſtius aequationis. Multiplicetur illa per n, ab eaque haec per x multiplicata ſubtrahatur, prodibitque haec noua aequatio:

$$Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} + \&c. = 0.$$

Nunc addantur prima per a & haec per b multiplicata erit:

$$ax^{n} + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

quae aequatio cum ipſa propoſita coniuncta monſtrabit radices aequales, ſi quas habet propoſita. Cum igitur quantitates a & b pro lubitu aſſumi queant, coefficientes a, $a+b$, $a+2b$, &c. progreſſionem quamcunque arithmeticam repraeſentant. Quamobrem ſi aequatio quaecunque habeat duas radices aequales, eae inuenientur, ſi ſinguli aequationis propoſitae termini multiplicentur per terminos cuiusuis progreſſionis arithmeticae reſpectiue; noua enim aequatio hoc modo reſultans eam radicem, quae in propoſita bis ineſt, quoque continebit. Sic aequatio:

$$x^{n} + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

ſi eius termini multiplicentur per progreſſionem arithmeticam hanc:

$$a; \quad a+b; \quad a+2b; \quad a+3b; \quad a+4b; \quad \&c.$$

prodibit noua aequatio haec:

$$ax^{n} + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

quae cum illa coniuncta radices aequales oſtendet. Haecque eſt regula ſatis cognita inueniendi radices aequales cuiuscunque aequationis.

247.

247. Si aequatio $y = 0$ tres habeat radices aequales non solum erit $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam erit $\frac{ddy}{dx^2} = 0$; si quidem pro x statuatur eius radicis valor, quae in aequatione $y = 0$ ter inest. Ad hoc ostendendum ponamus aequationem $y = 0$ tres habere radices huiusmodi x, $x + a$, & $x + b$, quae primum interuallis finitis a & b a se inuicem discrepent; & quia y euanescit, si loco x tam $x + a$, quam $x + b$ scribatur, erit:

$$y = 0$$

$$y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2\,ddy}{2\,dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{6\,dx^3} + \frac{a^4\,d^4y}{24\,dx^4} + \&c. = 0$$

$$y + \frac{b\,dy}{dx} + \frac{b^2\,ddy}{2\,dx^2} + \frac{b^3\,d^3y}{6\,dx^3} + \frac{b^4\,d^4y}{24\,dx^4} + \&c. = 0$$

a quibus binis posterioribus si prima subtrahatur erit:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a\,ddy}{2\,dx^2} + \frac{a^2\,d^3y}{6\,dx^3} + \frac{a^3\,d^4y}{24\,dx^4} + \&c. = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{2\,dx^2} + \frac{b^2\,d^3y}{6\,dx^3} + \frac{b^3\,d^4y}{24\,dx^4} + \&c. = 0$$

Subtrahantur quoque hae a se inuicem, diuisioneque per $a - b$ facta erit:

$$\frac{ddy}{2\,dx^2} + \frac{(a+b)\,d^3y}{6\,dx^3} + \frac{(aa+ab+bb)\,d^4y}{24\,dx^4} + \&c. = 0.$$

Ponatur iam $a = 0$ & $b = 0$, ita vt tres illae radices inter se sint aequales, eritque ob terminos euanescentes:

$$y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = 0.$$

248.

248. Quoties ergo aequatio $y = 0$, tres habent radices aequales puta f, f, f, tum ista quantitas f erit quoque radix non solum huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam huius $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Hinc manifestum est, cum f sit radix communis aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, & eius differentialis $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, eam in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, bis inesse debere, per ea quae ante de binis radicibus aequalibus ostendimus. Quare si aequatio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

tres contineat radices aequales f, f, f, si eius termini per terminos progressionis arithmeticae cuiusuis multiplicentur, tum aequatio resultans binas habebit radices aequales f & f: quamobrem ea denuo per progressionem arithmeticam quamcunque multiplicari poterit, vt prodeat aequatio eandem radicem f semel complectens. Obtinebuntur ergo tres aequationes communem radicem f habentes, ex quarum combinatione haec ipsa radix facile elicietur. Si enim eiusmodi progressiones arithmemeticae eligantur, quarum vel primus vel vltimus terminus sit $= 0$, tum aequatio prodibit vno gradu inferior, sicque eliminatio eo facilior euadet.

249. Simili modo ostendetur, si aequatio $y = 0$ quatuor habeat radices aequales f, f, f, f, tum posito $x = f$ non

non ſolum fieri $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, & $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, ſed etiam fore $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$. Scilicet vti aequatio $y = 0$ quater continet radicem $x = f$; ita aequatio $\frac{dy}{dx}$ eandem radicem ter; aequatio vero $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ bis, & aequatio $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$ ſemel complectetur. Hoc quoque facilius perſpicietur, ſi perpendamus functionem y hoc caſu huiusmodi formam $(x-f)^4 X$ habere debere, denotante x functionem quamcunque ipſius x. Hac forma aſſumta erit: $\frac{dy}{dx} = (x-f)^3 \left(4X + \frac{(x-f)dX}{dx}\right)$, ideoque per $(x-f)^3$ diuiſibilis. Similiter porro habebit $\frac{ddy}{dx^2}$ factorem $(x-f)^2$, & $\frac{d^3 y}{dx^3}$ factorem $x-f$; ex quo perſpicuum eſt, ſi radix $x = f$ in aequatione $y = 0$ quater inſit, eam in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ter, in aequatione $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ bis, atque in $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$ ſemel adhuc ineſſe debere.

CAPUT X.

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

250.

Si functio ipsius x ita fuerit comparata, vt crescentibus valoribus x ipsa continuo crescat vel decrescat, tum ista functio nullum habebit valorem maximum minimumve. Quicunque enim huius functionis valor consideretur, sequentes erunt maiores, praecedentes vero minores. Huiusmodi functio est $x^3 + x$, cuius valor crescentibus x continuo crescit, decrescentibus vero x, continuo decrescit; maximum ergo haec functio valorem alium induere nequit, nisi ipsi x valor maximus, hoc est infinitus tribuatur; similique modo minimum obtinebit valorem, si ponatur $x = -\infty$. Nisi autem functio ita fuerit comparata, vt crescente x continuo crescat decrescatue, maximum vel minimum alicubi habebit valorem; hoc est eiusmodi valorem, qui sit vel maior vel minor, quam antecedentes & sequentes. Sic ista functio $xx - 2x + 3$ minimum valorem induit, si ponatur $x = 1$, quicunque enim alius valor ipsi x tribuatur, perpetuo functio maiorem adipiscetur valorem.

251. Quo autem natura maximorum ac minimorum clarius perspiciatur, ponamus y eiusmodi esse functionem ipsius x, quae maximum obtineat valorem, si ponatur $x = f$; atque intelligitur, si x ponatur siue maius

ius ſiue minus quam f, tum valorem ipſius y inde oriundum minorem fore illo, quem induit ſi ponatur $x = f$. Simili modo, ſi poſito $x = f$, functio y minimum obtineat valorem, neceſſe eſt vt, ſiue x ponatur maius quam f ſiue minus, ſemper maior ipſius y valor reſultet: haecque eſt definitio maximorum & minimorum abſolutorum. Praeterea autem quoque functio y maximum valorem recipere dicitur poſito verbi gratia $x = f$, dummodo iſte valor maior fuerit quam proximi ſiue ſequentes ſiue antecedentes, qui oriuntur, ſi x aliquantillum ſiue maius ſiue minus quam f ſtatuatur; etiamſi aliis valoribus loco x ſubſtituendis functio y maiores forte valores recipiat. Similiter functio y minimum valorem recipere dicitur poſito $x = f$, dummodo ille valor minor fuerit iis, quos induit, ſi loco x valores proxime ſiue maiores ſiue minores quam f ſubſtituantur. Atque in hac poſteriori ſignificatione iſtis maximorum & minimorum vocabulis vtemur.

252. Antequam autem modum oſtendamus haec maxima & minima inueniendi, notari conuenit hanc inveſtigationem proprie in iis tantum ipſius x functionibus locum habere, quas ſupra vniformes vocauimus, & quae ſunt ita comparatae, vt pro ſingulis ipſius x valoribus ſingulos pariter valores recipiat. Biformes autem & multiformes functiones vocauimus, quae pro ſingulis valoribus ipſius x binos pluresue valores inducunt, cuiusmodi functiones ſunt radices aequationum quadraticarum & plurium dimenſionum. Si igitur y huiusmodi fuerit functio ipſius x vel biformis vel multiformis, tum proprie

dici nequit, eam posito $x = f$ valorem siue maximum siue minimum induere: quoniam enim posito $x = f$ vel duos pluresue valores simul obtinet, atque praecedentes aeque ac sequentes sint numero plures, diiudicatio maximi minimiue non tam facile instituitur: nisi forte omnes functionis y valores, qui singulis ipsius x valoribus respondent, sint imaginarii praeter vnum; quo casu huiusmodi functiones speciem functionum vniformium mentiuntur. Primum ergo functiones vniformes harumque speciem mentientes contemplabimur, tum vero quomodo iudicium ad multiformes accommodari debeat, indicabimus.

253. Sit igitur y functio ipsius x vniformis, quae propterea, quicunque valor pro x substituatur, semper vnum recipiat valorem realem, denotetque x eum valorem, qui functioni y maximum minimumue valorem inducat. Priori ergo casu, siue loco x substituatur $x + \alpha$ siue $x - \alpha$, valor ipsius y minor erit, quam si $\alpha = 0$, posteriori vero casu maior. Cum igitur posito $x + \alpha$ loco x functio y abeat in

$$y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

at posito $x - \alpha$ loco x in

$$y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

ne-

necesse est vt casu maximi sit

$$y > y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c. \quad \&$$

$$y > y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

In casu autem, quo valor ipsius y sit minimus erit:

$$y < y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

$$y < y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

254. Quoniam haec euenire debent, si α denotet quantitatem minimam, statuamus α tam paruum, vt eius potestates altiores reiici queant; debebitque tam pro casu maximi quam minimi esse $\frac{\alpha dy}{dx} = 0$. Nisi enim $\frac{\alpha dy}{dx}$ esset $= 0$, neque valor ipsius y maximus neque minimus esse posset. Hinc tam pro maximis quam pro minimis inuestigandis haec habetur regula communis, vt differentiale propositae y nihilo aequale ponatur, eritque ille ipsius x valor, qui functionem reddit vel maximam vel minimam, radix istius aequationis. Vtrum vero valor hoc modo inuentus ipsius y futurus sit maximus an minimus, incertum relinquitur; quin etiam fieri potest, vt y neque maximum neque minimum sit futurum: tantum enim inuenimus vtroque casu fore $\frac{dy}{dx} = 0$, ne-

que viciſſim affirmauimus, quoties ſit $\frac{dy}{dx} = 0$, toties quoque valorem pro y prodire vel maximum vel minimum.

255. Interim tamen ad caſus, quibus valor ipſius y vel maximus vel minimus euadat, inueſtigandos haec prima operatio inſtituenda eſt, vt differentiale functionis propoſitae nihilo aequetur, atque ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ omnes ipſius x valores eliciantur. Quibus inuentis deinceps diſpiciendum erit, vtrum iis functio y maximum induat valorem, an minimum, an neutrum? oſtendemus enim fieri poſſe, vt neque maximum neque minimum locum habeat, etiamſi ſit $\frac{dy}{dx} = 0$. Sit f valor ſeu vnus ex valoribus ipſius x, quem obtinet ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, hicque valor ſubſtituatur in expreſſionibus $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. fiatque hac ſubſtitutione $\frac{ddy}{dx^2} = p$; $\frac{d^3y}{dx^3} = q$; $\frac{d^4y}{dx^4} = r$ &c. Abeat autem functio ipſa y poſito f loco x in F, atque ſi loco x ponatur $f + \alpha$, iſta functio abibit in

$$F + \frac{1}{2}\alpha^2 p + \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r + \&c.$$

ſin autem loco x ponatur $f - \alpha$ prodibit

$$F + \frac{1}{2}\alpha^2 p - \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r - \&c.$$

vnde

vnde patet, ſi p fuerit quantitas affirmatiua, vtrumque valorem maiorem fore quam F, ſaltem ſi α quantitatem valde paruam denotet, ac propterea valorem F, quem functio y induit poſito $x = f$, fore minimum. Sin autem p ſit quantitas negatiua, tum valor $x = f$ functioni y inducet valorem maximum.

256. Quodſi autem fuerit $p = 0$, tum ſpectari debet valor ipſius q, qui ſi non fuerit $= 0$, valor ipſius y neque maximus erit neque minimus; nam poſito $x = f + \alpha$ erit $F + \frac{1}{6}\alpha^3 q > F$ & poſito $x = f - \alpha$ erit $F - \frac{1}{6}\alpha^3 q < F$. Sin autem quoque fuerit $q = 0$, ad quantitatem r erit reſpiciendum, quae ſi habuerit valorem affirmatiuum valor functionis F, quem recipit poſito $x = f$, erit minimum; ſin autem r habeat valorem negatiuum, erit F maximum. At ſi quoque r euaneſcat iudicium ex ſequentis litterae s valore erit petendum, quod ſimile erit illi, quod ex littera q formauimus. Scilicet ſi s non fuerit $= 0$, functio F neque maximum erit neque minimum; ſin autem ſit quoque $s = 0$, tum ſequens littera t, ſi habeat valorem affirmatiuum indicabit minimum, ſin autem habeat valorem negatiuum, indicabit maximum. Verum ſi & haec littera t euaneſcat, tum in iudicando vlterius eſt procedendum eodem prorſus modo, quo in caſibus praecedentibus ſumus vſi. Sicque de qualibet radice aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ indagabitur, vtrum functioni y inducat valorem maximum an mini-

minimum, an neutrum; atque hoc modo omnia maxima & minima, quae quidem functio y recipere potest, inuenientur.

257. Si ergo aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ duas radices habeat aequales, ita vt factorem habeat quadratum $(x - f)^2$, tum posito $x = f$ simul $\frac{ddy}{dx^2}$ euanescet, eritque $p = 0$, non autem q. Hoc ergo casu functio y neque maximum neque minimum valorem induet. Sin autem aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ tres radices habeat aequales, seu $\frac{dy}{dx}$ factorem cubicum $(x - f)^3$, tum posito $x = f$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ & $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; non autem $\frac{d^4y}{dx^4}$. Huius ergo termini valor si fuerit affirmatiuus indicabit minimum, sin negatiuus, maximum. Judicium ergo ante explicatum huc redit, vt si expressio $\frac{dy}{dx}$ factorem habuerit $(x-f)^n$, existente n numero impari, functio y, si in ea ponatur $x = f$, valorem sit acceptura vel maximum vel minimum; sin autem exponens n fuerit numerus par, tum substitutio $x = f$ neque maximum neque minimum valorem producat.

258. Deinde inuentio maximi ac minimi saepenumero non mediocriter adiuuabitur sequentibus considerationibus. Quibus scilicet casibus functio y fit maximum vel minimum, iisdem casibus fiet quoduis eius multiplum ay, si qui-

quidem a fuerit quantitas affirmatiua, itemque y^3, y^5, y^7, &c. atque generaliter ay^n, ſi quidem n fuerit numerus affirmatiuus impar, pariter maximum vel minimum; quoniam huiusmodi formulae ita ſunt comparatae, vt creſcente y creſcant, & decreſcente y decreſcant. Quibus autem caſibus fit y maximum vel minimum, iisdem caſibus $-y$, $-ay$, $b-ay$, & generaliter $b-ay^n$ exiſtente n numero affirmatiuo impari, fiet ordine inverſo vel minimum vel maximum. Similiter quibus caſibus y fit maximum vel minimum, iisdem caſibus formulae hae $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{y^3}$, $\frac{a}{y^5}$, & generaliter $\frac{a}{y^n} \pm b$, denotante a quantitatem affirmatiuam & n numerum affirmatiuum imparem, fient inuerſo ordine vel minimum vel maximum; ſin autem a fuerit quantitas negatiua, tum iſtae formulae maximum impetrabunt valorem, ſi y fuerit maximum, & minimum, ſi y ſit minimum.

259. Ad poteſtates autem pares haec non item traduci poſſunt: quoniam enim, ſi y valores recipit negatiuos, eius poteſtates pares y^2, y^4, &c. valores affirmatiuos inducunt, fieri poteſt, vt dum y minimum valorem negatiuum ſcilicet recipit, eius poteſtates pares fiant maxima. Huius igitur conditionis ratione habita affirmare poterimus, ſi y fuerit maximum vel minimum, exiſtente eius valore affirmatiuo, tum eius poteſtates pares y^2, y^4, &c. quoque fore maxima vel minima. Sin autem valor ipſius y negatiuus fuerit maximum, tum eius quadratum yy accepturum eſſe valorem minimum, & contra ſi valor

ipſius y negatiuus ſit minimum, tum y^2, y^4, &c. fore maximum. Quodſi vero exponentes ipſius y pares fuerint negatiui, tum contrarium eueniet. Ceterum quae hic de exponentibus paribus & imparibus annotauimus, ea non ſolum pro numeris integris valent, ſed etiam pro fractis, quorum denominatores ſunt numeri impares; in hoc enim negotio fractiones $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, &c. numeris imparibus, at $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, &c. numeris paribus aequiualent.

260. Sin autem denominatores fuerint numeri pares, tum, quoniam ſi y negatiuum habet valorem, eius poteſtates $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{4}}$; &c. fiunt imaginariae; hoc tantum de iis affirmari poterit, ſi valor ipſius y affirmatiuus fuerit maximum vel minimum, tum quoque $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{2}}$; $y^{\frac{1}{4}}$; &c. fore pariter vel maxima vel minima; contra autem $y^{-\frac{1}{2}}$, $y^{-\frac{3}{2}}$, $y^{-\frac{1}{4}}$, &c. minima vel maxima. Quia autem haec irrationalia ſimul geminos valores habent, alterum affirmatiuum, alterum negatiuum, de negatiuis contrarium erit tenendum, quod hic de affirmatiuis diximus. Sin autem valor ipſius y negatiuus euadat maximum vel minimum, tum quia huiusmodi poteſtates omnes fiunt imaginariae, neque maximis neque minimis annumerari poterunt. His igitur ſubſidiis inueſtigatio maximi & minimi ſaepe admodum reddetur facilis, quae alias futura eſſet vehementer difficilis.

261. Quoniam haec proprie ad functiones rationales, quippe quae sunt solae uniformes, pertinent, primum functiones integras euoluamus, atque maxima minimaque quae in ipsis occurrunt indagemus. Cum igitur huiusmodi functiones ad hanc formam referantur:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c.$$

primum patet earum valorem maiorem fieri non posse, quam si ponatur $x = \infty$; tum vero si $x = -\infty$ valor huius formulae prodit $= \infty^n$, si n sit numerus par, at $-\infty^n$ si n sit numerus impar, qui propterea valor erit omnium minimus. Dantur autem praeterea saepe alia maxima & minima eo sensu, quem his vocibus attribuimus, quae sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire valores ipsius x, *quibus haec functio* $(x-a)^n$ *sit maximum vel minimum.*

Posito $(x-a)^n = y$, erit $\frac{dy}{dx} = n(x-a)^{n-1}$, quo posito $= 0$, fiet $x = a$. Cum igitur $\frac{dy}{dx}$ factorem habeat $(x-a)^{n-1}$, ex §. 257. intelligitur y maximum minimumue esse non posse, nisi sit $n-1$ numerus impar, seu n numerus par. Quia autem dum fit

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1$$

hoc est numerus affirmatiuus, sequitur, valorem ipsius y posito $x = a$ prodituram esse minimum. Quod quidem

facile patet; nam poſito $x = a$ fit $y = 0$; & ſi x ponatur vel maius vel minus quam a, ob n numerum parem, accipiet y valorem poſitiuum hoc eſt nihilo maiorem; ſin autem n fuerit numerus impar, tum functio $y = (x-a)^n$ neque maximum neque minimum admittit. Perſpicuum autem porro eſt hoc idem valere, ſi n fuerit numerus fractus ſiue impar ſiue par. Scilicet $(x-a)^{\frac{\mu}{\nu}}$ fiet poſito $x = a$ minimum, ſi μ fuerit numerus par & ν impar; ſin autem vterque fuerit impar, neque maximum dabitur neque minimum.

EXEMPLUM II.

Inuenire caſus quibus valor huius formulae $xx + 3x + 2$ *fit maximum vel minimum.*

vid. pag. 129

Ponatur $xx + 3x + 2 = y$, erit $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$. Statuatur ergo $2x + 3 = 0$, fiet $x = -\frac{3}{2}$; qui caſus vtrum maximum an minimum producat, cognoſcetur ex valore $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$, qui cum ſit affirmatiuus, quicquid ſit x, indicat minimum. Poſito autem $x = -\frac{3}{2}$ fit $y = -\frac{1}{4}$, & ſi alii quicunque valores ipſi x tribuantur, valor ipſius y inde oriundus perpetuo maior erit quam $-\frac{1}{4}$. Ex natura quoque ipſius formulae $xx + 3x + 2$ perſpicitur, eam minimum valorem habere debere; nam cum in infinitum excreſcat ſiue ponatur $x = +\infty$ ſiue $x = -\infty$, neceſſe eſt, vt quiſpiam valor ipſius x ipſi y omnium minimam quantitatem inducat.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Inuenire casus, quibus expressio haec $x^3 - axx + bx - c$ *maximum minimumue valorem accipit.*

Posito $y = x^3 - axx + bx - c$; erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b$ & $\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - a$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$. Statuatur ergo $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b = 0$; erit $x = \frac{a \pm \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$, ex quo intelligitur, nisi sit $aa > 3b$, formulam propositam neque maximum neque minimum esse habituram. Sin autem sit $aa > 3b$, duobus casibus fit maximum vel minimum. Hinc vero oritur $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm\sqrt{(aa - 3b)}$, vnde intelligitur nisi sit $aa = 3b$, valorem $x = \frac{a + \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ reddere formulam $y = x^3 - axx + bx - c$ minimam, alterum vero $x = \frac{a - \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ maximam. Quanti autem futuri isti sint ipsius y valores, cum sit $3xx - 2ax + b = 0$ seu $x^3 - \frac{2}{3}axx + \frac{1}{3}bx = 0$; erit $y = -\frac{1}{3}axx + \frac{2}{3}bx - c$ & ob $\frac{1}{3}axx - \frac{2aa}{9}x + \frac{ab}{9} = 0$, fit $y = \frac{2}{9}(3b - aa)x + \frac{ab}{9} - c = -\frac{2a(aa-3b)}{27} \mp \frac{2(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}}{27} + \frac{ab}{9} - c$, siue $y = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}}$, vbi signum superius valet pro minimo, inferius autem

 pro

pro maximo. Reſtat ergo caſus quo $aa = 3b$, in quo cum fiat $\frac{ddy}{dx^3} = 0$, ſequens vero terminus $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$, non ſit $= 0$, ſequitur hoc caſu formulam propoſitam neque maximum neque minimum eſſe recepturam.

EXEMPLUM. IV.

Inuenire caſus quibus haec functio ipſius x;

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

ſit maximum vel minimum.

Poſito $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$; erit

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 6x^2 - 24x + 22$$

Statuatur nunc $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$ ſeu $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, orientur tres valores reales pro x; I. $x = 1$; II. $x = 2$; III. $x = 3$. Ex primo valore fit $\frac{ddy}{2dx^2} = 4$, ideoque poſito $x = 1$ functio propoſita fit minimum. Ex ſecundo valore $x = 2$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = -2$, ideoque functio propoſita maximum. Ex tertio valore $x = 3$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = +4$, ideoque functio propoſita iterum minimum.

EXEM-

EXEMPLUM V.

Proposita sit haec functio $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, *quae, quibus casibus fiat maximum minimumue quaeritur.*

Cum sit $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$, formetur aequatio $x^4 - 4x^3 + 3xx = 0$, cuius radices sunt I. & II. $x = 0$; III. $x = 1$; IV. $x = 3$. Quoniam prima & secunda radices sunt aequales, ex iis neque maximum neque minimum sequitur, fit enim $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, at $\frac{d^3y}{2dx^3}$ non euanescit. Tertia radix autem $x = 1$, ob $\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 30x^2 + 15x$ praebet $\frac{ddy}{2dx^2} = -5$, hocque ergo casu functio fit maximum. Ex quarta radice $x = 3$ fit $\frac{ddy}{2dx^3} = 45$, ideoque functio proposita minimum.

EXEMPLUM VI.

Inuenire casus quibus haec formula

$$y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$$

fit maximum vel minimum.

Erit ergo $\frac{dy}{dx} = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60x^2$, & $\frac{ddy}{60dx^2} = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x$. Formetur aequatio $x^5 - x^4 + x^3 - xx = 0$, quae cum in factores res resoluta sit $x^2(x-1)(xx+1) = 0$, duas habet radices

dices aequales $x = 0$, & praeterea radicem $x = 1$, duasque insuper ex $xx + 1 = 0$ imaginarias. Cum igitur binae radices aequales $x = 0$ neque maximum neque minimum exhibeant, tantum consideranda superest radix $x = 1$, ex qua fit $\frac{ddy}{60\,dx^2} = 2$, cuius valor affirmatiuus indicat minimum.

262. Determinatio ergo maximorum & minimorum pendet a radicibus aequationis differentialis $\frac{dy}{dx} = 0$, cuius potestas summa, cum sit vno gradu inferior quam in ipsa functione proposita y, si quidem haec fuerit functio rationalis integra: manifestum est si in genere proponatur haec functio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = y$$

eius maxima & minima determinari per radices huius aequationis:

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0.$$

Ponamus huius aequationis radices reales secundum ordinem quantitatis dispositas esse α, β, γ, δ, &c. ita vt α sit maxima $\beta < \alpha$, $\gamma < \beta$, &c. Ac primo quidem si hae radices omnes fuerint inaequales, vnaquaeque formulae propositae y inducet valorem maximum vel minimum; totque idcirco functio y habebit maxima vel minima, quo aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ habuerit radices reales inaequales. Sin autem duae pluresue radices inter se fuerint aequales, res ita se habebit, vt duae radices aequales

les neque maximum neque minimum exhibeant; ternae vero radices aequales vni aequiualeant: atque in genere ſi numerus radicum aequalium fuerit par, nullum inde reſultat maximum minimumue; ſin autem ſit impar, vnum inde oritur ſiue maximum ſiue minimum.

263. Quaenam autem radices maxima, & quae minima producant, ſine ſubſidio regulae ante traditae ita definiri poterit. Cum functio y poſito $x = \infty$ fiat pariter infinita, neque valores ipſius x intra limites ∞ & α, vllum producant ſiue maximum ſiue minimum; perſpicuum eſt valores functionis y, dum loco x ſucceſſiue valores ab ∞ vsque ad α ſubſtituantur, continuo decreſcere oportere; ideoque valor $x = \alpha + \omega$ functioni y maiorem valorem inducet, quam valor $x = \alpha$: vnde cum $x = \alpha$ maximum minimumue producat, neceſſe eſt, vt hoc caſu functio y fiat minimum. Vlterius ergo x diminuendo ſeu ponendo $x = \alpha - \omega$, valor ipſius y iterum creſcet, donec fiat $x = \beta$, quae eſt ſecunda aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ radix maximum minimumue producens: quare haec ſecunda radix $x = \beta$ maximum praebebit, & valor $x = \beta - \omega$ minorem efficiet functionem y, quam $x = \beta$, donec perueniatur ad $x = \gamma$, quae conſequenter iterum minimum generabit. Ex quo ratiocinio perſpicitur, radices aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ primam, tertiam, quintam, &c. minima, ſecundam autem, quartam, ſextam &c. maxima exhibere. Simul autem hinc intelligitur in caſu

duarum radicum aequalium maximum & minimum coalescere, sicque neutrum locum habere.

264. Si ergo in functione proposita

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c.$$

maximus exponens n fuerit numerus par, aequatio

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + \&c. = 0;$$

erit gradus imparis, ideoque vel vnam habebit radicem realem, vel tres, vel quinque, vel numero impares. Si vnica radix fuerit realis, ea dabit minimum; sin tres fuerint reales, maxima praebebit minimum, media maximum, & minima iterum minimum; & si quinque radices fuerint reales, functio y tria habebit minima & duo maxima; sicque porro. At si exponens n fuerit numerus impar, aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ ad gradum parem pertinebit, ideoque vel nullam habebit radicem realem, vel duas, vel quatuor, vel sex, &c. Primo casu functio y neque maximum habebit neque minimum: altero casu, quo duae dantur radices, earum maior minimum, minor autem maximum indicabit: quatuor autem radicum prima (quae est maxima) & tertia minimum, secunda vero & quarta maximum producunt. Perpetuo autem quotcunque radices fuerint reales, maxima & minima se mutuo alternatim insequuntur.

265. Progrediamur ad functiones rationales fractas, quibus altera species functionum vniformium constituitur.

Sit

Sit igitur $y = \frac{P}{Q}$, exiſtentibus P & Q functionibus quibuscunque ipſius x; ac primo quidem apparet, ſi ipſi x eiusmodi valor tribuatur, vt fiat $Q = 0$, niſi ſimul P euaneſcat, functionem y euadere infinitam, quod vtique maximum videatur. Nihilo vero minus iſte caſus pro maximo haberi nequit; cum enim fractio inuerſa $\frac{Q}{P}$ iisdem caſibus fiat minimum, quibus propoſita $\frac{P}{Q}$ fit maximum, deberet fractio $\frac{Q}{P}$ fieri minimum, ſi Q euaneſcit; hoc autem non ſemper euenit, propterea quod adhuc minores valores, negatiuos ſcilicet, induere poſſet. Hoc igitur dubio exemto, ſimul regula ante data confirmatur, quod maxima & minima ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ elici debeant. Fiet ergo caſu propoſito $\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$; ideoque $QdP - PdQ = 0$; huiusque aequationis radices efficient functionem y vel maximum vel minimum. Atque ſi dubium ſit, vtrum maximum an minimum locum habeat, confugiendum eſt ad valorem $\frac{ddy}{dx^2}$, qui ſi fuerit affirmatiuus minimum indicabit, ſin autem ſit negatiuus maximum. Quod ſi vero & hic valor $\frac{ddy}{dx^2}$ euaneſcat, quod euenit, ſi aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ habeat duas pluresue ra-

 dices

dices aequales; perpetuo tenendum eſt radices aequales numero pares neque maximum neque minimum producere.

EXEMPLUM I.

Inuenire caſus, quibus functio $\frac{x}{1+xx}$ *fit maximum vel minimum.*

Primum quidem apparet, hanc functionem in nihilum abire caſibus tribus $x = \infty$, $x = 0$ & $x = -\infty$, vnde ad minimum duo recipiet ſiue maxima ſiue minima. Ad quae inuenienda ponatur $y = \frac{x}{1+xx}$; eritque $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xx}{(1+xx)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{6x+2x^3}{(1+xx)^3}$. Jam ſtatuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $1 - xx = 0$, & vel $x = +1$ vel $x = -1$. Priori caſu $x = +1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4}{2^3}$; ideoque y maxim. $= \frac{1}{2}$, poſteriori $x = -1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = +\frac{4}{2^3}$; ideoque y minim. $= -\frac{1}{2}$. Haec quoque facilius inueniuntur, ſi fractio propoſita $\frac{x}{1+xx}$ inuertatur, ponendo $y = \frac{1+xx}{x} = x + \frac{1}{x}$, dummodo recordemur tum quae maxima inueniuntur. in minima & viciſſim transmutari debere. Erit autem $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{xx}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$. Statuto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, fit $xx - 1 = 0$, indeque vel $x = +1$ vel $x = -1$ vt ante.

Atque

Atque casu $x = + 1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, ideoque y minimum, & formula proposita $\frac{1}{y}$ maximum. Casu autem $x = - 1$, fit $\frac{ddy}{dx^2} = - 2$, vnde y maximum & $\frac{1}{y}$ minimum.

EXEMPLUM II.

Inuenire casus quibus formula $\frac{2 - 3x + xx}{2 + 3x + xx}$ *fit maximum vel minimum.*

Posito $y = \frac{xx - 3x + 2}{xx + 3x + 2}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 12}{(xx + 3x + 2)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = - \frac{12x^3 + 72x + 72}{(xx + 3x + 2)^3}$. Statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, fiet vel $x = + \sqrt{2}$ vel $x = - \sqrt{2}$. Priori casu $x = + \sqrt{2}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{48\sqrt{2} + 72}{(4 + 3\sqrt{2})^3}$, ideoque affirmatiuum, ob denominatorem affirmatiuum: hinc erit y minimum $= \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 17 = - 0,02943725$. Posteriori casu $x = - \sqrt{2}$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = - \frac{48\sqrt{2} + 72}{(4 - 3\sqrt{2})^3} = \frac{24(3 - 2\sqrt{2})}{(4 - 3\sqrt{2})^3}$, cuius valor ob numeratorem affirmatiuum & denominatorem negatiuum erit negatiuus, ideoque y fiet maximum $= \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} = - 12\sqrt{2} - 17 = - 33,97056274$. Qui valor etsi minor est quam prior minimus, tamen ideo est maximus, quod maior sit contiguis proximis, qui ori-

untur, si loco x vel aliquantillum maiores vel minores valores quam $-\sqrt{2}$ substituantur. Cum igitur $\sqrt{2}$ inter limites $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$ contineatur, probatio facile instituetur hoc modo:

si $x = \frac{4}{3}$ fit $y = -\frac{2}{70} = -0,0285$

si $x = \sqrt{2}$ fit $y = 12\sqrt{2} - 17 = -0,0294$ minimum

si $x = \frac{3}{2}$ fit $y = -\frac{1}{35} = -0,0285$

---

si $x = -\frac{4}{3}$ fit $y = -35$

si $x = -\sqrt{2}$ fit $y = -33,970$ maximum

si $x = -\frac{3}{2}$ fit $y = -35.$

EXEMPLUM III.

Inuenire casus, quibus formula $\frac{xx - x + 1}{xx + x - 1}$ *fit maximum vel minimum.*

Ponatur $y = \frac{xx - x + 1}{xx + x - 1}$, eritque $\frac{dy}{dx} = \frac{2xx - 4x}{(xx + x - 1)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4x^3 + 12xx + 4}{(xx + x - 1)^3}$. Statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, erit vel $x = 0$ vel $x = 2$: priori casu fit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4}{-1}$, ideoque erit y maximum $= -1$. Posteriori casu $x = 2$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{20}{5^3}$, ideoque y minimum $= \frac{3}{5}$, etiamsi illud maximum

ximum minus ſit quam hoc minimum. Probatio patebit ex his poſitionibus :

ſi $x = -\frac{1}{3}$; erit $y = -\frac{13}{11}$

ſi $x = 0$; . . $y = -1$ maximum

ſi $x = +\frac{1}{3}$; . . $y = -\frac{7}{5}$

ſi $x = 2-\frac{1}{3}$; erit $y = \frac{19}{31}$

ſi $x = 2$; . . $y = \frac{3}{5}$ minimum.

ſi $x = 2+\frac{1}{3}$; . . $y = \frac{37}{61}$

Quod autem, ſi ponatur $x = 1$, fiat $y = 1$, ideoque > -1, cauſa eſt, quod inter valores ipſius x, 0 & 1 contineatur vnus, quo fit $y = \infty$.

EXEMPLUM VI.

Quaerantur caſus, quibus haec fractio $\frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$ *fiat maxima vel minima.*

Poſito $y = \frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$, erit $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^6 - 4x^4 + 4xx + 1}{(x^4 - xx + 1)^2}$

& $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 + 18x^7 - 24x^5 - 16x^3 + 12x}{(x^4 - xx + 1)^3}$. Habebimus ergo hanc aequationem : $x^6 + 4x^4 - 4xx - 1 = 0$, quae reſoluitur in has duas : $xx - 1 = 0$ & $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$, quarum illius radices ſunt $x = +1$ & $x = -1$; haec vero

vero refoluta dat $xx = -\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, ex qua nulla radix realis emergit. Duarum igitur radicum inuentarum prior $x = +1$ facit $\frac{ddy}{dx^2} = -8$, ac propterea y maximum $= 2$; altera radix $x = -1$ facit $\frac{ddy}{dx^2} = +8$ ac propterea y minimum $= -2$.

EXEMPLUM V.

Inuenire cafus, quibus haec fractio $\frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$ *fit maximum vel minimum.*

Pofito $y = \frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$, erit $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 - 6x^7 - 18x^5 + 20x^3}{(x^4 - x^2 + 1)^3}$. Facto autem $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, quae diuifa per $xx + 1$ dat $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$, haecque vlterius refoluitur in $xx - x - 1 = 0$ & $xx + x - 1 = 0$, vnde fequentes quatuor oriuntur radices reales:

I. $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; II. $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

III. $x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; IV. $x = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Quae cum omnes in aequatione $x^4 - 3xx + 1 = 0$ contineantur, pofito $x^4 = 3xx - 1$ fiet pro omnibus

ddy

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x(10-20xx)}{8x^6} = \frac{5(1-2xx)}{2x^5} = \frac{5(1-2xx)}{2x(3xx-1)}$$

$$\& \quad y = \frac{x^3 - x}{2xx} = \frac{xx-1}{2x}.$$

Pro duabus autem prioribus ex aequatione $xx = x + 1$ ortis erit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2x+1)}{2x(3x+2)} = -\frac{5(2x+1)}{2(5x+3)}$, & $y = \frac{1}{2}$. Prima igitur radix $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2+\sqrt{5})}{11+5\sqrt{5}}$, ideoque est y maximum. Secunda radix $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; dat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2-\sqrt{5})}{11-5\sqrt{5}} = -\frac{5(\sqrt{5}-2)}{5\sqrt{5}-11}$; ideoque $y = \frac{1}{2}$ erit quoque maximum. Duae reliquae radices dant $y = -\frac{1}{2}$ minimum.

266. In his igitur exemplis exploratio, vtrum valor quispiam inuentus maximum an minimum producat, facilius institui poterit: cum enim sit $\frac{dy}{dx} = 0$, valor termini $\frac{ddy}{dx^2}$, eius aequationis ratione habita, simplicius exprimi poterit. Sit enim proposita fractio $y = \frac{P}{Q}$; cum sit $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$, & $QdP - PdQ = 0$; erit $ddy = \frac{d(QdP - PdQ)}{Q^2} - \frac{2dQ(QdP - PdQ)}{Q^3}$. At vero ob $QdP - PdQ = 0$ hic posterior terminus euanes-

 cit

cit, eritque $ddy = \frac{d.(QdP - PdQ)}{QQ} = \frac{QddP - PddQ}{Q^2}$; Quoniam vero iudicium ex huius termini valore siue affirmatiuo siue negatiuo petitur, denominator autem Q^2 perpetuo sit affirmatiuus; ex solo numeratore negotium ita confici poterit, vt quoties $QddP - PddQ$ seu $\frac{d(QdP - PdQ)}{dx^2}$ fuerit affirmatiuum, minimum pronuncietur, sin sit negatiuum maximum. Siue postquam inuentum fuerit $\frac{dy}{dx}$, cuius forma erit huiusmodi $\frac{R}{QQ}$, tantum quaeratur $\frac{dR}{dx}$; & quae radix huic expressioni valorem affirmatiuum inducit, ex ea proueniet minimum, & contra maximum.

267. Si denominator fractionis propositae fuerit quadratum seu altior potestas quaecunque, ita vt sit $y = \frac{P}{Q^n}$, fiet $dy = \frac{QdP - nPdQ}{Q^{n+1}}$, & posito $\frac{QdP - nPdQ}{dx} = R$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{Q^{n+1}}$; & maxima minimaque determinabuntur ex radicibus aequationis $R=0$. Cum deinde sit $\frac{ddy}{dx} = \frac{QdR - (n+1)RdQ}{Q^{n+2}}$, ob $R=0$, fiet $\frac{ddy}{dx} = \frac{dR}{Q^{n+1}}$; cuius valor affirmatiuus indicabit minimum, negatiuus autem maximum. Perspicuum autem est, si n fuerit numerus impar, ob Q^{n+1} semper affirmati-

matiuum, iudicium ex ſolo $\frac{dR}{dx}$ perfici poſſe; ſin autem n ſit numerus par, adhibeatur formula $\frac{QdR}{dx}$. Ponamus autem porro proponi huiusmodi fractionem $\frac{P^m}{Q^n} = y$, erit $dy = \frac{(mQdP - nPdQ)P^{m-1}}{Q^{n+1}}$; ſi itaque ponatur $\frac{mQdP - nPdQ}{dx} = R$, aequationis $R = 0$ radices indicabunt caſus, quibus functio y fit vel maximum vel minimum. Cum igitur ſit $\frac{dy}{dx} = \frac{P^{m-1}R}{Q^{n+1}}$, erit:

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{P^{m-2}R[(m-1)QdP - (n+1)PdQ]}{Q^{n+2}} + \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}},$$

& ob $R = 0$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx}$; quae inſuper per quodcunque quadratum $\frac{P^{2\mu}}{Q^{2\nu}}$ diuidi poteſt, ad iudicium abſoluendum. Praeterea vero quoque aequatio $P = 0$ dabit maximum vel minimum, ſi m fuerit numerus par; atque ſimili modo formulam inuerſam $\frac{Q^n}{P^m}$ ſpectando, prodibit maximum vel minimum ponendo $Q = 0$, ſi n fuerit numerus par, vti ſupra §. 257. oſtendimus: hic autem ad maxima vel minima hinc oriunda non reſpicimus, ſed tantum ad vſum methodi explicandum ea indagamus, quae oriuntur ex aequatione $R = 0$.

EXEMPLUM I.

Proponatur fractio $\frac{(\alpha+\beta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n}$, *quae, quo casu fiat maximum vel minimum, quaeritur.*

Posito $y=\frac{(\alpha+\beta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n}$, primo quidem patet fore $y=0$ si $x=-\frac{\alpha}{\beta}$, & $y=\infty$ si $x=-\frac{\gamma}{\delta}$: quorum casuum ille dabit minimum, hic vero maximum, si m & n fuerint numeri pares. Praeterea vero erit: $\frac{dy}{dx}=\frac{(\alpha+\beta x)^{m-1}}{(\gamma+\delta x)^{n+1}}[(m-n)\beta\delta x+m\beta\gamma-n\alpha\delta]$, ideoque $R=(m-n)\beta\delta x+m\beta\gamma-n\alpha\delta$. Quare posito $R=0$, erit $x=\frac{n\alpha\delta-m\beta\gamma}{(m-n)\beta\delta}$. Deinde ob $\frac{dR}{dx}=(m-n)\beta\delta$, dispiciendum est, vtrum

$$\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx}=\frac{m^{m-1}\beta^{n+1}}{n^{n+1}\delta^{m-1}}\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{m-n}\right)^{m-n-2}\frac{dR}{dx}$$

sit quantitas affirmatiua an negatiua? priori casu formula proposita erit minimum, posteriori maximum. Sic si fuerit $y=\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$, fiet $\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx}=\frac{9}{8}$, ideoque formula $\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ fiet minimum, si ponatur $x=0$. Sin autem sit $y=\frac{(x-1)^m}{(x+1)^n}$, erit $\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx}=\frac{m^{m-1}}{n^{n+1}}\left(\frac{n-m}{2}\right)^{n-m+2}(m-n)$, &

& $x = \frac{n+m}{n-m}$. Cum autem m & n ponantur numeri affirmatiui, iudicium petendum erit ex formula $(n-m)^{n-m+2}(m-n)$ seu $(n-m)^{n-m}(m-n)$. Si igitur fuerit $n > m$, valor erutus $x = \frac{n+m}{n-m}$ semper dabit maximum; sin autem sit $n < m$, numerus $m-n$ par dabit minimum, at impar, maximum: sic $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ fiet maximum posito $x = -5$; fit enim $y = -\frac{6^3}{4^2} = -\frac{27}{2}$.

EXEMPLUM II.

Proponatur formula $y = \frac{(1+x)^3}{(1+xx)^2}$.

Erit $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(3-4x-xx)$,

& $\frac{P^{m-1}}{Q^{n+1}} \cdot \frac{dR}{dx} = -\frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(2x+4)$,

vbi cum $(1+x)^2$ & $(1+xx)^3$ semper habeant valorem affirmatiuum, iudicium relinquetur formulae $-x-2$, quae si fuerit affirmatiua minimum, sin negatiua maximum indicat. At vero ex aequatione $3-4x-xx=0$ sequitur vel $x=-2+\sqrt{7}$ vel $x=-2-\sqrt{7}$. Priori casu fit $-x-2=-\sqrt{7}$, ideoque fractio proposita erit maximum, posteriori vero casu minimum ob $-x-2=+\sqrt{7}$. Posito autem $x=-2+\sqrt{7}$, erit $1+x=-1+\sqrt{7}$, & $1+xx=12-4\sqrt{7}$, vnde

$$y = \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{12-4\sqrt{7}}\right)^2 (\sqrt{7}-1) = \frac{(2+\sqrt{7})^2(\sqrt{7}-1)}{16} = \frac{17+7\sqrt{7}}{16}$$
$$= 2,220.$$

Poſito autem $x = -2-\sqrt{7}$ fiet $y = \frac{17-7\sqrt{7}}{16} = -0,0950.$

268. Dantur etiam functiones irrationales & transcendentes, quae proprietatem functionum vniformium habent, & hancobrem maxima & minima eodem modo inueniri poſſunt. Radices enim cubicae & omnium imparium poteſtatum reuera ſunt vniformes, cum nonniſi vnicum valorem realem exhibeant: radices autem quadratae atque omnium poteſtatum parium, etſi reuera, quoties ſunt reales, geminum valorem indicant, alterum affirmatiuum alterum negatiuum, tamen vnusquisque ſeorſim ſpectari poteſt, hocque ſenſu etiam maxima & minima inueſtigari poſſunt. Sic ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, etſi $\sqrt{y}$ geminum habet valorem tamen vterque ſeorſim tractari poterit. Scilicet $+\sqrt{y}$ maximum vel minimum habebit valorem, ſi y talem habuerit, dummodo fuerit affirmatiuus; quia alioquin $\sqrt{y}$ euaderet imaginarium. Vice verſa autem $-\sqrt{y}$ fiet minimum vel maximum, iisdem caſibus, quibus $+\sqrt{y}$ fit maximum vel minimum. Poteſtas autem quaecunque $y^{\frac{m}{n}}$, iisdem caſibus fiet maximum vel minimum, ſiquidem n fuerit numerus impar; at ſi n fuerit numerus par, ii tantum caſus valent, quibus y induit valorem affirmatiuum: hisque caſibus ob ancipitem valorem gemina prodibunt maxima vel minima.

269. Quoniam aequatio differentialis, quae ex potestate functionis y^m nascitur, est $\frac{y^{m-1}dy}{dx} = 0$, cuius radices simul casus, quibus potestas surda $y^{\frac{m}{n}}$ fit maximum vel minimum, indicant, ad hoc indagandum duplex habetur aequatio, altera $y^{m-1} = 0$, altera $\frac{dy}{dx} = 0$, quarum illa abit in $y = 0$, atque tum solum maxima & minima exhibet, si $m - 1$ fuerit numerus impar, seu si m fuerit numerus par, ob rationes §. 257. allegatas. Quare cum n sit numerus impar, si m fuerit numerus par, si numeros pares per 2μ & impares per $2\nu - 1$ indicemus, functio $y^{2\mu:(2\nu-1)}$ euadet maxima vel minima tribuendis ipsi x valoribus, quos tam ex hac aequatione $y = 0$ quam ex hac $\frac{dy}{dx} = 0$ adipiscitur. Sin autem m sit numerus impar, functio $y^{(2\mu-1):(2\nu-1)}$ vel $y^{(2\mu-1):2\nu}$ tum solum fit maxima vel minima, cum loco x substituitur valor ex hac aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$. Ac posteriori quidem casu $y^{(2\mu-1):2\nu}$ maxima & minima tantum proueniunt, si y ab inuentis ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ valoribus, affirmatiuos recipiat valores.

270. Sic ista formula $x^{\frac{2}{3}}$ fit minimum, ponendo $x = 0$, propterea quod hoc casu x^2 fit minimum. Nisi au-

autem formulam $x^{\frac{2}{3}}$ ad formam x^2 reducamus, methodus ante tradita hoc minimum indicaret; propterea quod casu $x = 0$, termini seriei $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$ vnde iudicium peti debet, praeter primum omnes fiunt infiniti. Facto enim $y = x^{\frac{2}{3}}$ erit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2.4}{27x^{\frac{7}{3}}}; \quad \&c.$$

Hinc neque aequatio $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$ ostendit valorem $x = 0$, neque termini sequentes rationem maximi minimiue indicant. Cum igitur assumsimus seriem $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$ fieri conuergentem, si ω statuatur quantitas valde parua; ii casus vtique methodum generalem effugiunt, quibus haec series fit divergens, quod euenit exemplo hic allato $y = x^{\frac{2}{3}}$, si ponatur $x = 0$. Quamobrem his casibus ea reductione, qua ante vsi sumus, erit opus, quo expressio proposita ad aliam formam reuocetur, quae huic incommodo non sit subiecta. Hoc autem tantum paucissimis casibus vsu venit, qui in formula $y^{\frac{2\mu}{2\nu - 1}}$ continentur, vel ad eam facile reducuntur. Sic si requirantur maxima minimaue formulae $y^{\frac{2\mu}{2\nu - 1}} z$, existente z functione quacun-

cunque ipſius x, inueſtigetur forma haec $y^{2\mu} z^{2\nu-1}$, quippe quae iisdem caſibus fit maxima vel minima, quibus ipſa propoſita.

271. Hoc caſu excepto, qui iam facile expeditur, functiones, quae continent quantitates irrationales, eodem modo quo rationales tractari, earumque maxima & minima determinari poſſunt, id quod ſequentibus exemplis illuſtrabimus.

EXEMPLUM I.

Propoſita ſit formula $V(aa+xx)-x$, *quae quibus caſibus fiat maxima vel minima, quaeritur.*

Poſito $y = V(aa+xx) - x$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{V(aa+xx)} - 1$, & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{aa}{(aa+xx)^{3:2}}$. Facto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, erit: $x = V(aa+xx)$, ideoque $x = \infty$, ac fit $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Simili vero modo fiunt ſequentes termini $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$; &c. omnes $= 0$; ex quo iudicium incertum relinquitur, vtrum ſit maximum an minimum? ratio eſt quod reuera tam fiat $x = -\infty$, quam $x = +\infty$. Interim ponendo $x = +\infty$, ob $V(aa+xx) = x + \frac{aa}{2x}$, fit $y = 0$, qui valor omnium eſt minimus.

EXEMPLUM II.

Quaerantur casus, quibus haec forma $\sqrt{(aa+2bx+mxx)}-nx$ *sit maximum vel minimum.*

Posito $y = \sqrt{(aa+2bx+mxx)} - nx$, erit: $\frac{dy}{dx} = \frac{b+mx}{\sqrt{(aa+2bx+mxx)}} - n$, quo facto $=0$, erit: $bb+2mbx+mmxx = nnaa+2nnbx+mnnxx$, seu $xx = \frac{2bx(nn-m)+nnaa-bb}{mm-mnn}$, ideoque

$$x = \frac{(nn-m)b \pm \sqrt{[mnn(m-nn)aa - nn(m-nn)bb]}}{m(m-nn)},$$

siue $x = -\frac{b}{m} \pm \frac{n}{m}\sqrt{\frac{maa-bb}{m-nn}}$: vnde fit $\sqrt{(aa+2bx+mxx)} = \frac{b+mx}{n} = \pm\sqrt{\frac{maa-bb}{m-nn}}$. Cum igitur sit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa-bb}{(aa+2bx+mxx)^{\frac{3}{2}}}$, erit:

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa-bb}{\pm\left(\frac{maa-bb}{m-nn}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm(m-nn)\sqrt{(m-nn)}}{\sqrt{(maa-bb)}}.$$

Nisi ergo fuerit $\frac{m-nn}{maa-bb}$ quantitas affirmatiua, maximum minimumue plane non datur. Sin autem sit quantitas affirmatiua, signum superius dabit minimum si $m > nn$, maximum vero si $m < nn$: contrarium euenit, si signum inferius valeat. Si ergo sit $m=2$, $n=1$, & $b=0$, formula $\sqrt{(aa}$

$\sqrt{(aa+2xx)}-x$ fit minimum ponendo $x=+\frac{1}{2}\sqrt{2aa}=\frac{a}{\sqrt{a}}$, at maximum ponendo $x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$. Erit ergo minimum $=a\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, & maximum $=a\sqrt{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

EXEMPLUM III.

Quaerantur casus, quibus haec expressio

$$\sqrt[4]{(1+mx^4)}+\sqrt[4]{(1-nx^4)}$$

fiat maximum vel minimum.

Cum sit $\frac{dy}{dx}=\frac{mx^3}{(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}}-\frac{nx^3}{(1-nx^4)^{\frac{3}{4}}}$, fiet $mx^3(1-nx^4)^{\frac{3}{4}}=nx^3(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $m^4(1-nx^4)^3=n^4(1+mx^4)^3$, seu $n^4-m^4+3mn(n^3+m^3)x^4+3m^2n^2(n^2-m^2)x^8+m^3n^3(n+m)x^{12}=0$. Nisi ergo haec aequatio radicem positiuam habeat pro x^4, maximum minimumue prorsus non datur. Quia haec aequatio generaliter commode resolui nequit, fiet enim $x^4=\frac{m^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}}{mn(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n})}$ seu $x^4=\frac{m-\sqrt[3]{m^2n}+\sqrt[3]{mn^2}-n}{mn}$ ponamus pro casu speciali $m=8n$, eritque

$-4095+24.513nx^4-3.63.64n^2x^8+9.512n^3x^{12}=0$

seu $512n^3x^{12}-1344n^2x^8+1368nx^4-455=0$

ponatur $8nx^4=z$, erit $z^3-21z^2+171z-455=0$

quae diuisorem habet $z-5$, alterque factor erit:

$zz - 16z + 91 = 0$ radices continens imaginarias. Erit ergo tantum $z = 8nx^4 = 5$, ideoque $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$ qui valor reddet expressionem $\sqrt[4]{(1+8nx^4)} + \sqrt[4]{(1-nx^4)}$ maximum vel minimum. Quorum vtrum eueniat? quaeratur $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{3mxx}{(1+mx^4)^{\frac{7}{4}}} - \frac{3nxx}{(1-nx^4)^{\frac{7}{4}}}$. At ob $m = 8n$, posito $x^4 = \frac{5}{8n}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{24n}{6^{\frac{7}{4}}} - \frac{3n}{(3:8)^{\frac{7}{4}}}\right) xx = -\frac{360nxx}{6^{\frac{7}{4}}}$ ideoque negatiuum, ergo fiet $\sqrt[4]{(1+8nx^4)} + \sqrt[4]{(1-nx^4)}$ maximum posito $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$. Erit vero hoc maximum $= \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \frac{3\sqrt[4]{6}}{2}$. Si loco nx^4 ponamus u, patet hanc expressionem $\sqrt[4]{(1+8u)} + \sqrt[4]{(1-u)}$ fieri maximam, posito $u = \frac{5}{8}$, huncque valorem maximum fore $= \frac{3\sqrt[4]{6}}{2} = 2,347627$. Quicunque ergo valor praeter $\frac{5}{8}$ pro u scribatur, expressio minorem accipiet valorem.

272. Simili modo maxima ac minima determinabuntur, si quantitates quoque transcendentes in expressione proposita insint. Nisi enim functio proposita fuerit

rit multiformis, atque aliquot eius significatus simul considerari debeant, radices aequationis differentialis ostendent maxima vel minima, nisi affuerint radices aequales, quarum numerus sit par. Hanc ergo inuestigationem in aliquot exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire numerum, qui ad suum logarithmum minimam teneat rationem.

Dari huiusmodi rationem minimam $\frac{x}{lx}$ inde patet, quod haec ratio tam posito $x = 1$, quam $x = \infty$ fiat infinita. Vicissim ergo habebit fractio $\frac{lx}{x}$ alicubi maximum valorem, eodem scilicet casu, quo $\frac{x}{lx}$ fit minimum. Ad hunc casum indagandum ponatur $y = \frac{lx}{x}$, fietque $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}$. Quo nihilo aequali posito erit $lx = 1$, & quia hic logarithmum hyperbolicum assumsimus, si e ponatur numerus cuius logarithmus hyperbolicus sit $= 1$, erit $x = e$. Cum igitur omnes logarithmi ad hyperbolicos in data sint ratione, erit in quocunque logarithmorum canone $\frac{e}{le}$ minimum, seu $\frac{le}{e}$ maximum. Quoniam in logarithmis tabularibus est $le = 0,4342944819$, fractio $\frac{lx}{x}$ perpetuo erit minor

quam $\frac{4342944819}{27182818284}$, seu proxime quam $\frac{47}{305}$: neque vllus datur numerus, qui ad suum logarithmum minorem teneat rationem quam 305 ad 47. Esse autem hoc casu $\frac{lx}{x}$ maximum inde patet, quod ob $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - lx}{xx}$, fiat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2(1-lx)}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$, propter $1-lx = 0$, ideoque negatiuum.

EXEMPLUM II.

Inuenire numerum x, vt haec potestas $x^{1:x}$ fiat maximum.

Dari huius formulae valorem maximum inde patet, quod numeris loco x substituendis sit

$$1^{1:1} = 1,000000$$
$$2^{1:2} = 1,414213$$
$$3^{1:3} = 1,442250$$
$$4^{1:4} = 1,414213$$

Ponatur ergo $x^{1:x} = y$, eritque $\frac{dy}{dx} = x^{1:x}\left(\frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}\right)$. Quo valore nihilo aequali posito, erit $lx = 1$ & $x = e$, existente $e = 2,718281828$. Et cum sit $\frac{dy}{dx} = (1-lx)\frac{x^{1:x}}{xx}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{x^{1:x}}{x^3} + (1-lx)\,d.\frac{x^{1:x}}{xx} = -\frac{x^{1:x}}{x^3}$ ob $1-lx = 0$. Quare cum sit $\frac{ddy}{dx^2}$ quantitas negatiua, fiet $x^{1:x}$ maximum

casu

casu $x = e$. Cum autem sit $e = 2,718281828$, reperitur fore $e^{\frac{1}{e}} = 1,444667861009764$, qui valor obtinetur facile ex serie $e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} + \&c.$

Hoc exemplum quoque ex praecedenti resoluitur: si enim sit $x^{1:x}$ maximum, quoque eius logarithmus, qui est $\frac{lx}{x}$, debebit esse maximum; quod quo fiat, debet esse $x = e$, vti inuenimus.

EXEMPLUM III.

Inuenire arcum x, *vt sit eius sinus maximus vel minimus.*

Posito $\sin x = y$ erit $\frac{dy}{dx} = \cos x$, ideoque $\cos x = 0$, vnde prodeunt sequentes valores pro x: $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$ &c. Fit autem $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin x$. Cum igitur hi valores pro x substituti dent pro $\sin x$ vel $+1$ vel -1, illi erunt maximi, hi vero minimi, vti constat.

EXEMPLUM. IV.

Inuenire arcum x, *vt rectangulum* x . *sin* x *fiat maximum.*

Dari maximum inde patet, quod posito vel $x = 0$ vel $x = 180°$ vtroque casu rectangulum propositum euanescat. Sit igitur $y = x \sin x$; erit $\frac{dy}{dx} = \sin x + x \cos x$,

ideo-

ideoque tg $x = -x$. Sit $x = 90° + u$, erit tg $x = -\cot u$, ergo $\cot u = 90 + u$. Ad quam aequationem modo supra tradito resoluendam ponatur $z = 90 + u - \cot u$, sitque f valor arcus u quaesitus. Cum sit $dz = du + \frac{du}{\sin u^2}$, erit $p = \frac{du}{dz} = \frac{\sin u^2}{1 + \sin u^2}$; $dp = \frac{2\, du \sin u \cos u}{(1 + \sin u)^2}$; ideoque $\frac{dp}{dz} = q = \frac{2 \sin u^3 \cos u}{(1 + \sin u^2)^3}$; $dq = \frac{6\, du \sin u^2 \cos u^2 - 2\, du \sin u^4}{(1 + \sin u^2)^3}$ $- \frac{12\, du \sin u^4 \cos u^2}{(1 + \sin u^2)^4}$. Ergo $\frac{dq}{dz} = r = \frac{6 \sin u^4 \cos u^2 - 2 \sin u^6}{(1 + \sin u^2)^4}$ $- \frac{12 \sin u^6 \cos u^2}{(1 + \sin u^2)^5} = \frac{6 \sin u^4 - 14 \sin u^6 + 4 \sin u^8}{(1 + \sin u^2)^5}$. Ex quibus erit $f = u - pz + \frac{1}{2} qzz - \frac{1}{6} rz^3 + \&c.$ Ponatur, postquam aliquot tentaminibus proximus ipsius f valor est detectus, $u = 26°, 15'$, erit $90 + u = 116°, 15'$, & arcus cotangenti u aequalis ita definiatur:

A	$l \cot u =$	$10,3070250$
subtrahatur		$4,6855749$
		$5,6214501$
Ergo	$\cot u =$	$418263, 7''$
seu	$\cot u =$	$116°, 11', 3\frac{7}{10}''$
vnde	$z =$	$3', 56\frac{3}{10}'' = 236, 3''$.

Iam

Iam ad valorem termini pz inueniendum, iſte inſtituatur calculus:

$$l \sin u = 9,6457058$$

$$l \sin u^2 = 9,2914116$$

$$1 + \sin u^2 = 1,19561$$

$$l(1 + \sin u^2) = 0,0775895$$

$$lp = 9,2138221$$
$$lz = 2,3734637$$

$$lpz = 1,5872858$$

Ergo $pz = 38,6621$ ſecundis

ſeu $pz = 38'', 39''', 43''''$

ab $u = 26°, 15'$

fiet $f = 26°, 14', 21'', 20''', 17''''$

& arcus quaeſitus $x = 116, 14, 21, 20, 17$

Tertius vero terminus $\frac{1}{2}qzz = \frac{\sin u^3 \cos u}{(1 + \sin u^2)^3} zz$ inſuper addi debet.

Cuius valor vt inueniatur, vnum z in partibus radii exprimi debet, hoc modo:

$$l z'' = 2,3734637$$

add. $4,6855749$

$$7,0590386$$

add. $l \frac{\sin u^2}{1+\sin u^2} z = 1,5872858$

$$8,6463244$$

add. $l \sin u = 9,6457058$

$l \cos u = 9,9527308$

$$8,2447600$$

subtr. $l(1+\sin u^2)^2 = 0,1551790$

$$l \tfrac{1}{2} qzz = 8,0895810$$

Ergo $\tfrac{1}{2} qzz = 0,012291$

seu $\tfrac{1}{2} qzz = 44'''', 15'''''.$

Vnde & hoc termino adhibito fiet arcus quaesitus

$$x = 116^\circ, 14', 21'', 21''', 0''''$$

maioribus autem logarithmis adhibitis reperitur

$$x = 116^\circ, 14', 21'', 20''', 35'''', 47'''''.$$

CAPUT

CAPUT XI.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM MULTIFORMIUM PLURESQUE VARIABILES COMPLECTENTIUM.

273.

Si y fuerit functio multiformis ipsius x, ita vt pro vnoquoque valore ipsius x ea plures obtineat valores reales; tum variato x plures illi ipsius y valores ita inter se connectentur, vt plures series valorum successiuorum repraesentent. Si enim y tanquam applicatam lineae curuae consideremus, x existente abscissa, quot y habuerit valores reales diuersos, totidem diuersi eiusdem curuae rami eidem abscissae x respondebunt: atque hinc illi ipsius y valores successiui, qui eundem ramum constituunt, cohaerere censendi sunt; valores autem ad diversos ramos relati erunt inter se disiuncti. Tot igitur series valorum cohaerentium ipsius y habebimus, quot diuersos valores reales pro quouis ipsius x valore receperit; atque in qualibet serie valores ipsius y, dum x crescens assumitur, vel crescent vel decrescent, vel postquam creuerint iterum decrescent, vel vice versa. Ex quo perspicuum est, in unaquaque valorum cohaerentium serie aeque dari maxima minimaue, atque in functionibus uniformibus.

274. Ad haec maxima minimaue determinanda eadem quoque methodus valebit, quam capite praecedente pro functionibus uniformibus tradidimus. Cum enim, si variabilis x incremento ω augeatur, functio y perpetuo recipiat hanc formam $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$ necesse est vt casu maximi minimiue terminus $\frac{\omega dy}{dx}$ euanescat, fiatque $\frac{dy}{dx} = 0$. Radices ergo huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ eos ipsius x valores indicabunt, quibus in singulis valorum ipsius y cohaerentium seriebus, maxima minimaue respondeant. Neque vero ambiguum erit, in quanam valorum cohaerentium serie detur maximum minimumue. Cum enim in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ambae insint variabiles x & y, valores ipsius x definiri nequeunt, nisi ope aequationis, qua relatio functionis y ab x continetur, variabilis y eliminetur; antequam autem hoc fit, peruenitur ad aequationem, qua valor ipsius y per functionem rationalem seu vniformem ipsius x exprimitur. Hinc inuentis valoribus ipsius x, cuique respondens valor ipsius y reperietur, qui erit maximus vel minimus in serie valorum successiuorum cohaerentium, ad quam pertinet.

275. Iudicium autem, vtrum isti valores ipsius y sint maximi an minimi? instituetur eodem modo, quem

ante indicauimus. Scilicet quaeratur valor ipſius $\frac{ddy}{dx^2}$ finitis terminis expreſſus, in eoque loco x ſubſtituatur vnusquisque ipſius x valor inuentus ſucceſſive, ſimul autem pro y ponatur valor, qui ipſi pro quolibet ipſius x valore conuenit; quo facto diſpiciatur, vtrum expreſſio $\frac{ddy}{dx^2}$ adeptura ſit valorem affirmatiuum an negatiuum? priorique caſu minimum, poſteriori vero maximum indicabitur. Quodſi vero & $\frac{ddy}{dx^2}$ euaneſcat, tum procedendum erit ad formulam $\frac{d^3y}{dx^3}$, quae ſi eodem caſu non euaneſcat, neque maximum habebitur neque minimum: ſin autem quoque $\frac{d^3y}{dx^3}$ euaneſcat, iudicium formari oportebit ex formula $\frac{d^4y}{dx^4}$ eodem modo, quo ratione formulae $\frac{ddy}{dx^2}$ praecipimus. Atque ſi quoque $\frac{d^4y}{dx^4}$ quopiam caſu euaneſcat, ad differentiale quintum ipſius y erit progrediendum: perpetuo autem quousque progredi neceſſe fuerit, iudicia ex differentialibus ordinum imparium ſimilia ſunt illi, quod de formula $\frac{d^3y}{dx^3}$ dedimus. His ſcilicet caſibus in formulis $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ &c. eousque erit pergendum, quoad

perueniatur ad talem, quae propoſito caſu non euaneſcat; quae ſi fuerit differentialis ordinis imparis, neque maximum neque minimum indicabitur, ſin autem fuerit ordinis paris, eius valor affirmatiuus minimum, negatiuus vero maximum innuet.

276. Ponamus functionem y determinari ex x per aequationem quamcunque: quae aequatio ſi differentietur, induet huiusmodi formam $Pdx + Qdy = 0$. Facto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $\frac{P}{Q} = 0$ ideoque vel $P = 0$ vel $Q = \infty$. Poſterior quidem aequatio, ſi relatio inter x & y exprimatur per aequationem rationalem integram, locum habere nequit; quia vel x vel y vel vtramque fieri oporteret infinitam. Quare iudicium relinquetur aequationi $P = 0$, cuius radices, ſeu valores ipſius x, quos adipiſcitur, poſtquam ope aequationis propoſitae variabilis y penitus fuerit eliminata, indicabunt caſus, quibus valores ipſius y fiunt maximi vel minimi. Ad iudicium vero, vtrum prodeat maximum an minimum? abſoluendum, examinetur formula $\frac{ddy}{dx^2}$. Aequatio vero differentialis $Pdx + Qdy = 0$ denuo differentiata, ſi ponamus $dP = Rdx + Sdy$ & $dQ = Tdx + Vdy$, dabit (poſito dx conſtante):

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdxdy + Vdy^2 + Qddy = 0.$$

Cum autem iam ſit $\frac{dy}{dx} = 0$, aequatione per dx^2 diviſa fiet $R + \frac{Qddy}{dx^2} = 0$, ideoque $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{R}{Q}$. Hinc in

in aequatione differentiali $Pdx + Qdy = 0$, differentietur tantum quantitas P, ponendo y constans, prodibitque Rdx, tum indagetur, valor fractionis $\frac{R}{Q}$, qui si fuerit affirmatiuus, maximum, sin negatiuus minimum indicabit.

277. Sit y functio biformis ipsius x, quae determinetur per hanc aequationem $yy + py + q = 0$, denotantibus p & q functiones quascunque ipsius x vniformes. Erit ergo differentiando $2ydy + pdy + ydp + dq = 0$, ideoque $Pdx = ydp + dq$. Posito igitur $P = 0$ erit $ydp + dq = 0$ prodibitque $y = -\frac{dq}{dp}$, sicque y per functionem ipsius x vniformem exprimitur, ita vt, quicunque valor pro x fuerit inuentus, ex eo & y valorem determinatum vnicum acquirat. Eliminatio vero nunc ipsius y erit facilis; nam si in aequatione proposita $yy + py + q = 0$ loco y valor $-\frac{dq}{dp}$ substituatur, habebitur $dq^2 - pdpdq + qdp^2 = 0$, quae aequatio diuisa per dx^2 & resoluta praebebit valores ipsius x omnes, quibus maxima vel minima respondent: quod clarius fiet sequentibus exemplis.

EXEMPLUM I.

Proposita aequatione $yy + mxy + aa + bx + nxx = 0$ *definire maxima vel minima functionis* y.

Differentiata aequatione habebimus:

$$2ydy + mxdy + mydx + bdx + 2nxdx = 0$$

vnde

vnde fit $P = my + b + 2nx$ & $Q = 2y + mx$. Poſito ergo $P = 0$ fiet $y = -\frac{b - 2nx}{m}$; qui valor in ipſa aequatione ſubſtitutus dat:

$$\begin{matrix} \frac{4nn}{mm}xx & + \frac{4nb}{mm}x & + \frac{bb}{mm} & \\ -2nxx & - bx & + aa & = 0 \\ +nxx & + bx & & \end{matrix}$$

ſeu $xx = \frac{4nbx + bb + mmaa}{mmn - 4nn}$; vnde fit

$$x = \frac{2nb \pm V[mmnbb + mmn(mm - 4n)aa]}{mmn - 4nn}$$

ſeu $$x = \frac{2nb \pm mV[nbb + n(mm - 4n)aa]}{n(mm - 4n)}$$

& $$y = \frac{-mb \mp 2V[nbb + n(mm - 4n)aa]}{mm - 4n}.$$

Tum poſito ſolo x variabili fit $dP = 2ndx$, ideoque $R = 2n$. At eſt $Q = 2y + mx = \pm\frac{V[nbb + n(mm - 4n)aa]}{n}$, vnde $\frac{R}{Q} = \frac{\pm 2nn}{V[nbb + n(mm - 4n)aa]}$, cuius numerator $2nn$ cum ſit perpetuo affirmatiuus, ſi ſignum ſuperius valeat, prodibit pro y valor maximus, ſin inferius prodibit minimus. Vbi ſequentia annotari debent.

I. Si fuerit $m = 0$, ex aequatione $P = 0$ ſtatim ſequitur $x = -\frac{b}{2n}$, vt nulla eliminatione opus ſit. Huicque valori

lori geminus ipſius y reſpondet ob $y = \pm \frac{1}{2n} \sqrt{(nbb - 4nnaa)}$ quorum alter affirmatiuus eſt maximus, alter negatiuus minimus.

II. Si ſit $n = 0$, fit $y = -\frac{b}{m}$, & x in infinitum excreſcit, atque y per ſpatium infinitum eundem valorem retinet, ita vt neque maximus ſit neque minimus.

III. Si ſit $mm = 4n$, erit $4nbx + bb + mmaa = 0$ ſeu $x = \frac{bb + mmaa}{-mmb}$; fietque $y = -\frac{b - 2nx}{m} =$
$-\frac{2b - mmx}{m} = -\frac{2b}{m} + \frac{bb + mmaa}{mb} = \frac{mmaa - bb}{mb}$.
Huic ergo valori ipſius $x = -\frac{mmaa - bb}{mmb}$ alter ipſius y valor, qui reſpondet $\frac{mmaa - bb}{mb}$, erit maximus vel minimus. Quia autem, vt iſte ipſius y valor prodeat, in expreſſione $y = -\frac{mb \mp 2\sqrt{[nbb + n(mm - 4n)aa]}}{mm - 4n}$ ſignum inferius valere debet, erit valor ipſius y minimus.

EXEMPLUM II.

Propoſita aequatione $yy - xxy + x - x^3 = 0$ *definire valores ipſius* y *maximos vel minimos.*

Differentiata aequatione prodit:

$$2ydy - xxdy - 2xydx + dx - 3xxdx = 0.$$

Fitque $P = 1 - 3xx - 2xy$ & $Q = 2y - xx$. Quare posito $P = 0$, erit $y = \frac{1-3xx}{2x}$; ideoque hoc valore substituto:

$$\frac{1}{4xx} - \frac{3}{2} + \frac{9xx}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^3 + x - x^3 = 0$$

seu $1 - 6xx + 2x^3 + 9x^4 + 2x^5 = 0$. Cuius vna radix est $x = -1$, cui respondet $y = 1$. At posito y constante fit $R = -6x - 2y$, ergo $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2y+6x}{2y-xx}$; quod casu $x = -1$ & $y = 1$ abit in -4, ita vt valor ipsius $y = 1$ sit maximus. Ipsi $x = -1$ autem geminus valor ipsius y respondet ex aequatione $yy - y = 0$: alter ergo est $y = 0$, qui neque maximus est neque minimus. Quodsi aequatio illa quinti gradus per $x + 1$ diuidatur, prodit aequatio, cuius radices simpliciter exhiberi nequeunt.

EXEMPLUM III.

Sit proposita haec aequatio: $yy + 2xxy + 4x - 3 = 0$ *ex qua maximi minimiue valores ipsius* y *requiruntur.*

Per differentiationem ergo prodibit haec aequatio:

$$2ydy + 2xxdy + 4xydx + 4dx = 0$$

Factoque $\frac{dy}{dx} = 0$ erit $xy + 1 = 0$, ideoque $y = -\frac{1}{x}$, qui valor substitutus in ipsa aequatione proposita oritur,

$$\frac{1}{xx} - 2x + 4x - 3 = 0 = 2x^3 - 3xx + 1$$

cuius

cuius radices sunt $x = 1$; $x = 1$; & $x = -\frac{1}{2}$. Quia nunc est $\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 4}{2y + 2xx} = -\frac{2xy - 2}{y + xx}$, erit differentiando $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2y}{y + xx}$, posito y constanti ob $dy = 0$ & facto $xy + 1 = 0$. Quare isti valores ita se habebunt

x	y	$\frac{ddy}{dx^2}$
1	-1	∞
1	-1	∞
$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{16}{9}$ pro maximo.

Quoniam pro radicibus aequalibus fit $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$, vtrum hoc casu maximum an minimum prodeat? non determinatur. Quia autem simul fit $y + xx = 0$; nequidem hoc casu erit $\frac{dy}{dx} = 0$; ob $P = 0$ & $Q = 0$ in fractione $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$; quare cum primaria proprietas desit, neque maximum nec minimum habet locum. Indicatur autem hoc casu $x = 1$, ambos ipsius y valores inter se fieri aequales. Quam indolem infra fusius sumus expositituri, cum ad vsum calculi differentialis in doctrina de lineis curuis perueniemus. Etiamsi enim haec materia & huc pertineat; tamen ne eam bis attingere opus sit, eam totam sequenti tractationi reservamus.

278. Datur vero inſuper in functionibus multiformibus alia ſpecies maximorum ac minimorum, quae methodo hactenus tradita non inuenitur, cuius natura ex functionibus biformibus facillime explicari poteſt. Sit enim y functio quaecunque biformis ipſius x, ita vt, quicunque valor ipſi x tribuatur, pro y oriantur bini valores vel ambo reales vel ambo imaginarii. Ponamus hos ipſius y valores fieri imaginarios, ſi ponatur $x > f$, reales autem eſſe, ſi ſtatuatur $x < f$; atque poſito $x = f$ ambo ipſius y valores in vnum coaleſcent, qui ſit $y = g$. Cum igitur ſi ſumatur $x > f$; functio y nullum habeat valorem realem: ſi eveniat, vt poſito $x < f$ ambo ipſius y valores fiant vel maiores quam g, vel minores quam g: priori caſu valor $y = g$ erit minimus, poſteriori maximus; quoniam illo caſu minor eſt, quam ambo praecedentes, hoc vero maior. Neque hoc maximum minimumue methodo hactenus tradita reperietur, propterea quod hic non fit $\frac{dy}{dx} = 0$. Sunt autem quoque haec maxima vel minima generis diuerſi, cum talia non ſint ratione valorum antecedentium & conſequentium in ſerie cohaerentium; ſed ratione binorum valorum disiunctorum vel antecedentium vel ſequentium tantum.

279. Euenit hoc ſi aequatio propoſita fuerit huiusmodi $y = p \pm (f - x) V(f - x) q$, exiſtentibus p & q functionibus ipſius x per $f - x$ non diuiſibilibus; obtineatque q valorem affirmatiuum, ſi ponatur vel $x = f$ vel ali-

aliquanto maius minusue. Fiat $p = g$ posito $x = f$: & manifestum est, casu $x = f$ ambos ipsius y valores in vnum $y = g$ coalescere; posito autem $x > f$ ambo valores ipsius y fient imaginarii. Si igitur ponamus x aliquanto minus quam f, puta $x = f - \omega$, functio p abibit in $g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} - \&c.$ & q in $q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \&c.$ vnde hoc casu erit $y = g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} + \&c.$ $\pm \omega \sqrt{\omega} \left(q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \&c. \right)$. Ponamus ω minimum, vt prae ω altiores eius potestates euanescant, eritque $y = g - \frac{\omega dp}{dx} \pm \omega \sqrt{\omega q}$; qui valores ambo ipsius y minores erunt quam g, si $\frac{dp}{dx}$ fuerit affirmatiuum, maiores autem, si negatiuum. Vnde valor duplex ipsius $y = g$ illo casu erit maximus, hoc vero minimus.

280. Haec igitur maxima atque minima inde ortum suum habent, quod primo posito $x = f$ ambo ipsius y valores fiant aequales: posito autem $x > f$ imaginarii, at posito $x < f$ reales. Deinde quod posito $x = f - \omega$ alterum membrum irrationale praebeat altiores potestates ipsius ω, quam membrum rationale. Hoc ergo euenit quoque si fuerit $y = p \pm (f-x)^n \sqrt{(f-x)q}$, dummodo sit n numerus integer > 0. Cum autem non solum radix quadrata sed etiam quaecunque alia radix potestatis paris eandem ambiguitatem signorum introducat; idem eueniet, si fuerit

$y = p \pm (f-x)^{\frac{2n+1}{2m}} q$, dummodo sit $2n+1 > 2m$, erit ergo $(y-p)^{2m} = (f-x)^{2n+1} q^{2m}$ seu $(y-p)^{2m} = (f-x)^{2n+1} Q$. Quoties ergo functio y per huiusmodi aequationem exprimitur, ita vt sit $2n+1 > 2m$, toties posito $x = f$, valor ipsius y fiet maximus vel minimus: prius quidem si fuerit $\frac{dp}{dx}$ quantitas affirmatiua, posterius vero si sit $\frac{dp}{dx}$ quantitas negatiua posito $x = f$. Sin autem fiat hoc casu $\frac{dp}{dx} = 0$, tum erit $y = g + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} \pm \omega^{\frac{2n+1}{2m}} q$. Nisi ergo sit $\frac{2n+1}{2m} > 2$, neque maximum neque minimum locum habebit; at si $\frac{2n+1}{2m} > 2$, tum $y = g$ erit maximum, si $\frac{ddp}{dx^2}$ habuerit valorem negatiuum, minimum vero, si affirmatiuum: sicque vlterius si quoque $\frac{ddp}{dx^2}$ euanescat, iudicium erit instituendum.

281. Si igitur y fuerit huiusmodi functio ipsius x, fieri potest, vt praeter maxima & minima, quae prior methodus exhibet, etiam maxima minimaue huius alterius speciei adsint, quae modo hic exposito explorari poterunt. Id quod sequentibus exemplis declarabimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Determinare maxima ac minima functionis y, quae definitur hac aequatione :

$$yy - 2xy - 2xx - 1 + 3x + x^3 = 0.$$

Ad maxima minimaue primae speciei inuestiganda differentietur aequatio, eritque

$$2ydy - 2xdy - 2ydx - 4xdx + 3dx + 3xxdx = 0,$$

positoque $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $y = \frac{3}{2} - 2x + \frac{3}{2}xx$, qui valor in prima aequatione substitutus dat: $9x^4 - 32x^3 + 42xx - 24x + 5 = 0$, quae resoluitur in $9xx - 14x + 5 = 0$ & $xx - 2x + 1 = 0$. Posterior bis dat $x = 1$, fitque $y = 1$, vnde hoc casu in fractione $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3 - 4x + 3xx}{2y - 2x}$ denominator quoque euanescit, sicque maximum minimumue primi generis non datur: prior vero aequatio $9xx - 14x + 5 = 0$ dabit $x = 1$ & $x = \frac{5}{9}$, quorum valorum ille eodem incommodo laborat, quo praecedentes. Posito autem $x = \frac{5}{9}$, fit $y = \frac{3}{2} - \frac{10}{9} + \frac{25}{54} = \frac{23}{27}$. Et cum sit $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3xx}{2y - 2x}$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{+4 - 6x}{2y - 2x} = \frac{-3x + 2}{y - x}$ ob $dy = 0$ & numeratorem $= 0$. Erit ergo $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{9}{8}$, vnde hic valor

$x =$

$x = \frac{5}{9}$ dat minimum primi generis. Deinde cum ſit $(y-x)^2 = (1-x)^3$, erit $y = x \pm (1-x)\sqrt{(1-x)}$; ideoque poſito $x = 1$ prodit maximum ſecundae ſpeciei: facto enim $x = 1-\omega$, erit $y = 1-\omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, quorum vterque minor eſt quam vnitas, ſiquidem ω ſumatur minimum.

EXEMPLUM II.

Inuenire maxima ac minima functionis:

$$y = 2x - xx \pm (1-x)^2\sqrt{(1-x)}.$$

Pro primi generis maximis & minimis differentietur aequatio; eritque

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}(1-x)\sqrt{(1-x)}$$

qui valor poſitus $= 0$ prodit primo $x = 1$, & cum ſit $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{(1-x)}$, erit y hoc caſu maximum primi generis, ſitque $y = 1$. Aequatione vero $\frac{dy}{dx} = 0$ per $1-x$ diuiſa erit $4 \mp 5\sqrt{(1-x)} = 0$ ſeu $16 = 25 - 25x$, vnde fit $x = \frac{9}{25}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm 3$. Quare ſi ſignum ſuperius valet, erit $y = \frac{2869}{3125}$ minimum; ſin autem ſignum inferius valeat, erit $y = \frac{821}{3125}$, quod maximum videatur: at vero tantum ſignum ſuperius locum habere poteſt, quoniam $4 \mp 5\sqrt{(1-x)}$ nequit eſſe $= 0$, niſi ſit

$\sqrt{(1}$

$\sqrt{(1-x)} = + \frac{4}{5}$. Primi ergo generis inuenimus maximum casu $x = 1$ & $y = 1$, atque minimum casu $x = \frac{9}{25}$ & $y = \frac{2869}{3125}$. Ex genere vero altero maximum quoque prodit, si $x = 1$, quo casu fit $y = 1$. Nam posito $x = 1 - \omega$, erit $y = 1 - \omega\omega \mp \omega^2 \sqrt{\omega}$ vtroque casu < 1. Hic itaque, si $x = 1$, maxima duo primae & alterius speciei coalescunt, maximumque quasi mixtum constituunt.

282. Ex his exemplis non solum natura huius alterius speciei maximorum & minimorum elucet; sed etiam pro lubitu istiusmodi functiones formari possunt, quae maxima vel minima secundae speciei admittant. Quemadmodum autem, si proposita fuerit functio quaecunque, explorari possit, vtrum eiusmodi maximis minimisue sit praedita nec ne? id in sequenti sectione ostendemus: propterea quod natura linearum curuarum hac inuestigatione maxime illustratur. Ceterum vero facile intelligitur, si fuerit y eiusmodi functio ipsius x, quae maximum minimumue secundae speciei recipiat, tum quoque vicissim x eiusmodi fore functionem ipsius y. Nam quia ex hac aequatione $(y - x)^2 = (1 - x)^3$, facto $x = 1$, obtinet y valorem maximum secundae speciei; si variabiles y & x permutentur, haec aequatio $(x - y)^2 = (1 - y)^3$ exhibet pro y quoque eiusmodi functionem ipsius x, quae habeat maximum secundae speciei. Facto enim $x = 1$, fiet $(1 - y)^2 = (1 - y)^3$,

hincque erit bis $y = 1$ & ſemel $y = 0$. Sin autem ponatur $x = 1 + \omega$, erit $(1 + \omega - y)^2 = (1 - y)^3$; vnde ſi ſtatuamus $y = 1 + \phi$ erit $(\omega - \phi)^2 = (-\phi)^3 = -\phi^3$ ideoque ϕ debet eſſe negatiuum. Sit ergo $y = 1 - \phi$ erit $(\omega + \phi)^2 = \phi^3$, atque cum ſumto ϕ minimo, ϕ^3 prae ϕ^2 euaneſcat, debebit neceſſario ω eſſe negatiuum: hinc valori $x = 1 + \omega$ nulli valores reales ipſius y reſpondent. At poſito $x = 1 - \omega$, & $y = 1 - \phi$. ob $(\phi - \omega)^2 = \phi^3$, erit $\phi = \omega \pm \omega \sqrt{\omega}$, ideoque $y = 1 - \omega \mp \omega \sqrt{\omega}$, vnde vterque valor ipſius y reſpondens ipſi $x = 1 - \omega$ minor eſt valore $y = 1$, qui reſpondet valori $x = 1$; eritque conſequenter iſte ipſius y valor maximus.

283. Hactenus tantum functiones biformes ſumus contemplati, quarum maxima vel minima, quia ambo valores facile per reſolutionem aequationis quadraticae exprimi poſſunt, ad examen reuocari poſſunt. Sin autem functio y per aequationem altiorem exprimatur, methodus ante tradita, qua maxima minimaque primae ſpeciei indagauimus, eodem ſucceſſu adhiberi poterit. Inuentionem vero maximorum ac minimorum ſecundae ſpeciei ſequenti ſectioni reſeruamus. Functiones ergo triformes ac multiformes, quemadmodum tractari oporteat, aliquot exemplis oſtendamus.

EXEMPLUM I.

Definiatur functio y, cuius maxima vel minima quaeruntur, per hanc aequationem:

$$y^3 + x^3 = 3axy.$$

Differentiata hac aequatione fit $3y^2dy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$, ideoque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$. Maximum ergo vel minimum dabitur, si fuerit $ay = xx$, seu $y = \frac{xx}{a}$, qui valor in aequatione proposita substitutus dat:

$$\frac{x^6}{a^3} + x^3 = 3x^3 \quad \text{seu} \quad x^6 = 2a^3x^3;$$

Erit ergo ter $x = 0$, quo casu quoque fit denominator $yy - ax = 0$, ob $y = \frac{xx}{a} = 0$. Vtrum ergo hoc casu maximum minimumue prodeat? patebit si ipsi x valorem tribuamus minime ab 0 discrepantem. Sit ergo $x = \omega$, & $y = \phi$, ob $\phi^3 + \omega^3 = 3a\omega\phi$, fiet vel $\phi = \alpha V\omega$ vel $\phi = \beta\omega^2$. Priori casu erit $\alpha^3\omega V\omega = 3\alpha a\omega V\omega$, ideoque $\alpha = V3a$. Hinc posito $x = \omega$ erit $y = \pm V3a\omega$. Vnde etiamsi ω negatiue accipi nequeat, tamen binorum ipsius y valorum alter maior erit quam 0, alter minor; hincque $y = 0$ neque maximum erit neque minimum. Sin autem statuatur $\phi = \beta\omega^2$ erit $\omega^3 = 3a\beta\omega^3$, ideoque $\beta = \frac{1}{3a}$ & $\phi = \frac{\omega^2}{3a}$. Ergo hoc casu siue x capiatur $= +\omega$ siue $= -\omega$, valor ipsius

ipſius $y = \Phi$ nihilo erit maior, ideoque hoc caſu $y = 0$ erit minimum. Reſtat ergo tertius caſus ex aequatione $x^3 = 2a^3$ examinandus, qui dat $x = a\sqrt[3]{2}$, & $y = a\sqrt[3]{4}$. Qui vtrum ſit maximus an minimus? ex aequatione $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$ quaeratur differentiale ſecundum, quod ob $dy = 0$ & $ay - xx = 0$ erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$, cuius valor praeſenti caſu eſt $- \frac{2a\sqrt[3]{2}}{2a^2\sqrt[3]{2} - aa\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a}$, qui indicat valorem ipſius y eſſe maximum.

EXEMPLUM II.

Si functio y definiatur per hanc aequationem:
$$y^4 + x^4 + ay^3 + ax^3 = b^3x + b^3y,$$
inuenire eius maximos minimosue valores.

Cum per differentiationem oriatur
$$4y^3dy + 3ayydy - b^3dy = b^3dx - 3axxdx - 4x^3dx;$$
erit $\frac{dy}{dx} = \frac{b^3 - 3axx - 4x^3}{4y^3 + 3ayy - b^3}$, ponique oportet: $b^3 = 3axx + 4x^3$. Quaeſtio ergo huc reducitur, vt functionis vniformis $b^3 - ax^3 - x^4$ maxima ac minima indagentur, quae ſimul erunt maxima ſeu minima functionis y. Sit $a = 2$ & $b = 3$ ſeu proponatur haec aequatio $y^4 + x^4 + 2y^3 + 2x^3 = 27x + 27y$; erit $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$ & $4x^3 + 6xx - 27 = 0$,

quae

quae diuisa per $2x - 3 = 0$ dat $2xx + 6x + 9 = 0$, cuius posterioris radices cum sint imaginariae, erit $x = \frac{3}{2}$ & $y^4 + 2y^3 - 27y = \frac{459}{16}$, cuius singulae radices erunt vel maximae vel minimae. Cum autem sit $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x - 12xx}{4y^3 + 6yy - 27}$, qui posito $x = \frac{3}{2}$, si fuerit affirmatiuus, indicabit minimum, contra vero maximum.

EXEMPLUM III.

Si fuerit $y^m + ax^n = by^px^q$; *definire maxima & minima ipsius* y.

Per differentiationem fit $\frac{dy}{dx} = \frac{qby^px^{q-1} - nax^{n-1}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$, quo posito $= 0$, erit primo $x = 0$, si quidem n & q fuerint vnitate maiores; atque simul $y = 0$. Quo casu an detur maximum vel minimum, valores proximi sunt inuestigandi, quoniam quoque denominator fit $= 0$; quae inuestigatio ab exponentibus potissimum pendebit. Praeterea vero aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ dabit $y^p = \frac{na}{qb}x^{n-q}$, qui valor in proposita substitutus ponendo $\frac{na}{qb} = g$ dabit $g^{\frac{m}{p}}x^{\frac{mn-mq}{p}} + ax^n = \frac{na}{q}x^n$ seu $g^{\frac{m}{p}}x^{\frac{mn-mq-np}{p}} = \frac{(n-q)a}{q}$,

 vnde

vnde fit $x = \left(\frac{(n-q)a}{q}\right)^{p:(mn-mq-np)} : g^{m:(mn-mq-np)}$, ſimulque valor ipſius y innoteſcit. Deinde diſpiciendum eſt, vtrum differentio - differentiale $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{q(q-1)byp\,x^{q-2} - n(n-1)ax^{n-2}}{my^{m-1} - pbyp^{-1}x^q}$ obtineat valorem affirmatiuum an negatiuum? vt ex priori minimum, ex poſteriori vero maximum pronuncietur.

EXEMPLUM. IV.

Si fuerit $y^4 + x^4 = 4xy - 2$, *maxima & minima functionis* y *aſſignare.*

Differentiatione inſtituta fit $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$, hincque oritur $y = x^3$, erit ergo $x^{12} = 3x^4 - 2$ ſeu $x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$, quae aequatio reſoluitur in has $x^4 - 1 = 0$ & $x^8 + x^4 - 2 = 0$, poſteriorque in $x^4 - 1 = 0$ & $x^4 + 2 = 0$. Hinc erit bis vel $x = +1$ vel $x = -1$; vtroque vero caſu & denominator fractionis $\frac{dy}{dx}$ euaneſcit. Ad inueſtigandum ergo, vtrum his caſibus maximum minimumue locum habeat? ponamus $x = 1 - \omega$ & $y = 1 - \phi$; erit:

$$\begin{array}{llll} 1 - 4\phi & + 1 - 4\omega & = 4 - 4\omega - 4\phi - 2 \\ + 6\phi^2 & + 6\omega^2 & \quad + 4\omega\phi \\ - 4\phi^3 & - 4\omega^3 & \\ + \phi^4 & + \omega^4 & \end{array}$$

ideo-

ideoque $4\omega\phi = 6\phi^2 + 6\omega^2 - 4\phi^3 - 4\omega^3 + \phi^4 + \omega^4$, & ob ω & ϕ minima $4\omega\phi = 6\phi^2 + 6\omega^2$. Valor ergo ipſius ϕ erit imaginarius, ſiue ω capiatur affirmatiue ſiue negatiue. Seu ſi y & x deſignent coordinatas curuae, ea caſu $x = 1$ & $y = 1$ habebit punctum coniugatum. Neque ergo hic valor pro maximo neque pro minimo haberi poteſt, propterea quod antecedentes & conſequentes, cum quibus comparari deberet, fiunt imaginarii.

284. Si aequatio, qua relatio inter x & y exprimitur, ita fuerit comparata, vt functio ipſius y aequetur functioni ipſius x, puta $Y = X$; ad maxima minimaue inuenienda poni debebit $dX = 0$: fiet ergo y maximum vel minimum iisdem caſibus, quibus X fit maximum vel minimum. Simili modo ſi x tanquam functio ipſius y conſideretur, fiet x maximum vel minimum ſi $dY = 0$ hoc eſt ſi Y fuerit maximum vel minimum. Neque tamen hinc ſequitur y & x ſimul fieri maxima vel minima. Nam ſi fuerit $2ay - yy = 2bx - xx$, erit y maximum vel minimum, ſi fuerit $x = b$; eritque $y = a \pm \sqrt{(aa - bb)}$. Contra vero x fit maximum vel minimum, ſi fuerit $y = a$, fitque $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$, neque ergo fiet y maximum vel minimum, ſi $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$, quo tamen caſu x eſt maximum minimumue. Ceterum hoc caſu, ſi y habeat valores maximos vel minimos, x hac indole prorſus carebit: namque y maximum minimumue fieri nequit, niſi ſit $a > b$, quo caſu maximum minimumue ipſius x fit imaginarium.

285. Tum vero etiam euenire poteſt, vt non omnes radices aequationis $dX = 0$ praebeant maximos mimimosue valores pro y; ſi enim illa aequatio duas habuerit radices aequales, exinde neque maximum neque minimum conſequitur; hocque idem euenit, ſi quotcunque radices numero pares fuerint inter ſe aequales. Sic ſi proponatur aequatio $b(y-a)^2 = (x-b)^3 + c^3$; quia ſumtis differentialibus fit $2bdy(y-a) = 3dx(x-b)^2$, functio y neque maxima fiet neque minima poſito $x = b$, propterea quod hic occurrunt duae radices aequales. Sin autem x tanquam functio ipſius y ſpectetur, ea fiet maxima vel minima, ſi ſtatuatur $y = a$; eritque $x = b - c$ minimum. Quia denique in huiusmodi aequationibus $Y = X$ variabiles x & y inter ſe non permiſcentur, ſi ipſi x tribuitur valor, qui ſit radix aequationis $dX = 0$, omnes valores ipſius y, quotcunque fuerint reales, erunt maximi vel minimi; quod non euenit, ſi in aequatione ambae variabiles fuerint permixtae.

286. Quae praeterea ſuperſunt de natura maximorum ac minimorum exponenda, ea in ſequentem ſectionem reſeruamus, quoniam commodius ope figurarum menti repraeſentari atque explicari poſſunt. Pergamus ergo ad functiones, quae ex pluribus variabilibus ſunt compoſitae, atque inueſtigemus valores, quos ſingulis variabilibus tribui oportet, vt ipſa functio vel maximum vel minimum valorem obtineat. Ac primo quidem patet, ſi variabiles non fuerint inter ſe permixtae, ita vt functio propoſita ſit huiusmodi $X + Y$, exiſtente

X functione ipsius x, & Y ipsius y tantum, tum functionem propositam X + Y fore maximum, si simul X & Y maximum euadat: minimumque, si simul X & Y fiat minimum. Ad maximum ergo inueniendum inquirantur valores ipsius x, quibus X fiat maximum, similique modo valores ipsius y, quibus Y fit maximum: hique valores pro x & y inuenti efficient functionem X + Y maximam, quod similiter de minimo erit tenendum. Cauendum ergo est, ne duo valores ipsarum x & y diuersae naturae combinentur, quorum ille reddat X maximum, hic vero Y minimum, aut contra. Hoc enim si fieret, functio X + Y neque maximum foret neque minimum. At huiusmodi functio X — Y fiet maxima, si X fuerit maximum simulque Y minimum; contra vero X — Y fiet minimum, si X fuerit minimum & Y maximum. Sin autem vtraque functio X & Y statueretur vel maxima vel minima, earum differentia X — Y neque foret maxima, neque minima; quae omnia sunt ex natura maximorum ac minimorum ante exposita clara & perspicua.

287. Si ergo quaerantur maximi minimiue valores functionis duarum variabilium; quaestio multo magis cautioni obnoxia est, quam si vnica fuerit variabilis. Non solum enim pro vtraque variabili casus, quibus maximum minimumue producitur, diligenter sunt distinguendi; sed etiam ex his bini eiusmodi sunt coniungendi, vt functio proposita fiat maximum vel minimum; id quod ex exemplis clarius patebit.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec duarum variabilium x *&* y *functio*:
$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3xx - 3x$
& quaerantur valores pro y *&* x *substituendi, vt haec functio maximum vel minimum obtineat valorem.*

Quoniam haec expressio in duas huiusmodi partes $Y + X$ resoluitur, quarum illa est functio ipsius y, haec vero ipsius x tantum; casus quibus vtraque fit maxima vel minima, inuestigentur. Cum igitur sit $Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y$, erit $\frac{dY}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$ qua expressione nihilo aequali posita, fiet per 4 diuiso $y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$, cuius radices sunt $y = 2$, & $y = 2 \pm \sqrt{3}$. Cum ergo sit $\frac{ddY}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9$; casu $y = 2$, prodibit maximum. Pro reliquis binis radicibus $y = 2 \pm \sqrt{3}$, quae oriuntur ex aequatione $yy - 4y + 1 = 0$ fiet $\frac{ddY}{12dy^2} = yy - 4y + 3 = 2$, vnde vtraque dat minimum. Erit autem his casibus vt sequitur.

$y = 2$	$Y = 8$ maximum
$y = 2 - \sqrt{3}$	$Y = -1$ minimum
$y = 2 + \sqrt{3}$	$Y = -1$ minimum

Simili modo cum sit $X = x^3 - 3xx - 3x$, erit $\frac{dX}{dx} = 3xx - 6x - 3$, vnde oritur haec aequatio $xx = 2x + 1$ &

& $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Est vero $\frac{ddX}{6dx^2} = x - 1 = \pm \sqrt{2}$. Ergo radix $x = 1 + \sqrt{2}$ dat minimum, nempe $X = -5 - 4\sqrt{2}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$ dat maximum, nempe $X = -5 + 4\sqrt{2}$. Quocirca formula proposita $X + Y = y^4 - 8y^3 - 18yy - 8y + x^3 - 3xx - 3x$ fiet maxima, si ponatur $y = 2$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, prodibitque $X + Y = 3 + 4\sqrt{2}$. Eadem autem formula $X + Y$ fiet minima, si sumatur vel $y = 2 - \sqrt{3}$ vel $y = 2 + \sqrt{3}$ & $x = 1 + \sqrt{2}$, vtroque casu erit $X + Y = -6 - 4\sqrt{2}$.

EXEMPLUM II.

Si proponatur haec functio duarum variabilium:

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y - x^3 + 3xx + 3x$$

quae quibus casibus fiat maxima vel minima inuestigetur.

Posito vt in praecedente exemplo habuimus, $Y = y^4 - 8y^2 + 18y^2 - 8y$ & $X = x^3 - 3xx - 3x$; formula proposita erit $Y - X$; ideoque fiet maxima, si Y fuerit maximum & X minimum Cum igitur hos casus iam ante eruerimus, patet $Y - X$ obtinere valorem maximum, si ponatur $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$; fietque $Y - X = 13 + 4\sqrt{2}$. Minimus vero valor ipsius $Y - X$ euadet, si Y sit minimum, & X maximum, quod euenit ponendo $y = 2 \pm \sqrt{3}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, fiet autem $Y - X = 4 - 4\sqrt{2}$. Ceterum in vtroque exemplo patet hos valores, quos inuenimus, neque omnium esse maximos neque minimos: nam si vtrinque poneretur verbi gratia $y = 100$ & $x = 0$, sine dubio maior prodiret valor eo,

quem inuenimus: ſimilique modo ponendo $y = 0$ & vel $x = -100$ vel $x = +100$ minor prodiret valor, quam ſunt illi, quos pro caſu minimi inuenimus. Probe ergo tenenda eſt idea ſupra expoſita, quam de natura maximorum ac minimorum dedimus. Scilicet eum valorem vocari maximum, qui maior ſit valoribus tam antecedentibus quam conſequentibus contiguis proximis; minimum autem eſſe eum, qui his valoribus tam antecedentibus quam conſequentibus fuerit minor. Sic in hoc exemplo eſt valor ipſius $Y - X$, qui prodit ponendo $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$ maior eſt iis, qui reſultat ſi ponatur $y = 2 \pm \omega$ & $x = 1 + \sqrt{2} \pm \phi$ ſumtis pro ω & ϕ quantitatibus ſatis exiguis.

288. His exemplis expeditis facilior erit via ad ſolutionem generalem indagandam. Denotet V functionem quamcunque duarum variabilium x & y, ſintque pro x & y valores inueniendi, qui functioni V inducant maximum vel minimum valorem. Cum igitur ad hoc efficiendum vtrique variabili x & y determinatus valor tribui debeat; ponamus alteram y iam habere eum valorem, qui requiritur ad functionem V vel maximam vel minimam reddendam: hocque poſito tantum opus erit, vt pro altera x idoneus quoque valor inueſtigetur, quod fiet, dum functio V differentiatur ponenda ſola x variabili, differentialeque nihilo aequale ſtatuitur. Simili modo ſi fingamus variabilem x iam eum habere valorem, qui aptus ſit ad functionem V vel maximam vel minimam efficiendam, valor ipſius y reperietur differentian-

tiando V posita sola y variabili, hocque differentiale nihilo aequali ponendo. Hinc si differentiale functionis V fuerit $= P\,dx + Q\,dy$, oportebit esse & $P = 0$ & $Q = 0$, ex quibus duabus aequationibus valores vtriusque variabilis x & y erui poterunt.

289. Quoniam vero hoc pacto sine discrimine reperiuntur valores pro x & y, quibus functio V vel maxima vel minima redditur; casus, quibus vel maximum vel minimum oritur, probe a se inuicem sunt distinguendi. Vt enim functio V fiat maxima, necesse est vt ambae variabiles ad hoc conspirent; namque si altera maximum exhiberet, altera minimum, ipsa functio neque maxima neque minima euaderet. Quocirca inuentis ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ valoribus ipsarum x & y inquirendum est, vtrum ambo simul functioni V vel maximum vel minimum valorem inducant; atque tum demum, cum compertum fuerit vtriusque variabilis valorem hinc erutum pro maximo valere, affirmare poterimus functionem hoc casu maximum valorem induere. Quod idem de minimo erit tenendum, ita vt functio V minimum valorem adipisci nequeat, nisi simul ambae variabiles x & y minimum producant. Hinc ergo omnes illi casus reiici debebunt, quibus altera variabilis maximum, altera vero minimum indicare deprehendetur. Interdum vero etiam euenit, vt alterius vel etiam vtriusque variabilis valores ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ oriundi neque maximum neque minimum exhibeant, qui casus proinde pariter tanquam prorsus inepti erunt reiiciendi.

290. Vtrum autem valores pro x & y reperti valeant pro maximo an minimo? de vtroque seorsim simili modo inuestigabitur, quo supra, cum vnica adesset variabilis, sumus vsi. Ad iudicium scilicet de variabili x instituendum consideretur altera y tanquam constans, & cum sit $dV = P\,dx$ seu $\frac{dV}{dx} = P$, differentietur P denuo posito y constante, vt prodeat $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$, ac dispiciatur, vtrum valor ipsius $\frac{dP}{dx}$, postquam loco x & y valores ante inuenti fuerint substituti, fiat affirmatiuus an negatiuus; priori enim casu indicabitur minimum, posteriori vero maximum. Simili modo cum posito x constante sit $dV = Q\,dy$ seu $\frac{dV}{dy} = Q$, differentietur Q denuo posita sola y variabili, & examinetur valor $\frac{dQ}{dy}$, substitutis loco x & y valoribus, qui ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ sunt inuenti; qui si fuerit affirmatiuus, declarabit minimum, contra vero maximum. Hinc ergo colligitur, si ex valoribus pro x & y inuentis formulae $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ induant valores diuersis signis affectos altera scilicet affirmatiuum, altera negatiuum, tum functionem V neque maximam neque minimam effici; sin autem vtraque formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiat affirmatiua, minimum resultabit: contraque, si vtraque fiat negatiua, maximum.

291.

291. Quodſi vero altera formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$, vel etiam vtraque, ſi pro x & y valores inuenti ſubſtituantur, euaneſcat, tum progrediendum erit ad differentialia ſequentia $\frac{ddP}{dx^2}$ & $\frac{ddQ}{dy^2}$, quae niſi pariter euaneſcant, neque maximum neque minimum habebit locum; ſin autem euaneſcant, iudicium ex formulis differentialibus ſequentibus $\frac{d^3P}{dx^3}$ & $\frac{d^3Q}{dy^3}$ erit petendum, ſimilique modo inſtituendum, quo pro formulis $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ eſt factum. Quo autem, quibus caſibus hoc vſu veniat, clarius exponamus, prodierit valor $x = \alpha$, qui ſi formulam $\frac{dP}{dx}$ reddat euaneſcentem, neceſſe eſt vt $\frac{dP}{dx}$ factorem habeat $x - \alpha$; qui factor ſi fuerit ſolitarius, neque ſimul alium ſibi habeat aequalem ſocium, neque maximum neque minimum indicabitur, quod idem euenit ſi $\frac{dP}{dx}$ factorem habuerit $(x-\alpha)^3$, vel $(x-\alpha)^5$, &c. Sin autem factor fuerit $(x-\alpha)^2$, vel $(x-\alpha)^4$, &c. tum quidem maximum vel minimum indicabitur; at inſuper videndum erit, vtrum cum caſu, per y indicato conſentiat.

292. Labor autem his caſibus ad differentialia vlteriora progrediendi mirifice ſubleuari poterit: ſi enim ponamus, vt rem generalius complectamur, inuentum eſſe

esse $\alpha x + \beta = 0$, atque formulam $\frac{dP}{dx}$ factorem habere $(\alpha x + \beta)^2$, ita vt sit $\frac{dP}{dx} = (\alpha x + \beta)^2 T$, quia est $\alpha x + \beta = 0$, fiet $\frac{d^3P}{dx^3} = 2\alpha^2 T$, hincque ob $2\alpha^2$ affirmatiuum, ex ipsa quantitate T iudicium absolui poterit; quae si induet valorem affirmatiuum, pro minimo, contra vero pro maximo pronunciabit. Hocque idem subsidium in maximorum minimorumque inuestigatione, si vnica insit variabilis adhiberi poterit, ita vt nunquam opus sit ad altiora differentialia ascendere. Quin etiam nequidem ad differentialia secunda procedere opus erit: si enim ex aequatione $P = 0$, fiat $\alpha x + \beta = 0$, necesse est vt P factorem habeat $\alpha x + \beta$; sit $P = (\alpha x + \beta)T$, & cum sit $\frac{dP}{dx} = \alpha T + (\alpha x + \beta)\frac{dT}{dx}$, ob $\alpha x + \beta = 0$, erit $\frac{dP}{dx} = \alpha T$, hincque iam ipse alter factor T, prout valor ipsius αT fuerit vel affirmatiuus vel negatiuus, statim vel minimum vel maximum indicabit.

293. His igitur traditis praeceptis haud difficile erit, si functio quaecunque duas variabiles inuoluens fuerit proposita, casus inuestigare, quibus haec functio fiat vel maxima vel minima. Si quae insuper notanda fuerint, ea ipsa exemplorum euolutio suggeret, quamobrem aliquot exemplis regulas datas illustrari expediet.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista functio duarum variabilium $V = xx + xy + yy - ax - by$, quae quibus casibus fiat vel maxima vel minima inquiratur.

Cum sit $dV = 2xdx + ydx + xdy + 2ydy - adx - bdy$, si comparetur cum forma generali $dV = Pdx + Qdy$ erit $P = 2x + y - a$ & $Q = 2y + x - b$: vnde formabuntur istae aequationes $2x + y - a = 0$ & $2y + x - b = 0$, quibus coniunctis eliminando y fiet $x - b = 4x - 2a$, ideoque $x = \frac{2a - b}{3}$, & $y = a - 2x = \frac{2b - a}{3}$. Cum igitur sit $\frac{dP}{dx} = 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 2$, vtraque ostendit minimum; ex quo concludimus formulam $xx + xy + yy - ax - by$ fieri minimam, si ponatur $x = \frac{2a - b}{3}$ & $y = \frac{2b - a}{3}$, prodibitque hoc modo $V = -\frac{3aa + 3ab - 3bb}{9} = -\frac{aa + ab - bb}{3}$, qui cum sit vnicus, omnium erit minimus. Vnico ergo modo fieri potest $xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3}$, & quia minor fieri nequit, erit haec aequatio $xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3} - cc$ impossibilis.

EXEMPLUM II.

Si proponatur formula $V = x^3 + y^3 - 3axy$, *quaerantur casus, quibus* V *adipiscatur valorem maximum vel minimum.*

Ob $dV = 3xxdx + 3yydy - 3aydx - 3axdy$ erit $P = 3xx - 3ay$ & $Q = 3yy - 3ax$, vnde fit $ay = xx$ & $ax = yy$. Cum ergo fit $yy = x^4 : aa = ax$ erit $x^4 - a^3 x = 0$; ideoque vel $x = 0$ vel $x = a$. Priori casu fit $y = 0$, posteriori vero $y = a$. Quoniam ergo est $\frac{dP}{dx} = 6x$, $\frac{ddP}{dx^2} = 6$ & $\frac{dQ}{dy} = 6y$ atque $\frac{ddQ}{dy^2} = 6$; priori ergo casu, quo $x = 0$ & $y = 0$, neque maximum neque minimum resultat. Posteriori vero casu quo & $x = a$ & $y = a$ minimum prodit, si quidem a fuerit quantitas affirmatiua, fietque $V = -a^3$, qui autem valor tantum minor est proximis antecedentibus & consequentibus: nam sine dubio V multo minorem induere potest valorem, si vtrique variabili x & y valores negatiui tribuantur.

EXEMPLUM III.

Proposita sit haec functio $V = x^3 + ayy - bxy + cx$, *cuius valores maximi seu minimi inquirantur.*

Quia est $dV = 3xxdx + 2aydy - bydx - bxdy + cdx$ erit $P = 3xx - by + c$ & $Q = 2ay - bx$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis erit $y = \frac{bx}{2a}$, ideoque

$3xx - \frac{bbx}{2a} + c = 0$ seu $xx = \frac{2bbx - 4ac}{12a}$ vnde fit $x = \frac{bb \pm \sqrt{(b^4 - 48aac)}}{12a}$. Nisi ergo sit $b^4 - 18aac > 0$, neque maximum neque minimum habet locum. Ponamus ergo esse $b^4 - 48aac = bbff$, vt sit $c = \frac{bb(bb-ff)}{48aa}$; erit $x = \frac{bb \pm bf}{12a}$ & $y = \frac{bb(b \pm f)}{24aa}$. Quoniam porro est $\frac{dP}{dx} = 6x$ & $\frac{dQ}{dy} = 2a$, fiet $\frac{dP}{dx} = \frac{b(b \pm f)}{2}$. Nisi ergo $2a$ & $\frac{b(b \pm f)}{2a}$ sint quantitates eiusdem signi, neque maximum neque minimum habet locum. At si sint ambae vel affirmatiuae vel ambae negatiuae, quod euenit, si earum productum $b(b \pm f)$ fuerit affirmatiuum; tum functio V euadet minimum, si a sit quantitas affirmatiua; contra vero maximum, si a sit quantitas negatiua. Hinc si fuerit $f = 0$ seu $c = \frac{b^4}{48aa}$, ob bb quantitatem affirmatiuam, functio V euadet minima, si a sit quantitas positiua, ponaturque $x = \frac{bb}{12a}$ & $y = \frac{b^3}{24aa}$; contra vero si a sit negatiuum, istae substitutiones producent maximum. Si sit $f < b$, duobus casibus oritur vel maximum vel minimum: at si $f > b$, tum casus tantum $x = \frac{b(b+f)}{12a}$ & $y = \frac{bb(b+f)}{24aa}$ praebebit maximum minimumue, prout a fuerit vel negatiuum vel af-

firmatiuum. Sit $a = 1$, $b = 3$ & $f = 1$, vt habeatur haec formula $V = x^3 + yy - 3xy + \frac{3}{2}x$, haec fiet minima ob a affirmatiuum, si ponatur vel $x = 1$ & $y = \frac{3}{2}$ vel $x = \frac{1}{2}$ & $y = \frac{3}{4}$. Priori casu oritur $V = \frac{1}{4}$, posteriori vero $V = \frac{5}{16}$. Interim tamen patet loco x numeris negatiuis ponendis multo minores valores pro V oriri posse. Ita ergo intelligi debet valor ipsius $V = \frac{1}{4}$ minor esse, quam si ponatur $x = 2 + \omega$ & $y = 3 + \phi$; dummodo sint ω & ϕ numeri parui, siue affirmatiui siue negatiui; limes autem quem ω transgredi non debet est $-\frac{15}{4}$; nam si $\omega < -\frac{15}{4}$ fieri poterit vt V fiat minor quam $\frac{1}{4}$.

EXEMPLUM IV.

Inuenire maxima vel minima huius functionis:

$$V = x^4 + y^4 - axxy - axyy + ccxx + ccyy.$$

Sumto differentiali erit $P = 4x^3 - 2axy - ayy + 2ccx$ & $Q = 4y^3 - axx - 2axy + 2ccy$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis, si a se inuicem subtrahantur erit: $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$, quae cum sit diuisibilis per $x - y$, erit primo $y = x$, atque $4x^3 - 3axx + 2ccx = 0$, quae dat $x = 0$ & $4xx = 3ax - 2cc$ seu $x = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$. Si sumamus $x = 0$, erit quoque $y = 0$; & ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2ay + 2cc$, atque $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2ax + 2cc$, fiet functio V minima $= 0$.

Sin

Sin statuamus $x = y = \frac{3a \pm V(9aa - 32cc)}{8}$, si quidem fuerit $9aa > 32cc$, ob $4xx = 3ax - 2cc$, erit $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 12xx - 2ax + 2cc = 7ax - 4cc = \frac{21aa - 32cc \pm 7aV(9aa - 32cc)}{8}$, qui valor cum sit semper affirmatiuus ob $32cc < 9aa$, valor V hoc quoque casu fit minimus, eritque $V = \frac{-27}{256}a^4 + \frac{9}{16}aacc - \frac{1}{2}c^4 \mp \frac{a}{256}(9aa - 32cc)^{\frac{3}{2}}$. Diuidamus autem aequationem $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$ per $x - y$ fietque $4xx + 4xy + 4yy + ax + ay + 2cc = 0$. At ex aequatione $P = 0$, erit $yy = -2xy + \frac{4}{a}x^3 + \frac{2ccx}{a}$, quo valore in illa substituto fit

$$y = \frac{16x^3 + 4axx + aax + 8ccx + 2acc}{4ax - aa}.$$

Verum illa dat $y = -x \pm V\frac{4x^3 + axx + 2ccx}{a}$, vnde efficitur:

$$16x^3 + 8axx + 4ccx + 2acc = (4x - a)V(4ax^3 + aaxx + 2accx);$$

quae ad rationalitatem perducta, dat

$$\begin{array}{llllll} 256x^6 + 192ax^5 + 80aa & x^4 + 4a^3 & x^3 - a^4 & x^2 - 2a^3cc & x + 4a^2c^4 = 0 \\ + 128cc & + 96acc & + 48aacc & + 16ac^4 & \\ & & + 16c^4 & & \end{array}$$

cuius radices, si quas habet, reales indicabunt maxima vel minima functionis V, si quidem $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiant quantitates eodem signo affectae.

EXEMPLUM V.

Inuenire maxima & minima huius expressionis:

$$x^4 + mxxyy + y^4 + aaxx + naaxy + aayy = V.$$

Facta differentiatione erit:

$$P = 4x^3 + 2mxyy + 2aax + naay = 0$$
$$Q = 4y^3 + 2mxxy + 2aay + naax = 0$$

quae aequationes inuicem vel subtractae vel additae dant:

$$(4xx + 4xy + 4yy - 2mxy + 2aa - naa)(x-y) = 0$$
$$(4xx - 4xy + 4yy + 2mxy + 2aa + naa)(x+y) = 0$$

quae diuisae per $x - y$ & $x + y$, & denuo vel additae vel subtractae dant:

$$4xx + 4yy + 2aa = 0 \ \& \ 4xy - 2mxy - naa = 0.$$

Ex quarum posteriori fit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, prior autem reales valores non admittit. Tres igitur habemus casus:

I. Si $y = x$, eritque $4x^3 + 2mx^3 + 2aax + naax = 0$, vnde fit vel $x = 0$ vel $2(2+m)xx + (2+n)aa = 0$. Sit $x = 0$, erit quoque $y = 0$, atque ob $\frac{dP}{dx} = 12xx + 2myy + 2aa$ & $\frac{dQ}{dy} = 12yy + 2mxx + 2aa$, hoc casu fiet $V = 0$ minimum, si quidem coefficiens aa fuerit affirmatiuus. Alter casus dat $xx = -\frac{(n+2)aa}{2(m+2)}$, quae realis esse nequit nisi sit $\frac{n+2}{m+2}$ numerus negatiuus. Sit $\frac{n+2}{m+2} = -2kk$

seu

ſeu $n = -2kkm - 4kk - 2$, erit $x = \pm ka$ & $y = \pm ka$. At $\frac{dP}{dx} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$ & $\frac{dQ}{dy} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$, quae cum ſint aequales, erit V vel minimum vel maximum, prout iſtae quantitates fuerint vel affirmatiuae vel negatiuae.

II. Sit $y = -x$, eritque $2(m+2)x^3 = (n-2)aax$ ergo vel $x = 0$ vel $xx = \frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$. Prior radix $x = 0$ recidit in praecedentem. Poſterior vero erit realis ſi $\frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$ fuerit quantitas affirmatiua: & cum fiat $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ prodibit vel maximum vel minimum.

III. Sit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, erit $4x^3 + \frac{mn^2a^4}{2(2-m)^2x} + 2aax + \frac{nna^4}{2(2-m)x} = 0$ ſeu $4x^4 + 2aaxx + \frac{nna^4}{(2-m)^2} = 0$, cuius aequationis nulla radix eſt realis, niſi ſit aa quantitas negatiua.

EXEMPLUM VI.

Propoſita ſit haec functio determinata:

$$V = x^4 + y^4 - xx + xy - yy,$$

cuius valores maximi vel minimi inueſtigentur.

Cum hinc fiat $P = 4x^3 - 2x + y = 0$ & $Q = 4y^3 - 2y + x = 0$ erit ex priori $y = 2x - 4x^3$, qui in altera ſubſtitutus dat $256x^9 - 384x^7 + 192x^5 - 40x^3 + 3x = 0$.

Cuius

Cuius vna radix eſt $x = 0$, vnde fit quoque $y = 0$. Ergo hoc caſu ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2$ prodit maximum $V = 0$.

Diuiſa autem aequatione inuenta per x erit:

$$256x^8 - 384x^6 + 192x^4 - 40xx + 3 = 0,$$

quae factorem habet $4xx - 1$, vnde fit $4xx = 1$ & $x = \pm\frac{1}{2}$; atque $y = \pm\frac{1}{2}$, tum vero erit $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 1$, vtroque ergo caſu oritur minimum $V = -\frac{1}{8}$.

Diuidatur illa aequatio per $4xx - 1$, atque obtinebitur:

$$64x^6 - 80x^4 + 28xx - 3 = 0,$$

quae denuo bis continet $4xx - 1 = 0$; ita vt praecedens caſus oriatur. Praeterea vero inde fit $4xx - 3 = 0$, & $x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$; cui reſpondet $y = \frac{\mp\sqrt{3}}{2}$. Erit igitur quoque $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 7$, ideoque fiet V minimum $= -\frac{9}{8}$; qui eſt valor omnium minimus, quos quidem functio V recipere poteſt: & hanc ob rem iſta aequatio $V = -\frac{9}{8} - cc$ ſemper eſt impoſſibilis. Hinc autem patet via determinandi maxima & minima functionum, quae tres pluresue variabiles inuoluunt.

CAPUT

CAPUT XII.

DE VSU DIFFERENTIALIUM IN INUESTIGANDIS RADICIBUS REALIBUS AEQUATIONUM.

294.

Natura maximorum ac minimorum viam nobis patefacit ad indolem radicum aequationum, vtrum ſint reales an imaginariae, cognoſcendam. Sit enim propoſita aequatio cuiuscunque ordinis:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

cuius radices ponamus eſſe p, q, r, s, t, &c. ita vt p ſit minima, q ea quae ratione magnitudinis ſequitur, ſicque & reliquae radices ſecundum ordinem quantitatis ſint diſpoſitae: ſcilicet ſit $q > p$; $r > q$; $s > r$; $t > s$ &c. Aſſumamus autem omnes radices aequationis eſſe reales, eritque exponens maximus n ſimul numerus radicum p, q, r, &c. Conſideremus quoque has radices omnes tanquam inter ſe inaequales; hinc tamen aequales radices non excluduntur, propterea quod radices inaequales, ſi earum differentia abeat in infinite paruam, fiant aequales.

295. Quoniam propoſita expreſſio $x^n - Ax^{n-1} + \&c.$ tum ſolum fit nihilo aequalis, cum loco x aliquis valor ex p, q, r, &c. ſubſtituitur, reliquis vero caſibus omnibus non euaneſcit, ponamus generatim:

 $x^n -$

$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = z$

ita vt z ſpectari poſſit tanquam functio ipſius x. Fingamus nunc pro x ſucceſſiue ſubſtitui valores determitos, incipiendo a minimo $x = -\infty$, atque continuo maiores in locum ipſius x collocari; perſpicuumque eſt z nacturum hinc eſſe valores vel nihilo maiores vel nihilo minores, neque prius eſſe euaniturum, quam ponatur $x = p$; quo caſu fiet $z = 0$. Augeantur valores ipſius x vltra p, atque valores ipſius z vel affirmatiui vel negatiui fient, donec perueniatur ad valorem $x = q$; quo caſu iterum erit $z = 0$. Neceſſe ergo eſt, vt cum valores ipſius z ab 0 iterum ad 0 acceſſerint, interea z habuerit valorem vel maximum vel minimum; maximum ſcilicet ſi valores ipſius z, dum x intra limites p & q verſabatur, fuerint affirmatiui, minimum, ſi fuerint negatiui. Simili modo dum x vltra q ad r vsque augetur, functio z maximum vel minimum attinget: maximum nimirum ſi ante fuerit minimum, & contra. Supra enim vidimus maxima & minima ſe mutuo alternatim excipere.

296. Quare cum inter binas quasuis radices *ipſius* x exiſtat caſus, quo functio z fit maximum vel minimum; erit numerus maximorum & minimorum, quae in functione z implicantur, vnitate minor, quam numerus radicum realium; atque ita quidem alternatim ſe excipient, vt maximi ipſius z valores ſint affirmatiui, minimi negatiui. Quod ſi viciſſim functio z habeat maximum vel ſaltem valorem affirmatiuum caſu $x = f$, atque minimum ſeu ſaltem negatiuum

caſu

casu $x = g$; quoniam dum valores ipsius x ab f ad g transeunt, functio z ab affirmatiuo abit in negatiuum necesse, est vt interea per o transierit, & hancobrem dabitur radix ipsius x intra limites f & g contenta. Nisi autem haec conditio adsit, vt valores maximi minimique ipsius z fiant alternatim affirmatiui & negatiui, illa conclusio non sequitur. Si enim dentur functionis z minima, quae quoque sint affirmatiua, fieri potest vt valor ipsius z a maximo ad sequens minimum transeat, cum tamen interea non euanescat. Ceterum ex dictis intelligitur, etiamsi aequationis propositae non omnes radices fuerint reales, tamen semper inter binas quasque dari maximum vel minimum; etiamsi propositio conuersa generatim non valeat, vt inter bina quaeuis maxima seu minima radix realis contineatur: valet autem adiecta conditione, si alter valor ipsius z fuerit affirmatiuus, alter negatiuus.

297. Quoniam ergo supra vidimus, valores ipsius x, quibus functio:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c.$$

fit maximum vel minimum, esse radices aequationis differentialis huius:

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

manifestum est, si aequationis $z = 0$ omnes radices, quarum numerus est $= n$ fuerint reales, tum quoque omnes radices aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fore reales. Cum

 enim

enim functio z tot habeat maxima vel minima, quot numerus $n-1$ continet vnitates, necesse est vt aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ totidem habeat radices reales; ideoque omnes eius radices erunt reales. Ex quo simul perspicitur, functionem z plura maxima minimaue habere non posse, quam $n-1$. Habemus ergo hanc regulam latissime potentem; si aequationis $z=0$ omnes radices fuerint reales, tum quoque aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ omnes radices habebit reales. Vnde vicissim sequitur, si aequationis $\frac{dz}{dx}=0$ non omnes radices fuerint reales, tum quoque non omnes aequationis $z=0$ radices reales fore.

298. Quia inter binas quasuis aequationis $z=0$ radices reales datur vnus casus, quo functio z fit maximum vel minimum; sequitur si aequatio $z=0$ duas habeat radices reales, tum aequationem $\frac{dz}{dx}=0$ necessario vnam radicem habituram esse realem. Pariter si aequatio $z=0$ tres habeat radices reales, tum aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ certo duas habebit radices reales. Atque generatim si aequatio $z=0$ habeat m radices reales, necesse est vt aequationis $\frac{dz}{dx}=0$ ad minimum sint $m-1$ radices reales. Quare si aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ pauciores habeat radices reales quam $m-1$, tum vicissim aequatio $z=0$ certo pauciores quam m habebit radices reales. Cauendum autem

tem eſt, ne propoſitio conuerſa pro vera habeatur; etiamſi enim aequatio differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$ aliquot vel adeo omnes radices ſuas habeat reales, tamen non ſequitur, aequationem $z = 0$ vllam habituram eſſe radicem realem. Fieri enim poteſt, vt aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ omnes radices ſint reales, cum tamen aequationis $z = 0$ omnes radices ſint imaginariae.

299. Interim tamen, ſi conditio ſupra memorata adiiciatur, propoſitio conuerſa ita proponi poterit, vt ex radicibus realibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, numerus radicum realium aequationis $z = 0$ certo cognoſci poſſit. Ponamus enim α, β, γ, δ, &c. eſſe radices reales aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, inter quas α ſit maxima, reliquae vero ordine magnitudinis ſe inuicem ſequantur. His igitur valoribus loco x ſubſtitutis functio z obtinebit vel maximos vel minimos valores alternatim. Cum autem functio z fiat $= \infty$, ſi ponatur $x = \infty$, patet eius valores continuo decreſcere debere, dum valores ipſius x ab ∞ vsque ad α diminuuntur; ex quo, caſu $x = \alpha$, fiet z minimum. Quodſi ergo hoc caſu $x = \alpha$ functio z valorem induat negatiuum, neceſſe eſt vt ante alicubi fuerit $= 0$, ſicque aequationis $z = 0$ radix dabitur realis $x > \alpha$; ſin autem poſito $x = \alpha$ functio z adhuc retineat valorem affirmatiuum, ante nusquam potuit eſſe

 mi-

minor, alias enim quoque daretur minimum antequam x ad α vsque diminueretur, quod esset contra hypothesin; hinc aequatio $z = 0$ nullam habere poterit radicem realem maiorem quam α. Si ergo ponamus posito $= \alpha$ fieri $z = \mathfrak{A}$, hoc modo iudicari poterit: si fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas affirmatiua, tum aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem α maiorem; sin autem $\mathfrak{A}$ fuerit quantitas negatiua, tum aequatio $z = 0$ vnam perpetuo habebit radicem realem α maiorem, neque plures.

300. Ad hoc iudicium vlterius persequendum

si ponatur	fiat
$x = \alpha$	$z = \mathfrak{A}$
$x = \beta$	$z = \mathfrak{B}$
$x = \gamma$	$z = \mathfrak{C}$
$x = \delta$	$z = \mathfrak{D}$
$x = \varepsilon$	$z = \mathfrak{E}$
&c.	&c.

Quia ergo $\mathfrak{A}$ fuit minimum, erit $\mathfrak{B}$ maximum, & quidem si $\mathfrak{A}$ fuerit affirmatiuum, erit quoque $\mathfrak{B}$ affirmatiuum, neque ergo inter limites α & β dabitur radix realis aequationis $z = 0$. Quare si haec aequatio nullam habeat radicem realem α maiorem, neque vllam habebit, quae esset maior quam β. Sin autem $\mathfrak{A}$ fuerit quantitas negatiua, quo casu vna datur aequationis radix $x > \alpha$; dispiciatur vtrum valor ipsius $\mathfrak{B}$ sit affirmatiuus an negatiuus? priori casu dabitur radix $x > \beta$, posteriori vero nulla dabitur radix intra limites α & β contenta. Simili modo cum $\mathfrak{B}$ fuerit maximum, erit $\mathfrak{C}$ minimum; quare si $\mathfrak{B}$ habuerit valorem negatiuum, multo

to magis $\mathfrak{C}$ erit negatiuum, nullaque hoc casu dabitur radix intra limites β & γ contenta. Ad si $\mathfrak{B}$ fuerit affirmatiuum, radix dabitur realis inter limites β & γ, si $\mathfrak{C}$ fiat negatiuum: sin autem $\mathfrak{C}$ quoque sit affirmatiuum, tum nulla dabitur radix inter limites β & γ contenta, similique modo iudicium vlterius erit instituendum.

301. Quo haec iudicia facilius intelligantur, ea in sequenti tabella complexus sum:

Aequatio $z = 0$ vnam habebit radicem realem, quae continetur intra limites	Si fuerit
$x = \infty$ & $x = \alpha$	$\mathfrak{A} = -$
$x = \alpha$ & $x = \beta$	$\mathfrak{A} = -$ & $\mathfrak{B} = +$
$x = \beta$ & $x = \gamma$	$\mathfrak{B} = +$ & $\mathfrak{C} = -$
$x = \gamma$ & $x = \delta$	$\mathfrak{C} = -$ & $\mathfrak{D} = +$
$x = \delta$ & $x = \varepsilon$	$\mathfrak{D} = +$ & $\mathfrak{E} = -$
&c.	&c.

Harumque propositionum conuersae & in negantes transmutatae pariter in omni rigore locum obtinent. Scilicet

Aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem, quae contineatur inter limites:	si non fuerit
$x = \infty$ & $x = \alpha$	$\mathfrak{A} = -$
$x = \alpha$ & $x = \beta$	$\mathfrak{A} = -$ & $\mathfrak{B} = +$
$x = \beta$ & $x = \gamma$	$\mathfrak{B} = +$ & $\mathfrak{C} = -$
$x = \gamma$ & $x = \delta$	$\mathfrak{C} = -$ & $\mathfrak{D} = +$
$x = \delta$ & $x = \varepsilon$	$\mathfrak{D} = +$ & $\mathfrak{E} = -$
&c.	&c.

Ope

Ope harum ergo regularum ex radicibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, ſi eae fuerint cognitae, non ſolum numerus radicum realium aequationis $z = 0$ colligitur, ſed etiam limites innoteſcunt, intra quos ſingulae iſtae radices contineantur.

EXEMPLUM.

Sit propoſita iſta aequatio: $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$ *quae an habeat radices reales & quot quaeritur.*

Aequatio differentialis erit $4x^3 - 28x + 24 = 0$ ſeu $x^3 - 7x + 6 = 0$, cuius radices ſunt 1, 2, & -3, quae ſecundum ordinem magnitudinis diſpoſitae dabunt

vnde erit

$\alpha = 2$	$\mathfrak{A} = -4$
$\beta = 1$	$\mathfrak{B} = -1$
$\gamma = -3$	$\mathfrak{C} = -129$

Ob $\mathfrak{A}$ negatiuum ergo aequatio propoſita habebit radicem realem > 2, at ob $\mathfrak{B}$ negatiuum, neque inter limites 2 & 1, neque inter limites 1 & -3 radicem habebit realem. Cum autem poſito $x = -3$ fiat $z = \mathfrak{C} = -129$, ac ſi ſtatuatur $x = -\infty$, fiat $z = +\infty$ neceſſe eſt, vt radix detur realis inter limites -3 & $-\infty$ contenta. Habebit ergo aequatio propoſita duas radices reales, alteram $x > 2$, alteram $x < -3$; ex quo duae radices erunt imaginariae. Simili modo ergo ex vltimo aequationis propoſitae maximo vel minimo iudicari debet,

bet, quo ex primo solo. Scilicet si aequatio proposita fuerit ordinis paris, vltimum siue maximum siue minimum (erit autem hoc casu minimum), si fuerit negatiuum radicem realem, sin affirmatiuum radicem imaginariam indicat. At pro aequationibus imparium graduum, quia posito $x = -\infty$ fit $z = -\infty$, si vltimum maximum fuerit affirmatiuum, radix realis, sin negatiuum, imaginaria indicatur.

302. Regula ergo pro cognoscendis radicibus realibus & imaginariis hoc modo commode exprimi poterit. Proposita aequatione quacunque $z = 0$, consideretur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$, cuius radices reales secundum ordinem quantitatis dispositae sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. tum posito $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, &c.
fiat $z = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, &c.
Iam si signa sint: $- + - + - +$ &c.
tot aequatio $z = 0$ habebit radices reales, quot habentur litterae α, β, γ, &c. & insuper vnam. Sin autem vna ex his literis maiusculis non habeat signum infra scriptum, tum binae radices imaginariae indicabuntur. Ita si $\mathfrak{A}$ haberet signum $+$, tum nulla daretur radix intra limites ∞ & β contenta. Si $\mathfrak{B}$ habeat signum $-$, nulla dabitur radix inter limites α & γ; &, si $\mathfrak{C}$ habeat signum $+$, nulla erit radix inter limites β & δ, & ita porro. Generatim autem praeter radices imaginarias hoc modo indicatas, aequatio $z = 0$ insuper tot habebit imaginarias, quot aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$.

303. Si eueniat, vt valorum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. aliquis euanescat, tum eo loco aequatio $z = 0$ duas habebit radices aequales. Scilicet si fuerit $\mathfrak{A} = 0$, tum habebit duas radices ipsi α aequales; sin sit $\mathfrak{B} = 0$, duae erunt radices $= \mathfrak{E}$. Hoc enim casu aequatio $z = 0$ vnam habebit radicem communem cum aequatione differentiali $\frac{dz}{dx} = 0$; supra autem demonstrauimus, hoc esse indicium duarum radicum aequalium. Sin autem aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ duas pluresue radices habeat aequales, tum si earum numerus fuerit par, neque maximum neque minimum indicabitur: vnde pro praesenti instituto radices aequales numero pares negligi poterunt. Sin autem numerus radicum aequalium aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fuerit impar, tum omnes praeter vnam in formatione iudicii reiiciendae sunt; nisi forte hoc casu ipsa quoque functio z euanescat. Si enim hoc eueniat aequatio $z = 0$ quoque habebit radices aequales & quidem vna plures, quam aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$. Sic si fuerit $\frac{dz}{dx} = (x - \zeta)^n R$, ita vt haec aequatio habeat n radices aequales ipsi ζ, si posito $x = \zeta$ quoque euanescat z, tum aequatio $z = 0$ habebit $n + 1$ radices aequales ipsi ζ.

304. Applicemus haec praecepta ad aequationes ſimpliciores, ac primo quidem a quadratica incipiamus. Sit igitur propoſita haec aequatio: $z = x^2 - Ax + B = o$: erit eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 2x - A$, qua facta $= o$, erit $x = \frac{1}{2}A$, ſeu $a = \frac{1}{2}A$. Subſtituatur hic valor loco x, fietque $z = -\frac{1}{4}AA + B = \mathfrak{A}$; vnde colligimus, ſi iſte valor ipſius $\mathfrak{A}$ fuerit negatiuus, hoc eſt ſi ſit $AA > 4B$, aequationem $xx - Ax + B = o$ habituram eſſe duas radices reales, alteram maiorem quam $\frac{1}{2}A$ alteram minorem. Sin autem valor ipſius $\mathfrak{A}$ fuerit affirmatiuus ſeu $AA < 4B$, tum ambae aequationis propoſitae radices erunt imaginariae. At ſi fuerit $\mathfrak{A} = o$ ſeu $AA = 4B$, tum aequatio propoſita habebit duas radices aequales, vtramque ſcilicet $= \frac{1}{2}A$. Quae cum ex natura aequationum quadraticarum ſint notiſſima, veritas horum principiorum non mediocriter illuſtratur, ſimulque eorum vtilitas in hoc negotio perſpicitur.

305. Progrediamur ergo ad aequationes cubicas ſimili modo inquirendas. Sit ergo propoſita aequatio $x^3 - Ax^2 + Bx - C = z = o$: cuius differentialis cum ſit $3xx - 2Ax + B = \frac{dz}{dx}$, ſi haec ponatur $= o$, fiet $xx = \frac{2Ax - B}{3}$, cuius aequationis vel ambae radices ſunt imaginariae, vel aequales, vel reales inaequales. Cum igitur hinc ſit $x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 3B)}}{3}$, ambae radi-

 ces

ces erunt imaginariae, ſi fuerit $AA < 3B$: hoc ergo caſu aequatio cubica propoſita vnicam habebit radicem realem, cuius alii limites non patent praeter $+\infty$ & $-\infty$. Sint iam ambae radices inter ſe aequales, ſeu $AA = 3B$, erit $x = \frac{A}{3}$. Niſi ergo ſimul fiat $z = 0$, hae duae radices pro nulla reputari debebunt, habebitque aequatio vt ante vnicam radicem realem; ſin autem caſu $x = \frac{A}{3}$ ſimul fiat $z = 0$, quod euenit, ſi fuerit $-\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C = 0$, ſeu $C = \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^3$; hoc eſt ſi fuerit $B = \frac{1}{3}A^2$ & $C = \frac{1}{27}A^3$, aequatio habebit tres radices aequales, ſingulas ſcilicet $= \frac{1}{3}A$. Euoluamus nunc tertium caſum, quo ambae radices aequationis differentialis ſunt reales & inter ſe inaequales, quod euenit ſi $AA > 3B$. Sit ergo $AA = 3B + ff$, ſeu $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, erunt ambae illae radices $x = \frac{A \pm f}{3}$. Fiet ergo $\alpha = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Quaerantur ergo valores ipſius z his reſpondentes $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$; & cum ambae radices contineantur in haec aequatione $xx = \frac{2}{3}Ax - \frac{1}{3}B$, fiet $z = -\frac{1}{3}Axx + \frac{2}{3}Bx - C = -\frac{2}{9}AAx + \frac{1}{9}AB + \frac{2}{3}Bx - C$. Hinc itaque oritur:

$$\mathfrak{A} = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^2f + \frac{2}{9}Bf - C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 - C$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB + \frac{2}{27}A^2f - \frac{2}{9}Bf - C = \frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3 - C$$

ob $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Si igitur fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas negatiua, quod euenit, ſi fuerit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, aequatio $z = 0$ vnam habebit radicem realem $> \alpha$, hoc

eſt

eſt maiorem quam $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Ponamus ergo eſſe $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ ſeu eſſe $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 + gg$; atque, vt vidimus, aequatio propoſita cubica habebit radicem realem $> \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Quales autem futurae ſint reliquae radices, ex valore $\mathfrak{B}$ intelligetur: erit autem $\mathfrak{B} = \frac{4}{27}f^3 - gg$; qui ſi fuerit affirmatiuus, aequatio inſuper duas habebit radices reales, priorem intra limites α & β, hoc eſt intra $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$ contentam, alteram vero minorem quam $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Sin autem fuerit $gg > \frac{4}{27}f^3$, ſeu $\mathfrak{B}$ negatiuum, tum aequatio habebit duas radices imaginarias. At ſi fuerit $\mathfrak{B} = 0$ ſeu $\frac{4}{27}f^3 = gg$ tum duae radices euadent aequales, vtraque $= \beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Denique ſi ſit valor ipſius $\mathfrak{A}$ affirmatiuus ſeu $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, tum aequatio duas habebit radices imaginarias, tertiaque erit realis & $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Atque ſi ſit valor ipſius $\mathfrak{A} = 0$, duae erunt radices aequales $= \alpha$, manente tertia $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$.

306. Quo igitur aequationis cubicae $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ omnes tres radices ſint reales, requiruntur tres conditiones. Primo vt ſit $B < \frac{1}{3}AA$: ſit ergo $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Secundo vt ſit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$. Tertio vt ſit $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Quae duae poſteriores conditiones eo redeunt, vt C contineatur intra hos limites $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$ ſeu intra hos limites $\frac{1}{27}(A+f)^2(A-2f)$ & $\frac{1}{27}(A-f)^2(A+2f)$. Quod ſi ergo harum conditionum vnica deſit, aequatio duas habebit radices imaginarias. Sic ſi fuerit $A = 3$,

 $B = 2$,

$B = 2$, erit $\frac{1}{3}ff = \frac{1}{3}AA - B = 1$ & $ff = 3$; vnde ista aequatio: $x^3 - 3xx + 2x - C = 0$ omnes radices reales habere nequit, nisi C contineatur intra limites $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ & $+\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Quare si fuerit vel $C < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ seu $C < -0,3849$, vel $C > +\frac{2\sqrt{3}}{9}$ seu $C > 0,3849$ aut coniunctim $CC > \frac{4}{27}$, aequatio vnicam habebit radicem realem.

307. Quoniam in omni aequatione secundus terminus tolli potest, ponamus esse $A = 0$, ita vt habeamus hanc aequationem cubicam $x^3 + Bx - C = 0$. Vt igitur huius aequationis omnes tres radices sint reales, necesse est vt primo sit $B < 0$, seu B debet esse quantitas negatiua. Sit ergo $B = -kk$, erit $ff = 3kk$, atque insuper requiritur, vt quantitas C contineatur intra hos limites $-\frac{2}{27}f^3$ & $+\frac{2}{27}f^3$; hoc est inter hos $-\frac{2}{9}kk\sqrt{3kk}$ & $+\frac{2}{9}kk\sqrt{3kk}$. Erit ergo $CC < \frac{4}{27}k^6$ seu $CC < -\frac{4}{27}B^3$. Vnica ergo conditione natura aequationum cubicarum, quae omnes tres radices habeant reales comprehendi poterit, dum dicemus esse oportere $4B^3 + 27CC$ quantitatem negatiuam. Sic enim iam postulatur, vt sit B quantitas negatiua, quia alioquin $4B^3 + 27CC$ negatiuum fieri non posset. Quocirca generatim affirmamus, aequationem $x^3 + Bx \pm C = 0$ omnes tres radices habituram esse reales, si fuerit $4B^3 + 27CC$ quantitas negatiua. Sin autem haec quantitas fuerit affirmatiua, tum vnicam fore realem, reliquas binas imaginarias; at si fiat

$4B^3 + 27CC = 0$, tum omnes quidem radices futuras esse reales, at binas inter se aequales.

308. Progrediamur ad aequationes biquadratas, in quibus etiam secundum terminum deesse ponamus. Sit ergo $x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0$. Statuamus $x = \frac{1}{u}$, eritque $1 + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 = 0$, cuius aequatio differentialis est $2Bu - 3Cu^2 + 4Du^3 = 0$, quae vnam habet radicem $u = 0$, tum vero erit $uu = \frac{6Cu - 4B}{8D}$ & $u = \frac{3C \pm \sqrt{(9CC - 32BD)}}{8D}$. Vt igitur omnes quatuor radices sint reales, primo requiritur, vt sit $9CC > 32BD$. Ponamus ergo esse $9CC = 32BD + 9ff$, erit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Hic C semper pro quantitate affirmatiua sumere poterimus, nisi enim talis fuerit, ponendo $u = -v$ talis euadet. Mox autem demonstrabimus omnes radices reales esse non posse, nisi sit B quantitas negatiua. Sit ergo $B = -gg$, eritque $9CC = 9ff - 32ggD$, & $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Atque duo casus erunt perpendendi, prout D sit quantitas affirmatiua vel negatiua.

I. Sit D quantitas affirmatiua, eritque $f > C$, ac tres ipsius u radices secundum quantitatis ordinem dispositae erunt 1°; $u = \frac{3C + 3f}{8D}$, 2°; $u = 0$, 3°; $u = \frac{3C - 3f}{8D}$.

Aequa-

Aequatio autem $u^4 - \frac{C u^3}{D} + \frac{B u^2}{D} + \frac{1}{D} = 0$, his valoribus loco u ſubſtitutis dabit ſequentes tres valores.

$$\mathfrak{A} = \frac{27 (C + f)^3 (C - 3f)}{4096 D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27 (C - f)^3 (C + 3f)}{4096 D^4} + \frac{1}{D}$$

quorum primus ac tertius debet eſſe negatiuus: vterque quidem ob C affirmatiuum & $C < f$ fit minor quam $\frac{1}{D}$. Oportet itaque eſſe $\frac{1}{D} < \frac{27 (C + f)^3 (3f - C)}{4096 D^4}$ & $\frac{1}{D} < \frac{27 (f - C)^3 (C + 3f)}{4096 D^4}$, ſeu $4096 D^3 < 27 (f + C)^3 (3f - C)$ & $4096 D^3 < 27 (f - C)^3 (C + 3f)$. At prior quantitas ſemper longe maior eſt poſteriori; vnde ſufficit, ſi fuerit $D^3 < \frac{27}{4096} (f - C)^3 (C + 3f)$, exiſtente $B = \frac{9 CC - 9 ff}{32 D}$ & $f > C$, atque $D > 0$. Si igitur fuerit D quantitas affirmatiua, C affirmatiua, B negatiua, vt ſit $f > C$, atque $D^3 < \frac{27}{4096} (f - C)^3 (C + 3f)$, hoc eſt $D < \frac{3}{16} (f - C) \sqrt[3]{(3f + C)}$, tum aequatio

omnes

omnes radices habebit reales. Sin autem fuerit $D > \frac{3}{16}(f-C)\sqrt[3]{(3f+C)}$, attamen $D < \frac{3}{16}(f+C)\sqrt[3]{(3f-C)}$; tum duae radices erunt reales & duae imaginariae. At ſi adeo fuerit $D > \frac{3}{16}(f+C)\sqrt[3]{(3f-C)}$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

II. Sit D quantitas negatiua puta $= -F$, manente C affirmatiua ac B negatiua, ob $B = \frac{9CC - 9ff}{32D} = \frac{9ff - 9CC}{32F}$, erit $C > f$. Cum igitur ſit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D} = -\frac{3C \mp 3f}{8F}$, tres valores ipſius u ſecundum ordinem magnitudinis diſpoſiti erunt 1°, $u = 9$; 2°, $u = -\frac{3C+3f}{8F}$; 3°, $u = -\frac{3C-3f}{8F}$, qui dabunt ſequentes valores

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

Cum igitur $\mathfrak{A}$ ſit quantitas negatiua, aequatio iam certo vnam, ac propterea quoque duas habebit radices reales. Vt autem omnes radices ſint reales, oportet vt $\mathfrak{B}$ ſit

 quan-

quantitas affirmatiua, ideoque $27(C-f)^3(C+3f) > 4096F^3$: tum vero necesse est, vt sit $\mathfrak{C}$ quantitas negatiua seu $27(C+f)^3(C-3f) < 4096F^3$. Quocirca vt omnes radices fiant reales, requiritur vt F^3 contineatur intra hos limites $\frac{27}{4096}(C+f)^3(C-3f)$ & $\frac{27}{4096}(C-f)^3(C+3f)$ seu vt F contineatur intra limites $\frac{3}{16}(C+f)\sqrt[3]{(C-3f)}$ & $\frac{1}{16}(C-f)\sqrt[3]{(C+3f)}$; & nisi F contineatur intra hos limites, duae radices erunt imaginariae.

III. Ponamus iam B esse quantitatem affirmatiuam, & D pariter affirmatiuam, ob $B = \frac{9CC-9ff}{32D}$, erit $C > f$, & cum sit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$, radices ordine magnitudinis dispositae erunt 1°, $u = \frac{3(C+f)}{8D}$; 2°, $u = \frac{3(C-f)}{8D}$ & 3°; $u = 0$, vnde sequentes oriuntur valores:

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{D}$$

vbi cum $\mathfrak{C}$ sit quantitas affirmatiua, certo duae radices erunt imaginariae. Sin autem fuerit $\mathfrak{A}$ negatiuum, quod

quod euenit, si $4096 D^3 < 27(C+f)^3 (3f-C)$, duae radices erunt reales: sin fuerit $4096 D^3 > 27(C+f)^3 (3f-C)$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

IV. Maneat B affirmatiuum, sit autem D negatiuum $= -F$, ob $B = \frac{9ff-9CC}{32F}$, erit $f > C$ & ob $u = -\frac{3C\mp 3f}{8F}$, tres ipsius u radices secundum ordinem magnitudinis dispositae erunt $1°$, $u = \frac{3(f-C)}{8F}$; $2°$, $u = 0$; & $3°$, $u = -\frac{3(C+f)}{8F}$, vnde isti valores nascuntur.

$$\mathfrak{A} = -\frac{27(f-C)^3 (C+3f)}{4096 F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{27(C+f)^3 (3f-C)}{4096 F^4} - \frac{1}{F}$$

vbi ob $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ negatiua aequatio certo duas habet radices reales, at ob $\mathfrak{B}$ negatiuum, duae radices erunt imaginariae.

309. Si igitur ponamus litteras B, C, D quantitates affirmatiuas denotare, sequentes oriuntur casus diversi diiudicandi, qui ob $f = \sqrt{(CC - \frac{32}{9} BD)}$ huc redeunt.

I. Si aequatio sit $x^4 - Bx^2 \pm Cx + D = 0$. Omnes radices erunt reales, si fuerit

$$D < \tfrac{3}{16}\left[\sqrt{(CC + \tfrac{32}{9} BD)} - C\right] \sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC + \tfrac{32}{9} BD)} + C\right]}$$

 Duae

Duae radices erunt reales, duaeque imaginariae, ſi fuerit

$$D > \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}-C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}+C]}$$

at $D < \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}CD)}-C]}$

Omnes autem radices erunt imaginariae, ſi fuerit

$$D > \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}-C]}.$$

II. Si aequatio ſit $x^4 - Bx^2 \pm Cx - D = 0$. Duae radices ſemper ſunt reales, reliquae binae quoque erunt reales, ſi quantitas D contineatur intra hos limites.

$$D > \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[C-3\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}]}$$

$$D < \tfrac{3}{16}[C-\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}]\sqrt[3]{[C+3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}]}$$

niſi autem D contineatur intra hos limites, duae reliqua radices erunt imaginariae.

III. Si aequatio ſit $x^4 + Bx^2 \pm Cx + D = 0$. Duae radices ſemper erunt imaginariae. Reliquae vero duae erunt reales, ſi fuerit

$$D < \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}-C]}$$

Reliquae vero duae quoque erunt imaginariae, ſi fuerit

$$D > \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}-C]}$$

IV. Si aequatio ſit $x^4 + Bx^2 \pm Cx - D = 0$. Huius aequationis duae radices ſemper erunt reales, duae reliquae vero ſemper imaginariae.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Si proponatur haec aequatio $x^4 - 2xx + 3x + 4 = 0$ *quaeratur natura radicum, vtrum ſint reales an imaginariae.*

Quia hoc exemplum ad caſum primum pertinet, eſt $B = +2$; $C = 3$ & $D = 4$; vnde $CC + \frac{32}{9}BD = 9 + \frac{32.8}{9} = \frac{337}{9}$ & $\sqrt{}(CC + \frac{32}{9}BD) = \frac{\sqrt{}337}{3}$ vnde conditiones vt omnes radices ſint reales, ſunt

$$4 < \frac{3}{16}\left(3 + \frac{\sqrt{}337}{3}\right)\sqrt[3]{}(\sqrt{}337 - 3) = \frac{1}{16}(9 + \sqrt{}337)\sqrt[3]{}(\sqrt{}337 - 3)$$

$$4 < \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{}337}{3} - 3\right)\sqrt[3]{}(\sqrt{}337 + 3) = \frac{1}{16}(\sqrt{}337 - 9)\sqrt[3]{}(\sqrt{}337 + 3)$$

Adhibitis, approximationibus examinari debet ergo, vtrum ſit $4 < \frac{69}{16}$ & $4 < \frac{24}{16}$; quare cum prior tantum conditio locum habeat, aequatio habebit duas radices reales, & duas imaginarias.

EXEMPLUM II.

Propoſita ſit haec aequatio:

$$x^4 - 9xx + 12x - 4 = 0.$$

Quae cum pertineat ad caſum ſecundum, duas habebit radices reales. Ad reliquarum naturam inueſtigandam

 dam

dam, ob $B = 9$, $C = 12$ & $D = 4$, erit $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)}$ $= \sqrt{(144 - 32.4)} = 4$. Ideoque videndum est, vtrum sit

$$4 > \frac{3}{16} \cdot 16 \sqrt[3]{0}, \qquad \text{hoc est } 4 > 0$$

$$\& \; 4 < \frac{3}{16} \cdot 8 \sqrt[3]{24} \qquad \text{hoc est } 4 < 3\sqrt[3]{3}$$

quorum vtrumque cum eueniat, aequatio proposita quatuor habebit radices reales.

EXEMPLUM III.

Proposita sit haec aequatio:

$$x^4 + xx - 2x + 6 = 0.$$

Quae cum pertineat ad casum tertium, duae radices certo erunt imaginariae. Tum vero est $B = 1$; $C = 2$ & $D = 6$, ideoque $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{\left(4 - \frac{64}{3}\right)}$, quae quantitas cum sit imaginaria, & duae reliquae radices certo erunt imaginariae.

EXEMPLUM. IV.

Sit proposita aequatio haec:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 20 = 0.$$

Eliminetur primo secundus terminus, substituendo $x = y + 1$ fiet

$$\begin{array}{rcrrrrr}
x^4 & = & y^4 + 4y^3 & + 6yy & + 4y & + 1 \\
-4x^3 & = & -4y^3 & -12y^2 & -12y & -4 \\
+8x^2 & = & & +8y^2 & +16y & +8 \\
-16x & = & & & -16y & -16 \\
+20 & = & & & & +20 \\
\hline
\text{Ergo} & & y^4 & + 2yy & - 8y & + 9 & = 0
\end{array}$$

quae

quae cum pertineat ad casum tertium, duas radices habebit imaginarias. Tum vero ob $B = 2$, $C = 8$, $D = 9$, erit $V(CC - \frac{32}{9}.BD) = V(64 - 64) = 0$. Comparetur ergo $D = 9$ cum $\frac{3}{16}.8\sqrt[3]{-8} = -3$. Cum ergo sit $D = 9 > -3$, etiam duae reliquae radices erunt imaginariae.

EXEMPLUM V.

Sit proposita haec aequatio: $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$ *cuius radices constat esse*, 1, 2, 4. & − 3.

Quod si autem regulas applicemus, sublato secundo termino ponendo $x = y + 1$ fiet: $y^3 - 13yy + 12y + 0 = 0$ quae cum casu secundo comparata dat $B = 13$, $C = 12$, $D = 0$. Debet ergo esse $D > \frac{3}{16}.24.\sqrt[3]{-24}$; seu $0 > -9\sqrt[3]{3}$ & $D < 0$; cum igitur D non sit maius quam 0, aequatio quatuor radices reales habere indicatur. Si enim sit $D = 0$, altera aequatio abit in $D < \frac{3}{16}\left(\frac{16BD}{9C}\right)\sqrt[3]{4C}$ ideoque $1 < \frac{B}{3C}\sqrt[3]{4C}$, seu $27CC < 4B^3$: est vero $27.144 < 4.13^3$ seu $36.27 < 13^3$.

310. Opus foret maxime difficile, si simile iudicium ad aequationes altiorum graduum transferre vellemus, propterea quod aequationum differentialium radices plerumque exhiberi non possunt; quoties autem has radices assignare licet, ex traditis principiis facile colli-

colligitur, quot aequatio propoſita habeat radices reales & imaginarias. Hinc omnis aequationis, quae tantum ex tribus terminis conſtat, radices, vtrum ſint reales an imaginariae? definiri poterunt. Sit enim propoſita haec aequatio generalis:

$$x^{m+n} + Ax^{n} + B = 0 = z$$

Sumatur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = (m+n)x^{m+n-1} + nAx^{n-1}$, qua nihilo aequali poſita, erit primo $x^{n-1} = 0$; vnde ſi n fuerit impar numerus, nulla radix maximum minimumue exhibens oritur: ſin autem ſit n numerus par, vna radix in computum ducenda erit $x = 0$. Tum vero erit $(m+n)x^{m} + nA = 0$; quae aequatio, ſi m ſit numerus par, & A affirmatiua quantitas, nullam habet radicem realem. Hinc ſequentes caſus erunt expendendi.

I. *Sit* m *numerus par &* n *numerus impar*, & radix $x = 0$ non valebit. Si igitur fuerit A quantitas affirmatiua, nulla prorſus habebitur radix maximum minimumue exhibens; vnde ob $m+n$ numerum imparem aequatio propoſita vnicam habebit radicem realem. Sin autem fuerit A quantitas negatiua; puta $A = -E$, erit $x = \pm \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$: vnde $\alpha = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\beta = -\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$.

Ex quibus valoribus fit:

$$\mathfrak{A} = (x^{m} - E)x^{n} + B = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

atque $\mathfrak{B} = + \frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B.$ Si igitur

fuerit

fuerit igitur $\mathfrak{A}$ quantitas negatiua, seu $\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} > B$, aequatio vnam habebit radicem realem $> \alpha$. Si insuper fuerit $B > -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m}$, hoc est ambas conditiones in vnam complectendo, si fuerit $(m+n)^{m+n}B^m < m^m n^n E^{m+n}$, tum aequatio tres habebit radices reales: &, nisi haec conditio locum habeat, aequationis vnica radix erit realis. Valent haec de aequatione $x^{m+n} - Ex^n + B = 0$, si fuerit m numerus impar: vbi si E fuerit numerus negatiuus, aequatio semper vnicam radicem habebit realem.

II. Sint ambo numeri m & n impares, vt sit $m+n$ numerus par, nullaque radix $x = 0$ in computum veniat. Quia est $(m+n)x^m + nA = 0$, erit $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$, quae vnica radix si sit $= \alpha$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{mA}{m+n}x^n + B = -\frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Qui valor si fuerit negatiuus, aequatio proposita duas habebit radices reales, contra nullam. Aequatio ergo proposita $x^{m+n} + Ax^n + B = 0$ duas habebit radices reales, si fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n}B^m$; sin fuerit $m^m n^n A^{m+n} < (m+n)^{m+n}B^m$, nulla prorsus radix erit realis.

III. Sint ambo numeri m & n pares, erit $m+n$ pariter numerus par: vnaque radix $x = 0$ maximum mi-

nimumue praebebit: quae erit vnica, ſi A fuerit quantitas affirmatiua, vnde facto $\alpha = 0$, erit $\mathfrak{A} = B$. Quare ſi fuerit B quoque quantitas affirmatiua, aequatio nullam habebit radicem realem; ſin autem B ſit quantitas negatiua, duae habebuntur radices reales, neque plures, ſi quidem A fuerit quantitas affirmatiua. At ponamus eſſe A quantitatem negatiuam ſeu $A = -E$, erit $x = \pm \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; habebimusque tria maxima vel minima: nempe $\alpha = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; $\beta = 0$; $\gamma = -\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$. Quibus ipſius $z = x^{m+n} - Ex^n + B = 0$ reſpondent valores $\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$; $\mathfrak{B} = B$; $\mathfrak{C} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Si igitur B ſit quantitas negatiua, ob $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ negatiuas, aequatio duas tantum habebit radices reales, propterea quod quoque $\mathfrak{B} = B$ ſit negatiuum. At ſi B fuerit quantitas affirmatiua, aequatio quatuor habebit radices reales, ſi ſit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$. Nullam autem habebit radicem realem, ſi fuerit $(m+n)^{m+n} B^m < m^n n^n E^{m+n}$.

IV. Sit m numerus impar & n numerus par: atque radix $x = 0$ dabit maximum vel minimum. Praeterea vero erit $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$. Si ergo A ſit numerus

affir-

affirmatiuus, fiet $\alpha = 0$ & $\beta = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$; hincque $\mathfrak{A} = B$, & $\mathfrak{B} = \frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Quare si sit B quantitas negatiua, puta $B = -F$, atque insuper fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} F^m$, aequatio tres habebit radices reales; contra vnica tantum erit realis. Sin autem sit A quantitas negatiua puta $A = -E$, fiet $x = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\alpha = \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\beta = 0$, quibus respondent $\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$ & $\mathfrak{B} = B$. Quare aequatio tres habebit radices reales, si fuerit B quantitas affirmatiua, & $m^m n^n E^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$, quae proprietas nisi locum inueniat, aequatio vnicam habebit radicem realem.

311. Sint omnes coefficientes $= 1$, atque denotantibus μ & ν numeros integros, aequationes sequentes ita diiudicabuntur:

$x^{2\mu+2\nu-1} + x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$ vnicam habebit radicem realem:

$x^{2\mu+2\nu-1} - x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$, tres habebit radices reales, si fuerit

$(2\mu+2\nu-1)^{2\mu+2\nu-1} < (2\mu)^{2\mu}(2\nu-1)^{2\nu-1}$,

 quod

quod cum nunquam fieri poſſit, aequatio ſemper vnicam radicem realem habebit:

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} - 1 = 0$ duas habet radices reales.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} + 1 = 0$ nullam habet radicem realem.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} + 1 = 0$ nullam habet radicem realem.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} - 1 = 0$ duas habet radices reales.

$x^{2\mu+2\nu+1} + x^{2\nu} \pm 1 = 0$ vnicam habet radicem realem.

$x^{2\mu+2\nu+1} - x^{2\nu} \pm 1 = 0$ vnicam habet radicem realem.

Ceterum quia in caſu tertio ambo exponentes ſunt pares, is ponendo $xx = y$ ad formam ſimpliciorem reduci poteſt, ideoque hic caſus praetermitti poſſet. Quo facto affirmari poterit, nullam aequationem tribus terminis conſtantem plures tribus habere poſſe radices reales.

EXEMPLUM.

Quaerantur caſus, quibus aequatio haec $x^5 \pm Ax^2 \pm B = 0$ *tres habeat radices reales.*

Quia haec aequatio pertinet ad caſum quartum, patet quantitates A & B, eſſe debere ſignis contrariis affectas. Quare niſi huiusmodi habeat formam, vnicam habebit radicem realem: ſin autem aequatio propoſita fuerit huiusmodi

modi $x^5 \pm A x^2 \mp B = 0$, quo ea habeat tres radices reales, necesse est vt sit $3^3 2^2 A^5 > 5^5 B^3$ seu $A^5 > \frac{3125}{108} B^3$. Quodsi ergo fuerit $B = 1$, oportet esse, $A^5 > \frac{3125}{108}$, seu $A > 1,960132$. Si ergo sit $A = 2$ ista aequatio $x^5 - 2x^2 + 1 = 0$ tres habet radices reales, quarum cum vna sit $x = 1$; sequitur hanc aequationem biquadratam $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$, duas habere radices reales. Quod quidem tum ex his datis praeceptis intelligi potest, tum ex iis, quae in libro superiori sunt demonstrata, manifestum est, vbi ostendimus, quamuis aequationem paris gradus, cuius terminus absolutus sit numerus negatiuus, habere semper duas radices reales.

312. Ex his principiis quoque aequationes, quae constant quatuor terminis, diiudicari poterunt, dummodo aequationis differentialis radices commode exhiberi queant, quod euenit, si exponentes ipsius x vel in tribus anterioribus, vel in tribus posterioribus terminis sint in arithmetica progressione. Cum autem haec diiudicatio in genere suscepta ad plures perducatur casus, eam in nonnullis exemplis absoluamus.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec aequatio $x^7 - 2x^5 + x^3 - a = 0$.

Facto $z = x^7 - 2x^5 + x^3 - a$, erit $\frac{dz}{dx} = 7x^6 - 10x^4 + 3xx$, quo valore nihilo aequali posito fiet primo $xx = 0$,

qui duplex valor pro nullo reputandus. Tum vero erit $7x^4 = 10x^2 - 3$, vnde fit $x^2 = \frac{5 \pm 2}{7}$; & quatuor valores pro x emergent, qui secundum magnitudinem ordinati, sequentes pro z praebebunt valores:

$\alpha = 1$	$\mathfrak{A} = -a$
$\beta = +\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\mathfrak{B} = \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$
$\gamma = -\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\mathfrak{C} = \frac{-48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$
$\delta = -1$	$\mathfrak{D} = -a.$

Si ergo sit a numerus affirmatiuus, erit vel $a > \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$, vel $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$, priori casu ob $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, omnes negatiuas, aequatio proposita vnicam habebit radicem realem $x > 1$. Posteriori casu si $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$ aequatio tres habebit radices reales, primam > 1, secundam contentam inter limites 1 & $\sqrt{\frac{3}{7}}$, & tertiam intra limites $+\sqrt{\frac{3}{7}}$ & $-\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Sin a sit quantitas negatiua ponendo $x = -y$, aequatio perducetur ad formam priorem. Quo ergo aequatio proposita tres habeat radices reales, necesse est vt sit $a < 0{,}0916134$ vel $a < \frac{1}{11}$.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec aequatio:

$$ax^8 - 3x^6 + 10x^3 - 12 = 0.$$

Quia hic exponentes trium posteriorum terminorum sunt in arithmetica progressione, ponatur $x = \frac{1}{y}$ atque aequatio transmutabitur in hanc:

$a - 3y^2 + 10y^5 - 12y^8 = 0$, ponatur ergo $z = 12y^8 - 10y^5 + 3y^2 - a = 0$, eritque differentiando $\frac{dz}{dy} = 96y^7 - 50y^4 + 6y = 0$, ex qua aequatione primo fit $y = 0$; tum vero erit $y^6 = \frac{50y^3 - 6}{96}$ & $y^3 = \frac{25 \pm 7}{96}$, ideoque vel $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ vel $y = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$. His ergo tribus radicibus secundum magnitudinem dispositis, respondentes ipsius z valores ita se habebunt:

$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$	$\mathfrak{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - a$
$\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$	$\mathfrak{B} = \frac{99}{64}\sqrt[3]{\frac{9}{256}} - a = \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - a$
$\gamma = 0$	$\mathfrak{C} = -a.$

Quodsi ergo fuerit $a > \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, aequatio proposita duas habebit radices reales, alteram $> \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, alteram < 0:

at

at praeter has insuper habebit duas radices reales, si simul fuerit 𝔅 quantitas affirmatiua, hoc est, si fuerit $a < \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$. Quamobrem aequatio proposita quatuor habebit radices reales, si quantitas a contineatur intra limites $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$. & $\frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$; qui limites proxime sunt: 0,48075 & 0,50674. Posito ergo $a = \frac{1}{2}$, haec aequatio $x^8 - 6x^6 + 20x^3 - 24 = 0$ quatuor habet radices reales intra limites ∞; $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$; $\sqrt[3]{3}$; 0; $-\infty$; ergo tres erunt affirmatiuae & vna negatiua.

CAPUT

CAPUT XIII.

DE CRITERIIS RADICUM IMAGINARIARUM.

313.

In capite praecedenti modum exhibuimus naturam radicum cuiusque aequationis explorandi, ita vt eius beneficio, ſi proponatur aequatio quaecunque, inueniri poſſit, quot ea radices habeat reales, & quot imaginarias. Plerumque quidem haec inueſtigatio difficillime inſtituitur, cum aequatio differentialis ita eſt comparata, vt eius radices exhiberi nequeant. Quanquam autem his caſibus eadem operatio ad aequationem differentialem ipſam accommodari, eiusque radicum natura ex ipſius differentiali indagari, hincque illius radices proxime aſſignari poſſent; tamen labor nimium ſaepiſſime fieret moleſtus. Quamobrem in hoc negotio ſaepenumero ſufficit eiusmodi criteria noſſe, ex quorum praeſentia tuto concludi poſſit, ineſſe in aequatione propoſita radices imaginarias; etiamſi ex eorum abſentia viciſſim inferri nequeat, omnes prorſus radices eſſe reales. Quae cognitio etſi eſt imperfecta, tamen frequenter vſu non deſtituitur: quocirca his criteriis explicandis praeſens caput deſtinauimus.

314. In capite igitur praecedenti vidimus, ſi aequatio quaecunque:

$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} -$ &c. $= 0$ omnes radices habeat reales, tum etiam eius differentialem $\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} +$ &c. $= 0$ omnes ſuas radices habituram eſſe reales. Simul vero oſtendimus, etiamſi aequatio differentialis omnes habeat radices reales; tamen inde non ſequi, ipſius aequationis propoſitae omnes radices futuras eſſe reales. Interim tamen, ſi aequatio differentialis habeat radices imaginarias, tum ſemper recte concludimus, aequationem ipſam propoſitam ad minimum totidem habere debere radices imaginarias. Ad minimum dico: fieri enim poteſt, vt ipſa aequatio plures habeat radices imaginarias. Hoc ergo modo ex aequatione differentiali plus concludi non poteſt, quam, ſi ea habeat radices imaginarias, ipſam propoſitam aequationem eiusmodi radices quoque habere debere, & quidem ad minimum totidem.

315. Si aequatio propoſita multiplicetur per poteſtatem quamcunque x^m, denotante m numerum integrum affirmatiuum; tum quia haec noua aequatio omnes radices habebit reales, ſi quidem propoſitae radices omnes fuerint reales: tum quoque eius differentialis, poſtquam per x^{m-1} fuerit diuiſa, radices erunt reales omnes. Hinc ſi haec aequatio:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{\&c.} = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque iſta aequatio

$$(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \text{\&c.} = 0$$

om-

omnes radices habebit reales. Ob eandem rationem, si haec multiplicetur per x^k & denuo differentietur, aequatio resultans:

$$(m+n)(k+n)x^n-(m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1}+(m+n-2)(k+n-2)Bx^{n-2}-\&c.=0$$

omnes adhuc radices habebit reales: sicque quousque libuerit, vlterius progredi licet. Sin autem huiusmodi aequatio radices imaginarias habere deprehendatur, tum simul certum erit, ipsam aequationem propositam saltem totidem radices imaginarias esse habituram.

316. Si aequatio proposita, antequam differentiatur, per nullam potestatem ipsius x multiplicetur, tum iudicium ad aequationem vno gradu inferiorem deducitur. Ita si aequatio proposita

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque eius differentiales omnium ordinum omnes radices habebunt reales. Quare & sequentium aequationum omnium radices erunt reales:

$$nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+\&c.=0$$

$$n(n-1)x^{n-2}-(n-1)(n-2)Ax^{n-3}+(n-2)(n-3)Bx^{n-4}-\&c.=0$$

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}-(n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4}+\&c.=0$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}-(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)Ax^{n-5}+\&c.=0$$

&c.

quae aequationes ad sequentes formas reuocantur:

$$x^{n-1} - \frac{(n-1)}{n} Ax^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} Bx^{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

$$x^{n-2} - \frac{(n-2)}{n} Ax^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} Bx^{n-4} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-5} + \&c. = 0$$

$$x^{n-3} - \frac{(n-3)}{n} Ax^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} Bx^{n-5} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-6} + \&c. = 0$$

$$x^{n-4} - \frac{(n-4)}{n} Ax^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} Bx^{n-6} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-7} + \&c. = 0$$

&c.

317. Hoc igitur modo iudicium ad aequationem dati gradus inferioris, quam eſt ipſa propoſita, reduci poteſt. Sic ſi m fuerit numerus quicunque minor quam n, tum ſi aequatio propoſita omnes radices habeat reales, tum quoque huius aequationis gradus m omnes radices erunt reales:

$$x^m - \frac{m}{n} Ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)} Bx^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{m-3} + \&c. = 0.$$

Quare ſi ponatur $m = 2$, prodibit iſta aequatio:

$$x^2 - \frac{2}{n} Ax + \frac{2.1}{n(n-1)} B = 0,$$

cuius radices debebunt eſſe reales, ſi quidem aequatio propoſita $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0$, omnes habeat radices reales. Cum autem iſta aequatio quadratica radices reales habere nequeat, niſi ſit $\frac{AA}{nn} > \frac{2.1}{n(n-1)} B$, ſequitur, aequationis propoſitae radi-

ces

ces omnes reales eſſe non poſſe, niſi ſit $AA > \frac{2n}{n-1}B$. Quamobrem ſi fuerit $AA < \frac{2n}{n-1}B$, hoc certum erit ſignum, aequationis propoſitae ad minimum duas radices fore imaginarias.

318. Hinc ergo aſſecuti ſumus affectionem neceſſariam, qua coefficientes trium primorum terminorum affecti eſſe debent, ſi quidem aequationis propoſitae omnes radices fuerint reales. Hocque eſt eiusmodi criterium, vti initio meminimus: ſcilicet etiamſi caſu $AA > \frac{2n}{n-1}B$, nihil pro realitate radicum ſequatur, at ſi ſit $AA < \frac{2n}{n-1}B$, hoc tamen certum ſit ſignum duarum ſaltem radicum imaginariarum. Sic vt omnes radices ſint reales, ſucceſſiue pro n numero 2, 3, 4, 5, &c. ſubſtituendo requiritur, vt ſequitur:

$$x^2 - Ax + B = 0 \quad \dots\dots\dots \quad A^2 > 4B$$
$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0 \quad \dots\dots \quad A^2 > \tfrac{6}{2}B$$
$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0 \quad \dots \quad A^2 > \tfrac{8}{3}B$$
$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0 \quad .. \quad A^2 > \tfrac{10}{4}B$$

Hinc ſi terminus ſecundus deſit, tertiique coefficiens B ſit affirmatiuus, vt aequatio ſit huiusmodi:

$$x^n + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0,$$

haec omnes radices reales habere nequit, ſed ad minimum duae erunt imaginariae.

319. Huiusmodi vero criteria pro coefficientibus ſequentium terminorum erui poſſunt, ſi perpendamus aequationem hanc:

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$$

totidem habere radices tam reales quam imaginarias, quot ipſa aequatio propoſita contineat. Haec enim aequatio ex illa oritur, ſi ponatur $x = \frac{1}{y}$, ita vt ex radicibus huius aequationis ſimul radices illius habeantur. Quare ſi aequatio propoſita omnes radices habeat reales, tum quoque reciprocae iſtius differentialis, ſcilicet huius $-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - \&c. = 0$ radices omnes erunt reales. Subſtituatur in hac iterum x pro $\frac{1}{y}$, atque emerget iſta aequatio:

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + \&c. = 0,$$

cuius radices propterea omnes erunt reales, ſi radices aequationis propoſitae fuerint tales. Hinc iam patet, ſi fuerit $n = 3$, neceſſe eſſe vt ſit $BB > 3AC$.

320. Differentietur autem iſta aequatio vlterius, atque prodibunt:

$$Ax^{n-2} - \frac{2(n-2)}{n-1}Bx^{n-3} + \frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-4} - \&c. = 0$$

$$Ax^{n-3} - \frac{2(n-3)}{n-1}Bx^{n-4} + \frac{3(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-5} - \&c. = 0$$

$$Ax^{n-4} - \frac{2(n-4)}{n-1}Bx^{n-5} + \frac{3(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-6} - \&c. = 0$$

&c.

Gene-

Generaliter ergo, si m sit numerus minor quam n, erit:

$$Ax^m - \frac{2m}{n-1}Bx^{m-1} + \frac{3m(m-1)}{(n-1)(n-2)}Cx^{m-2} - \&c. = 0.$$

Si iam ponatur $m = 2$, habebitur ista aequatio:

$$Ax^2 - \frac{4}{n-1}Bx + \frac{6}{(n-1)(n-2)}C = 0,$$

cuius radices vt sint reales, oportet esse $\frac{4BB}{(n-1)^2} > \frac{6AC}{(n-1)(n-2)}$. Quare si aequatio proposita omnes habeat radices reales erit $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$. Atque si fuerit $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$, hoc certum est signum, aequationem propositam ad minimum duas habere radices imaginarias. Si igitur sit $n = 3$, criterium erit $BB > 3AC$; si sit $n = 4$; erit $BB > \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2}AC$; si $n = 5$, erit $BB > \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3}AC$, & ita porro.

321. Vt haec criteria ad sequentes coefficientes transferamus, resumamus aequationem differentialem in y inuentam:

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 + \&c. = 0$$

hancque denuo differentiemus, vt habeamus:

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - 20Ey^3 + \&c. = 0$$

quae restituto $\frac{1}{x}$ loco y dabit:

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

ex cuius vlterioris differentiatione sequuntur hae aequationes:

Bx^{n-3}

$$Bx^{n-3} - \frac{3(n-3)}{n-2}Cx^{n-4} + \frac{6(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)}Dx^{n-5} - \&c. = 0$$

& generaliter

$$Bx^{m} - \frac{3m}{n-2}Cx^{m-1} + \frac{6m(m-1)}{(n-2)(n-3)}Dx^{m-2} - \&c. = 0$$

Quodsi igitur ponamus $m = 2$ prodibit aequatio quadrata:

$$Bx^2 - \frac{2.\ 3}{n-2}Cx + \frac{6.\ \ 2}{(n-2)(n-3)}D = 0$$

cuius radices erunt reales, si fuerit $\frac{9CC}{(n-2)^2} > \frac{6.\ 2\,BD}{(n-2)(n-3)}$ seu $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$. Quare si aequatio proposita omnes radices habeat reales, erit $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$, atque si haec conditio deficiat, aequatio certo duas ad minimum habebit radices imaginarias.

322. Si aequationem superiorem $2B - 6Cy + 12Dy^2 - \&c. = 0$ denuo differentiemus, prodibit:

$$-6C + 24Dy - 60Ey^2 + \&c. = 0, \text{ siue}$$

$$C - 4Dy + 10Ey^2 - 20Fy^3 + \&c. = 0,$$

quae restituto x loco $\frac{1}{y}$ abibit in hanc:

$$Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 10Ex^{n-5} - 20Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

ex cuius vlteriori differentiatione sequuntur:

$$Cx^{n-4} - \frac{4(n-4)}{(n-3)}Dx^{n-5} + \frac{10(n-4)(n-5)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-6} - \&c. = 0$$

Cx^{n-5}

$$Cx^{n-5} - \frac{4(n-5)Dx^{n-6}}{n-3} + \frac{10(n-5)(n-6)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-7} - \&c.$$

& generaliter

$$Cx^{m} - \frac{4mD}{n-3}x^{m-1} + \frac{10m(m-1)}{(n-3)(n-4)}Ex^{m-2} - \&c. = 0.$$

Ponamus $m = 2$, eritque $Cx^2 - \frac{2.4}{n-3}Dx + \frac{2.10}{(n-3)(n-4)}E = 0$ ex qua si eius radices sint reales sequitur fore:

$$\frac{4.4}{(n-3)^2}DD > \frac{2.10}{(n-3)(n-4)}CE \text{ seu } DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE.$$

323. Ex his iam satis perspicitur relatio omnium coefficientium. Generatim ergo si aequatio haec:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales; erit

$$AA > \frac{2n}{1(n-1)}B$$

$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

$$CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$$

$$DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$$

$$EE > \frac{6(n-4)}{5(n-5)}DF$$

&c.

Tttt Quarum

Quarum conditionum ſi vna deſit, aequatio ad minimum duas habebit radices imaginarias. Atque ſi iſta criteria a ſe inuicem non pendeant, facile perſpicitur, quotquot eorum non conueniant, totidem dari paria radicum imaginariarum. Quamuis autem hae conditiones omnes in quapiam aequatione locum habeant, tamen inde non ſequitur, nullas dari radices imaginarias; quin potius euenire poteſt, vt hoc non obſtante omnes radices ſint imaginariae. Cauendum ergo eſt, ne his criteriis plus tribuatur, quam ipſis vi principiorum, vnde ſunt deducta, tribui poteſt.

324. Facile autem apparet non ſingula criteria, quae deficiunt, binas radices imaginarias indicare poſſe; in aequatione enim n dimenſionum, quia habentur $n+1$ termini, atque ex ſingulis praeter primum & vltimum criterium deſumi poteſt, omnino criteria habebuntur $n-1$; neque tamen ſi ſingula deficiant, aequatio $2n-2$ radices imaginarias habere poterit, propterea quod omnino tantum n habeat radices. Vnum autem criterium ſemper duas radices imaginarias patefacit, & quia fieri poteſt, vt duo criteria huiusmodi radicum non plures oſtendant, videndum eſt vtrum haec duo criteria ſint contigua nec ne: priori caſu numerus radicum imaginariarum non augebitur, poſteriori vero, quia criteria litteras prorſus diuerſas inuoluunt, vnum quodque binas radices imaginarias monſtrabit. Ita etiamſi fuerit $AA < \frac{2n}{1(n-1)}B$ & $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AB$, tamen

men hinc non neceſſario quatuor radices imaginariae indicantur, ſed vtrumque fortaſſe easdem binas indicat. Quodſi vero fuerit $AA < \frac{2n}{1(n-1)}B$ & $CC < \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$ exiſtente $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$, quatuor radices imaginariae indicabuntur.

325. Ex criteriis ergo radicum imaginariarum ſe immediate inſequentibus plus non ſequitur, quam ex vno; ſin autem ea ordine interrupto procedant, vt inter bina quaeque criterium vnum vel plura contraria interiaceant, tum ex vnoquoque binae radices imaginariae concludi poterunt. Quae conſideratio ſequentem regulam ſuppeditat. Aequationis propoſitae ſingulis terminis, praeter primum & vltimum, inſcribantur coefficientes criteriorum ante inuenti, hoc modo:

$$\frac{2n}{1(n-1)} \quad \frac{3(n-1)}{2(n-2)} \quad \frac{4(n-2)}{3(n-3)} \quad \frac{5(n-3)}{4(n-4)} \quad \&c.$$

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

$$+ \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad \&c.$$

Tum examinetur quadratum cuiusque coefficientis, vtrum ſit maius an minus, quam fractio inſcripta per productum adiacentium coefficientium multiplicata, priori caſu termino ſubſcribatur ſignum +, poſteriori ſignum —; primo vero termino & vltimo perpetuo ſignum + ſubſcribatur. Quo facto, quot ſignorum

horum ſubſcriptorum variationes occurrunt, totidem radices imaginarias aequatio ad minimum habere cenſenda erit.

326. Haec eſt regula a *Neutono* inuenta ad radices imaginarias cuiusque aequationis explorandas; de qua autem probe tenendum eſt, quod iam annotauimus, ſaepenumero fieri poſſe, vt aequatio plures habeat radices imaginarias, quam hac methodo deteguntur. Hinc alii operam dederunt, vt ſimiles regulas alias inuenirent, quae numerum radicum imaginariarum exactius praeberent, ita vt verus iſtiusmodi radicum numerus minus ſaepe eum, quem regula oſtendat, excederet. In hoc genere imprimis proſtat regula *Campbelli* Arithmeticae *Neutoni* vniuerſali ſubiuncta, quam propterea hic explicari conueniet, etiamſi non ſit perfecta. Nititur autem hoc lemmate: Si fuerint α, β, γ, δ, ε, &c. quantitates, earumque numerus ſit m, ponatur ſumma harum quantitatum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c. = S$, ſumma quadratorum $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c. = V$, erit vtique $V > 0$. Sed cum ſit productum ex binis $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \&c. = \frac{SS - V}{2}$; erit $(m-1)V > SS - V$ ſeu $mV > SS$. Nam ſi differentiarum inter binas quantitates quadrata ſumantur, erit eorum ſumma

$$= (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + \&c.$$
$$= (m-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\&c.) - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\&c.)$$
$$= (m-1)V - 2\,\frac{(SS-V)}{2} = mV - SS.$$ Cum

igitur

igitur summa quadratorum realium sit semper affirmatiua, erit $mV - SS > 0$ ideoque $mV > SS$.

327. Hoc lemmate praemisso si habeatur haec aequatio:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \&c. = 0,$$

eiusque omnes radices fuerint reales numero n, quae sint $a, b, c, d, e,$ &c. erit vti constat ex natura aequationum:

aequationum:	numerus termin.
$A = a + b + c + d + \&c.$	n
$B = ab + ac + ad + bc + bd + \&c.$	$\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$
$C = abc + abd + abe + acd + bcd + \&c.$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$
$D = abcd + abce + abde + \&c.$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$
&c.	

Sumantur iam singulorum harum serierum terminorum quadrata, ac ponatur:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.$$
$$Q = a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + \&c.$$
$$R = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + \&c.$$
$$S = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + \&c.$$
&c.

 erit

erit ex natura combinationum:

$$P = A^2 - 2B$$
$$Q = B^2 - 2AC + 2D$$
$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F$$
$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H \quad \&c.$$

328. Vi igitur lemmatis praemissi habebimus:

$$n\,P > AA$$
$$\frac{n(n-1)}{1.\,2}\,Q > BB$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\,R > CC$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\,S > DD \quad \&c.$$

Quodsi ergo loco P, Q, R, &c. valores ante inuenti substituantur, obtinebimus sequentes radicum realium proprietates:

$$nAA - 2nB > AA \quad \text{seu} \quad AA > \frac{2n}{n-1}B$$

$$\frac{n(n-1)}{1.\,2}BB - \frac{2n(n-1)}{1.\,2}AC + \frac{2n(n-1)}{1.\,2}D > BB,$$

siue

$$BB > \frac{\frac{2n(n-1)}{1.\,2.}}{\frac{n(n-1)}{1.\,2.} - 1}(AC - D)$$

simi-

ſimilique modo aequationes ſequentes praebent:

$$CC > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}-1}(BD - AE + F)$$

$$DD > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}-1}(CE - BF + AG - H)$$

Hinc ergo cuiusque coefficientis quadratum non ſolum cum producto proxime adiacentium comparatur, ſed etiam cum rectangulis binorum quorumque vtrinque aeque diſtantium; ita tamen vt horum rectangulorum ſigna alternatim mutentur.

329. Singulis igitur aequationis terminis praeter primum & vltimum inſcribi debent fractiones, quarum numeratores ſint vnciae binomii ad ſimilem dignitatem eleuati duplicatae, denominatores vero eaedem vnciae vnitate minutae. Ita conſiderando aequationes quadratas, cubicas, biquadratas &c. ſi earum radices omnes fuerint reales, erit:

$$x^2 - \overset{\frac{4}{1}}{A}x + B = 0\ ;\ A^2 > 4B$$

Pro aequatione cubica:

$$x^3 - \overset{\frac{6}{2}}{A}x^2 + \overset{\frac{6}{2}}{B}x - C = 0$$

erit $A^2 > 3B$ & $B^2 > 3AC$.

Pro

Pro aequatione biquadrata:

$$x^4 - \overset{\frac{8}{3}}{A}x^3 + \overset{\frac{12}{5}}{B}x^2 - \overset{\frac{8}{3}}{C}x + D = 0$$

erit $A^2 > \frac{8}{3}B$; $B^2 > \frac{12}{5}(AC - D)$; $C^2 > \frac{8}{3}BD$

Pro aequatione poteſtatis quintae:

$$x^5 - \overset{\frac{10}{4}}{A}x^4 + \overset{\frac{20}{9}}{B}x^3 - \overset{\frac{20}{9}}{C}x^2 + \overset{\frac{10}{4}}{D}x - E = 0$$

erit $AA > \frac{10}{4}B$; $B^2 > \frac{20}{9}(AC-D)$; $C^2 > \frac{20}{9}(BD-AE)$
& $D^2 > \frac{10}{9}CE$.

Pro aequatione poteſtatis ſextae:

$$x^6 - \overset{\frac{12}{5}}{A}x^5 + \overset{\frac{30}{14}}{B}x^4 - \overset{\frac{40}{19}}{C}x^3 + \overset{\frac{30}{14}}{D}x^2 - \overset{\frac{12}{9}}{E}x + F = 0$$

erit $A^2 > \frac{12}{5}B$; $B^2 > \frac{30}{14}(AC-D)$; $C^2 > \frac{40}{19}(BD-AE+F)$;
$D^2 > \frac{30}{14}(CE - BF)$; $E^2 > \frac{12}{5}DF$. &c.

330. Si igitur quodpiam criterium fallat, id erit indicium duas ad minimum ineſſe radices imaginarias in aequatione propoſita. Cum autem ſi ſingula fallant, aequatio ideo non duplo plures habere queat radices imaginarias, ſimili modo iudicium his caſibus erit abſolvendum, quem ante pro Neutoniana regula indicauimus. Scilicet ſi cuiusque termini quadratum maius fuerit quam fractio inſcripta per producta terminorum adiacentium & vtrinque aequidiſtantium multiplicata, tum iſti termino ſubſcribatur ſignum +, contra vero ſignum — ; primo vero & vltimo termino conſtanter ſubſcribatur ſignum +. Quo facto inſpiciatur ordo ſignorum

rum horum ſubſcriptorum, & quoties occurrit variatio, toties radix imaginaria indicabitur. Quoties ergo haec regula plures radices imaginarias indicat, quam Neutoniana, toties quoque ad veritatem magis accedit. Interim tamen fieri poteſt, vt aequatio plures habeat radices imaginarias, quam per vtramque regulam indicantur.

331. Falleremur ergo, ſi his criteriis tanquam perfectis ſignis radicum realium & imaginarium vti vellemus; propterea quod fieri poteſt, vt aequatio plures habeat radices imaginarias, quam haec criteria indicant: error autem eo maior eſſe poſſet, quo altioris gradus fuerit aequatio propoſita. Nam in aequatione quadrata haec criteria ita veritati ſunt conſentanea, vt ſi nullas radices imaginarias indicent, etiam aequatio nullas ſit habitura. Aequatio autem cubica duas radices imaginarias habere poteſt, etiamſi neutra regula, (ambae autem hoc caſu adhuc conueniunt) eas exhibeat. Hos igitur caſus inueſtigaturi, ſit propoſita haec aequatio cubica generalis:

$$x^3 - \overset{3}{A}x^2 + \overset{3}{B}x - C = 0$$

in qua ſi fuerit $AA > 3B$ & $BB > 3AC$ neutra regula radices imaginarias indicat. Supra autem (306) vidimus ad id, vt nullae radices imaginariae adſint requiri primo vt ſit $B < \frac{1}{3}AA$, quam conditionem quoque ambae regulae requirunt. Sit igitur $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, atque neceſſe eſt vt C contineatur intra hos limites: $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$.

Vtraque autem regula tantum poſtulat, vt ſit $C < \frac{BB}{3A}$, hoc eſt $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A}$. Quae conditio locum habere poteſt, etiamſi C non intra dictos limites contineatur.

332. Sit enim $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg$: atque regulae nullas radices imaginarias indicabunt. Interim tamen in erunt duae radices imaginariae, ſi fuerit vel

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$$

vel

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3.$$

Si igitur fuerit vel $gg > \frac{(ff+Af)^2}{27A}$ vel $gg < \frac{(Af-ff)^2}{27A}$, aequatio cubica duas habebit radices imaginarias, etiamſi neutra regula eas indicet. Sumimus autem hic eſſe A quantitatem affirmatiuam, ſi enim eſſet negatiua, ponendo $x = -y$ aequatio in eiusmodi formam transmutaretur, in qua A eſſet affirmatiua. Hinc infinitae aequationes cubicae formari poſſunt, quae habeant duas radices imaginarias, etiamſi per regulam non indicentur. Sit enim $gg = \frac{(ff+Af)^2}{27A} + hh$, erit $C = \frac{(ff-AA)^2}{27A} - gg$ $= \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 - hh$, & $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Vel ſit $gg = \frac{(Af-ff)^2}{27A} - hh$ exiſtente $hh < \frac{(Af-ff)^2}{27A}$; erit

C =

$C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3 + hh$ & $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Vtroque casu prodibit aequatio duas habens radices imaginarias, neutra regula indicandas. Ponamus verbi gratia $A = 4$, $f = 1$, erit $B = 5$; & ob $gg = \frac{25}{108} + hh$; erit $C = \frac{225}{108} - \frac{25}{108} - hh = \frac{50}{27} - hh$. Quare si sit $C < \frac{50}{27}$, aequatio $x^3 - 4x^2 + 5x - C = 0$ semper habebit duas radices imaginarias. At sumto $gg = \frac{1}{12} - hh$ debebit esse $hh < \frac{1}{12}$, fietque $C = \frac{25}{12} - \frac{1}{12} + hh = 2 + hh$. Sit $hh = \frac{1}{16}$; atque aequatio $x^3 - 4xx + 5x - \frac{33}{16} = 0$ duas habebit radices imaginarias, etiamsi nulla regulis prodatur.

333. Quin etiam eiusmodi aequationes generales formari possunt, in quibus neutra regula radices imaginarias exhibeat, etiamsi tamen saepissime duae pluresue insint. Euenit hoc si perpetuo duo signa similia se mutuo excipiant, vti:

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

vel $x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - \&c. = 0$, hic vtraque regula nullam vnquam radicem imaginariam prodit. Quod autem saepissime huiusmodi radices continere queant, vel ex aequatione cubica elucet $x^3 - Ax^2 - Bx + C = 0$, quae posito $ff = AA + 3B$ semper habet duas radices imaginarias, si fuerit vel $-C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ vel $-C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Interim tamen & hos casus ex regulis elicere licet, si aequatio ope substitutionis in aliam formam transformetur. Ponatur $x = y + k$, fietque:

 $y^3 +$

$$\left.\begin{array}{llll} y^3 + 3ky^2 & + 3kky & + k^3 & \\ \quad - Ayy & - 2Aky & - Akk & \\ & - By & - Bk & \\ & & + C & \end{array}\right\} = 0$$

quae ſecundum regulas examinata dabit primo quidem ſponte $(3k - A)^2 > 3(3kk - 2Ak - B)$; at quo ſit $(3kk - 2Ak - B)^2 > 3(3k - A)(k^3 - Akk - Bk + C)$, quod eſt alterum criterium, neceſſe eſt vt ſit: $BB + 3AC + (AB - 9C)k + (AA + 3B)kk > 0$, quicunque valor ipſi k tribuatur. Sumatur ergo k ita, vt haec expreſſio minimum valorem adipiſcatur, quod fiet ponendo $k = \frac{9C - AB}{2(AA + 3B)}$, & ſi iſta expreſſio adhuc fuerit > 0, probabile erit aequationem propoſitam nullas habere radices imaginarias. Fiet autem

$$BB + 3AC - \frac{(AB - 9C)^2}{2(AA + 3B)} + \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)} > 0 \text{ ſeu}$$

$BB + 3AC > \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)}$. Cum ergo ſit $B = \frac{1}{3}ff - \frac{1}{3}AA$,

erit $4ff(\frac{1}{9}f^4 - \frac{2}{9}AAff + \frac{1}{9}A^4 + 3AC) > (\frac{1}{3}Aff - \frac{1}{3}A^3 - 9C)^2$ ſeu

$4f^6 - A8^2f^4 + 4A^4ff + 108ACff > A^2f^4 - 2A^4f^2 - 54ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$

vel $4f^6 > 9A^2f^4 - 6A^4ff - 162ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$

vnde factoribus ſumtis eſſe debebit:

$(2f^3 + A^3 - 3Af + 27C)(2f^3 - A^3 + 3Af - 27C) > 0.$

Hincque regulae radices imaginarias oſtendent, ſi fuerit vel $C > -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af - \frac{2}{27}f^3$ & $C > -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af + \frac{2}{27}f^3$ vel $C < -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af - \frac{2}{27}f^3$ & $C < -\frac{1}{27}A^2 + \frac{1}{9}Af + \frac{2}{27}f^3$.

Quae

Quae ſunt eaedem conditiones, quas ſupra inuenimus. Patet ergo idonea aequationis propoſitae transmutatione regulas hoc capite traditas ita perfici poſſe, vt a veritate non diſſideant, etiamſi conuertantur.

334. Ex his principiis quoque regula Harriotti, qua quaelibet aequatio tot radices affirmatiuas habere praedicatur, quot dentur ſignorum variationes, tot vero negatiuas, quot dentur eiusdem ſigni ſucceſſiones, demonſtrari poteſt, quae quidem regula pro radicibus tantum realibus valet. Ponamus ergo aequationem $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$ omnes radices habere reales atque affirmatiuas, atque eius differentialis $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \&c. = 0$ non ſolum omnes ſuas radices quoque habebit reales & affirmatiuas, ſed etiam huius radices conſtituent limites radicum illius aequationis. Praeterea vero poſito $x = \frac{1}{y}$ haec aequatio $1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$ omnes quoque radices habebit reales affirmatiuas, ſed reciprocas illius, ita vt quae radices in illa aequatione ſint maximae, hae in iſta fiant minimae. His poſitis ſi illa aequatio propoſita continuo differentietur, donec ad aequationem primi ordinis perueniatur, quae erit $x - \frac{1}{n}A = 0$, (317) huius radix adhuc erit affirmatiua, ideoque coefficiens ſecundi termini habebit ſignum $-$ vti aſſumſimus. Sin autem iſte coefficiens haberet ſignum $+$, tum certo ſequeretur, aequationem

propoſitam non omnes radices habere affirmatiuas, ſed vnam ad minimum fore negatiuam, & quidem eam, quae limitibus hucusque perductis reſpondeat.

335. Si aequatio propoſita in ſui reciprocam conuertatur & differentietur, tum vero iterum x reſtituatur, atque differentiationes continuentur, donec perueniatur ad aequationem ſimplicem, quae ex §. 320. erit huiusmodi $Ax - \frac{2}{n-1}B = 0$, cuius propterea radix quoque debet eſſe affirmatiua, ſi quidem propoſita omnes ſuas radices habeat reales affirmatiuas, hincque ſecundus & tertius terminus diuerſa ſigna habebunt. Quodſi ergo hi duo termini ſimilia habeant ſigna, ad minimum vna radix negatiua indicabitur, reſpondens limiti hac aequatione ſignato, qui diuerſus erit a limite praecedente aequatione indicato, propterea quod hic radices ſemel ſunt in ſuas reciprocas conuerſae: vnde concluditur, ſi tres termini aequationis initiales paria habuerint ſigna, tum duas radices negatiuas indicari.

336. Simili modo ſi conuerſiones & differentiationes ſecundum §. 321. inſtituantur, atque eousque continuentur, donec ad aequationem ſimplicem $Bx - \frac{3}{n-2}C = 0$ perueniatur, & huius aequationis radix eſſe debet affirmatiua, ſi quidem propoſitae aequationis omnes radices fuerint tales; vnde ſi termini tertius & quartus paria habeant ſigna, indicabitur vna radix negatiua. Sicque perpetuo, ſi duo quicunque termini contigui aequalibus ſignis

ſignis fuerint affecti, vna radix negatiua proditur; ideoque quotcunque fuerint eiusdem ſigni ſucceſſiones, totidem ad minimum aequatio propoſita habebit radices negatiuas, quoniam haec ſingula criteria ad diuerſos limites referuntur. Quod ſi autem aequatio propoſita omnes radices negatiuas habere ponatur, tum quia radices omnium aequationum differentialium ex ea deductarum debent eſſe pariter negatiuae, omnes termini aequalibus ſignis affecti eſſe debebunt. Quare ſi duo termini contigui diuerſa habeant ſigna, ex iis vna ad minimum radix affirmatiua concludetur. Atque ſimili modo, quotcunque in aequatione occurrant binorum terminorum variationes ſignorum, totidem ad minimum radices affirmatiuae ineſſe dicendae ſunt. Cum igitur aequatio omnis tot habeat radices, quot dantur duorum ſignorum contiguorum combinationes, neque plures, ſequitur quamuis aequationem, cuius omnes radices ſint reales, tot habere radices affirmatiuas, quot fuerint ſignorum contiguorum variationes, tot vero negatiuas, quot fuerint eiusdem ſigni ſucceſſiones.

CAPUT XIV.

DE DIFFERENTIALIBUS FUNCTIONUM IN CERTIS TANTUM CASIBUS.

337.

Si y fuerit functio quaecunque ipſius x, atque haec quantitas variabilis x augeatur incremento ω, vt x abeat in $x + \omega$, tum functio y induet hunc valorem:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ideoque capiet hoc incrementum:

$$\frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

vti ſupra demonſtrauimus. Quare ſi fiat $\omega = dx$, ita vt x ſuo differentiali dx creſcat, tum functio y incrementum accipiet $= dy + \frac{1}{2} ddy + \frac{1}{6} d^3y + \frac{1}{24} d^4y + \&c.$ quod erit verum differentiale ipſius y. Quoniam vero huius ſeriei quilibet terminus ad ſequentes habet rationem infinitam, prae primo omnes euaneſcunt, ita vt dy more conſueto ſumtum praebeat verum differentiale ipſius y. Simili modo vera differentialia ſecunda, tertia, quarta, &c. ipſius y ita ſe habebunt:

$$dd.y = ddy + \frac{3}{3}d^3y + \frac{7}{3.4}d^4y + \frac{15}{3.4.5}d^5y + \frac{31}{3.4.5.6}d^6y + \&c.$$

$$d^3.y = d^3y + \frac{6}{4}d^4y + \frac{25}{4.5}d^5y + \frac{90}{4.5.6}d^6y + \frac{301}{4.5.6.7}d^7y + \&c.$$

$$d^4.y = d^4y + \frac{10}{5}d^5y + \frac{65}{5.6}d^6y + \frac{350}{5.6.7}d^7y + \&c.$$

$$d^5.y = d^5y + \frac{15}{6}d^6y + \frac{140}{6.7}d^7y + \&c.$$

$$d^6.y = d^6y + \frac{21}{7}d^7y + \&c.$$

quae ſequuntur ex §. 56. ſi loco ω ponatur dx. Erunt ergo haec differentialia ipſius y completa, quippe in quibus ne ii quidem termini, qui reſpectu primi euaneſcunt, negliguntur. Inueniuntur autem ſinguli iſti termini, ſi functio y continuo differentietur, ponendo dx conſtans. Sic poſito $y = ax - xx$ ob $dy = adx - 2xdx$ & $ddy = -2dx^2$; erunt ipſius y differentialia completa: $dy = adx - 2xdx - dx^2$; $ddy = -2dx^2$; ſequentia autem ſunt nulla.

338. Quanquam autem generatim in his expreſſionibus differentialium ſequentes termini prae primis pro nihilo reputantur; tamen in caſibus ſpecialibus, quibus ipſe terminus primus euaneſcit, haec ratio ceſſat, neque terminus ſecundus amplius negligi poterit. Sic in exemplo praecedente etiamſi formulae $y = ax - xx$ differentiale in genere eſt $= (a - 2x)dx$ reiecto termino $-dx^2$, quippe qui eſt infinities minor quam pri-

mus $(a-2x)dx$: hic tamen iſta conditio manifeſto ſubintelligitur, niſi primus terminus per ſe euaneſcat. Quocirca ſi ipſius $y = ax - xx$ quaeratur differentiale, caſu quo $x = \frac{1}{2}a$, tum id dicendum erit eſſe $= -dx^2$; ſcilicet ſi variabilis x differentiali dx creſcat, tum functionis y caſu $x = \frac{1}{2}a$ decrementum erit dx^2. Hoc autem ſolo caſu excepto perpetuo functionis y differentiale erit $= (a-2x)dx$; niſi enim ſit $x = \frac{1}{2}a$, terminus ſecundus $-dx^2$ prae primo ſemper recte negligitur. Neque vero neglectio termini dx^2 etiam in caſu $x = \frac{1}{2}a$ in errorem inducere poteſt: comparari enim differentialia prima inter ſe ſolent; vnde quia $dy = -dx^2$ caſu $x = \frac{1}{2}a$, prae differentialibus primis dx euaneſcit, perinde eſt ſiue hoc caſu habeamus $dy = 0$ ſiue $dy = -dx^2$.

339. Denotante y functionem quamcunque ipſius x, ſit differentialibus continuis ſumtis:

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ dr = sdx;\ \&c.$$

Hinc ergo differentialia completa, in quibus nihil negligatur, ipſius y erunt:

$$d.y = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \&c.$$
$$d^2.y = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12}sdx^4 + \tfrac{1}{4}tdx^5 + \&c.$$
$$d^3.y = rdx^3 + \tfrac{3}{2}sdx^4 + \tfrac{5}{4}tdx^5 + \&c.$$
$$d^4.y = sdx^4 + 2tdx^5 + \&c.$$
$$d^5.y = tdx^5 + \&c.$$

Niſi ergo primi termini harum expreſſionum euaneſcant, ii ſoli differentialia ipſius y exhibebunt; ſin autem quopiam

piam casu primus terminus fiat $= 0$, tum sequens differentiale quaesitum exprimet. Atque si etiam secundus terminus euanescat, tum tertius terminus valorem differentialis quaesiti praebebit, sin autem & hic euanescat, quartus & ita deinceps. Vnde intelligitur nullius functionis ipsius x differentiale primum vnquam penitus euanescere; etiamsi enim fiat $p = 0$, quo casu vulgo dy euanescere censetur, tum hoc differentiale per altiorem ipsius dx potestatem exprimetur. Vti vel per $\frac{1}{2}qdx^2$, vel si etiam sit $q = 0$, per $\frac{1}{6}rdx^3$, & ita porro.

340. Quanquam autem his casibus differentiale ipsius y respectu aliorum differentialium primorum, quibuscum comparatur, recte negligitur, atque pro nihilo reputatur; tamen saepenumero eius veram expressionem nosse iuuat. Ex completa enim differentialis forma statim perspici potest, quibus casibus data functio fiat maximum vel minimum. Si enim fuerit:

$$d.y = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \&c.$$

quo y nanciscatur maximum minimumue valorem, necesse est vt sit $p = 0$; erit ergo hoc casu $dy = \frac{1}{2}qdx^2$, & functio y, si loco x ponatur $x \pm dx$, abit in $y + \frac{1}{2}qdx^2$, eritque propterea minima, si q habeat valorem affirmatiuum, at maxima si q habeat valorem negatiuum. At si simul fiat $q = 0$, erit $dy = \frac{1}{6}rdx^3$, & functio y ponendo $x \pm dx$ loco x abibit in $y \pm \frac{1}{6}rdx^3$, neque hoc casu maximum neque minimum prodit; sin autem fiat & $r = 0$, tum posito $x \pm dx$ loco x functio y euadet $= y + \frac{1}{24}sdx^4$, quae maximum exhibet, si s fuerit quan-

titas negatiua, minimum vero, ſi s ſit quantitas affirmatiua. Aliae occaſiones, quibus differentialium completa expreſſio vſum habet, infra occurrent.

341. Ponamus p euaneſcere caſu $x = a$, quod euenit ſi fuerit $p = (x-a)\mathrm{P}$. Talis autem valor prodit, ſi fuerit $y = (x-a)^2\mathrm{P} + \mathrm{C}$, denotante C quantitatem conſtantem quamcunque. Cum enim ſit $p\,dx = (x-a)^2 d\mathrm{P} + 2(x-a)\mathrm{P}dx$, erit vtique $p = 0$, poſito $x = a$. Tum ergo ob $dp\,dx = q\,dx^2 = (x-a)^2 dd\mathrm{P} + 4(x-a)d\mathrm{P}dx + 2\mathrm{P}dx^2$, poſito $x = a$, fiet $q\,dx^2 = 2\mathrm{P}\,dx^2$, atque differentiale completum hoc caſu $x = a$, erit $d.y = \mathrm{P}\,dx^2$, niſi forte & P euaneſcat poſito $x = a$, quos caſus poſtea contemplabor. Praeſens autem caſus generalius hoc modo exhiberi poteſt. Sit $z = (x-a)^2\mathrm{P} + \mathrm{C}$, atque y ſit functio quaecunque ipſius z, ita vt fiat $dy = \mathrm{Z}\,dz$, denotante Z functionem quamcunque ipſius $z = (x-a)^2\mathrm{P} + \mathrm{C}$. Erit ergo $dz = (x-a)^2 d\mathrm{P} + 2(x-a)\mathrm{P}\,dx$, & $p\,dx = \mathrm{Z}(x-a)^2 d\mathrm{P} + 2\mathrm{Z}(x-a)\mathrm{P}\,dx$, quod membrum fit $= 0$ ſi $x = a$; eodemque caſu neglectis terminis, qui continent factorem $x-a$, erit $q\,dx^2 = 2\mathrm{PZ}\,dx^2$, ideoque caſu $x = a$, fiet $dy = \mathrm{PZ}\,dx^2$; poſtquam in PZ vbique loco x poſitum fuerit a. Quare ſi fuerit y functio quaecunque ipſius $z = (x-a)^2\mathrm{P} + \mathrm{C}$, ita vt ſit $dy = \mathrm{Z}\,dz$, erit caſu $x = a$, differentiale $dy = \mathrm{PZ}\,dx^2$. Fiet ergo haec functio y maxima caſu $x = a$, ſi eodem caſu fiat PZ quantitas negatiua, minima vero, ſi PZ fiat quantitas affirmatiua.

342. Si fuerit $p=(x-a)^2P$, caſu $x=a$ quoque q euaneſcit, talis autem expreſſio pro p oritur, ſi fuerit $y=(x-a)^3P+C$. Erit ergo $pdx=(x-a)^3dP+3(x-a)^2Pdx$; $qdx^2=(x-a)^3ddP+6(x-a)^2dPdx+6(x-a)Pdx^2$, quorum vtrumque membrum caſu $x=a$ euaneſcit; at vero ſequens erit $rdx^3=(x-a)^3d^3P+9(x-a)^2ddPdx+18(x-a)dPdx^2+6Pdx^3=6Pdx^3$, poſito $x=a$. Quare cum & p & q caſu $x=a$ euaneſcat, fiet $dy=\frac{1}{6}rdx^3=Pdx^3$. Simili modo ſi ponatur $z=(x-a)^3P+C$, fueritque y functio quaecunque ipſius z, ita vt ſit $dy=Zdx$, ob $dz=(x-a)^3dP+3(x-a)^2Pdx$, fiet quoque $p=0$ & $q=0$, eritque $rdx^3=6PZdx^3$; vnde caſu $x=a$, erit $dy=PZdx^3$. Quare iſta functio y, etiamſi caſu $x=a$, fiat $p=0$, tamen neque maximum neque minimum valorem recipit.

343. Haec differentialia facilius inueniri poſſunt ex ipſa differentialium natura. Cum enim differentiale ipſius y oriatur, ſi y a ſtatu ſequenti proximo ſubtrahatur, qui prodit, ſi loco x ponatur $x+dx$; ponamus caſu primo quo erat, $y=(x-a)^2P+C$, $x+dx$ loco x, eritque $y^{I}=(x-a+dx)^2P^{I}+C$, vnde fiet $dy=(x-a+dx)^2P^{I}-(x-a)^2P$. Caſu igitur quo $x=a$, erit $dy=P^{I}dx^2$, & cum P^{I} ad P rationem aequalitatis habeat, erit $dy=Pdx$. Simili modo ſi fuerit $z=(x-a)^2P+C$, erit $dz=Pdx^2$; quare ſi ſit y functio quaecunque ipſius z, ita vt ſit $dy=Zdz$, erit $dy=PZdx^2$ caſu, quo ponitur $x=a$. Deinde ſi ſit $z=(x-a)^3P+C$, erit $z^{I}=(x-a+dx)^3P^{I}+C$, & propterea caſu $x=a$, fiet $z^{I}-z=dz=Pdx^3$. Hinc

ſi fuerit y functio quaecunque ipſius z, atque $dy = Zdz$, erit quoque caſu $x = a$, differentiale $dy = PZdx^3$, ſiquidem in functionibus P & Z loco x vbique ſubſtituatur a. Quoniam vero hoc caſu fit $z = C$, atque Z eſt functio ipſius z, euadet Z quantitas conſtans, talis ſcilicet functio ipſius C, qualis ante erat ipſius z.

344. Si igitur generaliter fuerit $y = (x-a)^n P + C$, quia eſt $y^I = (x - a + dx)^n P^I + C$, caſu $x = a$, fiet $dy = Pdx^n$; vnde ſi fuerit $n > 1$, hoc differentiale reſpectu aliorum differentialium primorum, quae ipſi dx ſunt homogenea, euaneſcet. Ex praecedentibus ergo manifeſtum eſt, functionem y fieri caſu $x = a$, vel maximam vel minimam, ſi fuerit n numerus par: tum enim ſi poſito $x = a$ fiat P quantitas affirmatiua, fiet y minimum, ſin autem P fit quantitas negatiua, fiet y maximum. Hocque ergo modo ratio maximorum & minimorum multo facilius inuenitur, quam methodo ſupra expoſita, quia non opus eſt ad differentialia altiora progredi. Quod ſi vero ſit $z = (x - a)^n P + C$, atque y fuerit functio quaecunque ipſius z, vt ſit $dy = Zdz$, erit caſu $x = a$ differentiale $dy = PZdx^n$. Notandum autem eſt, hic n ſumi pro numero affirmatiuo ſeu o maiore, ſi enim n eſſet numerus negatiuus, tum poſito $x = o$, non euaneſceret $(x - a)^n$, vti aſſumſimus, ſed adeo fieret infinite magnum.

345. Iam vidimus hoc pacto differentiale multo expeditius inueniri, quam ope ſeriei, qua ante differentiale

tiale completum expressimus; si enim sit n numerus integer, tot seriei illius termini perlustrari deberent, quot n contineat vnitates. Verum si n sit numerus fractus, tum series ista nequidem verum differentiale vnquam exhibebit. Ponamus enim esse $y = (x - a)^{\frac{3}{2}} + aVa$, si seriem $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 + \&c.$ spectemus, fiet $p = \frac{3}{2}V(x-a)$, $q = \frac{3}{4V(x-a)}$,

$r = \frac{-3}{8(x-a)V(x-a)}$, $s = \frac{9}{16(x-a)^2V(x-a)}$, &c.

Quare si ponatur $x = a$ fiet quidem $p = 0$, at sequentes termini omnes q, r, s, &c. euadent infiniti; vnde valor differentialis dy hoc casu omnino definiri non potest. At vero methodus ex ipsa differentialium natura deducta nullum dubium relinquit. Cum enim sit $y = (x-a)^{\frac{3}{2}} + aVa$, posito $x + dx$ loco x fiet $y^{I} = (x - a + dx)^{\frac{3}{2}} + aVa$, eritque, si $x = a$ ponatur, $dy = dxVdx$. Euanescit ergo hoc differentiale prae dx, at vero differentialia secunda cum dx^2 homogenea prae eo euanescent.

346. Euoluamus hos casus, quibus exponens n est numerus fractus aliquanto accuratius, sitque $y = PV(x-a) + C$, ob $y^{I} = P^{I}V(x - a + dx) + C$, fiet $dy = PVdx$ casu $x = a$; vnde hoc differentiale ad dx, & ad differentialia cum dx homogenea rationem tenebit infinitam. Hinc etiam patet, quid hoc casu de ratione maximi ac minimi sit tenendum. Cum enim posito $x + dx$ loco x, abeat y in $PV(x-a) + C + PVdx$, ob Vdx am-

ambiguum, functio y geminum induet valorem, alterum maiorem quam C, quem recipit posito $x = a$, alterum minorem; vnde casu $x = a$ neque maximum neque minimum fiet. Praeterea si dx capiatur negatiue tum valor ipsius y adeo fiet imaginarius. Idem tenendum est si sit $z = P\sqrt{(x-a)} + C$, & y functio quaecunque ipsius z, vt sit $dy = Zdz$, tum enim erit $dy = PZ\sqrt{dx}$ casu $x = a$.

347. Si proposita fuerit ista functio $y = (x-a)^{\frac{m}{n}}P + C$, cuius differentiale quaeritur casu $x = a$, erit vti ex antecedentibus colligitur $dy = Pdx^{\frac{m}{n}}$. Quocirca si fuerit $m > n$ hoc differentiale prae dx euanescat, sin autem sit $m < n$, ratio $\frac{dy}{dx}$ erit infinite magna. Praeterea vero si n sit numerus par, differentiale dy geminum habebit valorem, alterum affirmatiuum, alterum negatiuum; sicque functio y, quae casu $x = a$ fit $= C$, si ponatur $x = a + dx$ binos habebit valores alterum maiorem quam C alterum vero minorem; sin autem poneretur $x = a - dx$, tum y adeo fieret imaginarium; vnde hoc casu y neque maximum fit neque minimum. Ponamus nunc denominatorem n esse numerum imparem, erit numerator m vel par vel impar. Sit primo m numerus par; quia dy eundem valorem retinet, siue dx sumatur affirmatiue siue negatiue, perspicuum est, functionem y casu $x = a$ fieri siue maximam siue minimam, prout hoc casu fuerit P vel quantitas negatiua vel affirmati-

matiua. Sin autem vterque numerus m & n fuerit impar, differentiale dy in fui negatiuum abibit, pofito dx negatiuo; hocque ergo cafu functio y neque maximum erit neque minimum, fi ponatur $x = a$.

348. Si functio y ex pluribus huiusmodi terminis, quorum finguli fint diuifibiles per $x - a$, conftet, ita vt fit $y = (x-a)^m P + (x-a)^n Q + C$, tum eius differentiale cafu $x = a$ erit $dy = P dx^m + Q dx^n$; in qua expreffione, fi fuerit $n > m$, terminus fecundus prae primo euanefcit, ita vt tantum prodeat $dy = P dx^m$. Sin autem n fit fractio denominatorem habens parem, tum etiamfi $Q dx^n$ prae $P dx^m$ euanefcat, tamen omnino negligi non poteft. Ex eo enim apparet, fi capiatur dx negatiue, valorem ipfius dy fieri imaginarium, quod ex folo termino primo $P dx^m$ non patet. Cum ergo fi n fit fractio denominatorem habens parem, dx negatiue accipi nequeat, fin autem affirmatiue capiatur, terminus $Q dx^n$ geminum praebeat valorem: functio $y = (x-a)^m P + (x-a)^n Q + C$ quae cafu $x = a$ fit $= C$, fi ponatur $x = a + dx$, erit $y = C + P dx^m \pm Q dx^n$, quorum valorum vterque cum vel maior fit vel minor quam C, prout P fuerit quantitas vel affirmatiua vel negatiua, erit functio y cafu $x = a$ vel minimum vel maximum fecundae fpeciei.

349. His igitur cafibus differentialia functionum vera non per regulas differentiationis confuetas inueniri poffunt; quippe quae tantum valent, quamdiu differen-

tiale functionis est homogeneum cum dx. Sin autem casu quopiam singulari differentiale functionis exprimatur per eius potestatem dx^n, tum regula praebet pro hoc differentiali o, si n fuerit numerus vnitate maior; at vero differentiale exhibet infinite magnum, si n sit exponens vnitate minor. Sic si ipsius $y = \sqrt{(a - x)}$ differentiale quaeratur casu $x = a$, quia est $dy = -\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$, facto $x = a$ prodit $dy = -\frac{dx}{0}$. Atque si differentialia sequentia in subsidium vocare velimus, omnia pariter ob denominatores $= 0$ in infinitum excrescunt, ita vt inde nihil concludi possit. At vero hoc casu vidimus esse $dy = \sqrt{- dx}$, atque adeo imaginarium. Sin autem loco x ponatur $x - dx$, erit $dy = \sqrt{dx}$, atque adeo erit infinities maius quam dx, ita vt dx prae dy euanescat. Quare regula consueta etiam hoc casu in errorem non inducit, cum valorem ipsius dy infinitum exhibeat.

350. A regula ergo consueta differentiationis recedendum est, quoties in serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ &c. qua differentiale completum functionis y exprimitur, primus terminus p vel fit $= 0$ vel in infinitum excrescit, eoque casu differentiale ex primis principiis deriuari debet. Quoties ergo functionis y differentiale quaeritur dato ipsius x valori respondens, quo littera p vel infinite parua euadit vel infinite magna, toties recurrendum est ad ipsa prima differentiationis principia. Omnibus vero

vero reliquis casibus, quibus fit neque $p = 0$ neque $p = \infty$, consueta regula veros differentialis valores praebebit. Interim tamen casus ante (348) memoratus non est negligendus, si functio y contineat huiusmodi membrum $(x - a)^n Q$ existente n fractione denominatorem parem habente; etiamsi enim adsint differentialia inferiora quam $Q dx^n$, prae quibus hoc euanescat; tamen quoniam $Q dx^n$ si sit dx negatiuum, fit imaginarium, hoc membrum $Q dx^n$ reliqua omnia, prae quibus euanescit, quoque transmutat in imaginaria: cuius circumstantiae ratio potissimum in lineis erit habenda. Huiusmodi ergo casus particulares, quibus verum differentiale communi regula non indicatur, in adiunctis exemplis explicabo.

EXEMPLUM I.

Quaeratur differentiale functionis

$$y = a + x - \sqrt{[xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)}]}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Differentiali istius functionis casu $x = a$ per regulam receptam non reperiri, ex differentiatione patet, fit enim:

$$dy = dx - \frac{xdx - \frac{1}{2}adx + \frac{1}{2}dx\sqrt{(2ax - xx)} + (axdx - xxdx) : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)})}}$$

posito enim $x = a$ erit $dy = dx - \frac{adx}{a} = 0$. Ordiamur ergo a principiis differentiationis, ac primo quidem posito $x + dx$ loco x fiet:

$$y^{I} = a + x + dx - \sqrt{[xx + 2xdx + dx^2 + ax + adx - (x + dx)\sqrt{(2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2)}]}$$

 Posito

Posito autem $x = a$ erit:

$$y^{I} = 2a + dx - V[2aa + 3adx + dx^2 - (a+dx)V(aa-dx^2)]$$

Jam cum sit $V(aa - dx^2) = a - \frac{dx^2}{2a}$, sequentes enim termini tuto negligi poterunt, quia non omnes, qui sunt infinities maiores, destruentur, vt mox patebit: erit $y^{I} = 2a + dx - V(aa + 2adx + \frac{3}{2}dx^2)$, porroque radicem extrahendo fiet $y^{I} = 2a + dx - \left(a + dx + \frac{dx^2}{4a}\right) = a - \frac{dx^2}{4a}$. At casu $x = a$, erit $y = a$; vnde cum sit $y^{I} = y + dy$ obtinebitur $dy = -\frac{dx^2}{4a}$: ex quo simul perspicitur functionem propositam y fieri maximum, si ponatur $x = a$.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale huius functionis:

$$y = 2ax - xx + aV(aa - xx)$$

casu, quo ponitur $x = a$.

Facta differentiatione more consueto fit $dy = 2adx - 2xdx - \frac{axdx}{V(aa - xx)}$, quod posito $x = a$ in infinitum abit, neque ergo hoc modo indicatur. Differentialia vero sequentium ordinum pariter omnia fient infinita, ita vt ex iis nequidem ex serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ &c. verus valor differentialis inueniri queat. Ponamus ergo $x + dx$ loco x, atque habebimus

$$y^{I} = 2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2 + aV(aa - xx - 2xdx - dx^2)$$

&

& posito $x = a$ erit:

$$y' = aa - dx^2 + a\sqrt{(-2adx - dx^2)}$$

At eodem casu fit $y = aa$; vnde erit $dy = - dx^2 + a\sqrt{-2adx}$, & cum dx^2 prae $\sqrt{-2adx}$ euanescat, erit $dy = a\sqrt{-2adx}$. Quare si differentiale dx affirmatiue capiatur, erit dy imaginarium; sin autem pro x scribatur $x - dx$, erit $dy = a\sqrt{2adx}$, cuius cum duplex sit valor alter affirmatiuus, alter negatiuus, functio y casu $x = a$ neque maxima fiet neque minima.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = 3aax - 3axx + x^3 + (a - x)^2 \sqrt[3]{(a^3 - x^3)}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Quoniam haec functio in istam formam transformatur $y = a^3 - (a - x)^3 + (a - x)^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{(aa + ax + xx)}$, posito $x = a + dx$ fit $y' = a^3 + dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, eodemque casu est $y = a^3$. Erit ergo $dy = dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, & cum dx^3 euanescat prae $dx^{\frac{7}{3}}$, erit $dy = - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$. casu ergo $x = a$ functio y neque maximum fit neque minimum.

EXEMPLUM. IV.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = (1 + \sqrt[4]{x})\sqrt{x}$$

casu $x = 0$.

Quoniam casus $x = 0$ proponitur, eoque fit $y = 0$, loco x

tantum dx ſcribatur, & habebitur $dy = dx^{\frac{1}{2}} + dx^{\frac{3}{4}}$, ſeu $dy = (1 + \sqrt[4]{dx})\sqrt{dx}$; vnde primum patet dx negatiue accipi non poſſe. Tum vero etiamſi alias $\sqrt{dx}$ geminum valorem prae ſe ferat, alterum affirmatiuum alterum negatiuum, tamen hoc caſu, quia eius radix $\sqrt[4]{dx}$ occurrit, non niſi affirmatiue accipi poteſt. At vero $\sqrt[4]{dx}$ vtrumque ſignificatum recipit, eritque $dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$ & $y' = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$, ob $y = 0$. Cum igitur vterqne ipſius y' valor maior ſit, quam ipſius y, ſequitur caſu $x = 0$ fieri y minimum. Quod autem functio $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ non complectatur hanc $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$, vtramque ad rationalitatem perducendo patebit. Prior enim fuſa in hanc formam $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$, & quadrata dat, $y^2 - 2y\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$ ſeu $y^2 + x = (x + 2y)\sqrt{x}$, quae denuo quadrata praebet $y^4 - 2y^2x - 4xxy + xx - x^3 = 0$. Altera vero $y + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ dabit $y^2 + x = (x - 2y)\sqrt{x}$ & porro $y^4 - 2yyx + 4xxy + xx - x^3 = 0$ quae ab illa eſt diverſa. At vero alterum membrum $\sqrt[4]{x^3}$ ambiguitatem ſigni retinet. Quamobrem iſta circumſtantia probe eſt notanda, quod etiamſi communiter radices poteſtatum parium vtrumque ſignum $+$ & $-$ includant, tamen haec ambiguitas ceſſet, ſi in eadem expreſſione earumdem radicum vlteriores radices poteſtatum

tum parium occurrant; quippe quae fierent imaginariae, ſi radices priores negatiue acciperentur. Atque ex hoc fonte maxima & minima ſecundae ſpeciei ſequuntur, quando talia non locum habere videantur.

EXEMPLUM V.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = a + \sqrt{(x-f)} + (x-f)\sqrt[4]{(x-f)} + (x-f)^2\sqrt[8]{(x-f)}$$

caſu quo ponitur $x = f$.

Ponamus $x-f=t$, & cum ſit $y=a+\sqrt{t}+t\sqrt[4]{t}+tt\sqrt[8]{t}$ huius differentiale quaeritur caſu $t=0$, quo fit $y=a$. Poſito ergo $t+dt$ ſeu $0+dt$ loco t fiet $y' = y+dy = a+\sqrt{dt}+dt\sqrt[4]{dt}+dt^2\sqrt[8]{dt}$, ideoque habebitur $dy=\sqrt{dt}+dt\sqrt[4]{dt}+dt^2\sqrt[8]{dt}$. Vbi primo patet differentiale dt negatiue accipi non poſſe, quin dy fiat imaginarium. Tum verum non ſolum $\sqrt{dt}$, ſed nequidem $\sqrt[4]{dt}$ negatiue accipi poteſt; fieret enim $\sqrt[8]{dt}$ imaginarium: vnde differentiale dy geminum tantum habet valorem, $dy=\sqrt{dt}+dt\sqrt[4]{dt}\pm dt^2\sqrt[8]{dt}$, quorum cum vterque maior ſit nihilo, ſequitur functionem y fieri minimum ſecundae ſpeciei poſito $t=0$ ſeu $x=f$. Quanquam ergo his caſibus termini $dt\sqrt[4]{dt}$ & $dt^2\sqrt[8]{dt}$ prae primo $\sqrt{dt}$ euaneſcant; tamen eorum ratio eſt habenda, ſi multiplicitas valorum ſpectetur, vt imaginaria euitentur.

EXEM-

EXEMPLUM VI.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = ax + bxx + (x-f)^n + (x-f)^{m+\frac{1}{2}n}$$

casu $x = f$.

Si ponatur $x = f$ fiet $y = af + bff$, & ſi loco x ponatur $x + dx$ ſeu $f + dx$, prodibit valor proximus $y' = af + bff + adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^{m+\frac{1}{2}n}$, ita vt ſit $dy = adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^m \sqrt{dx^n}$. Niſi ergo ſit n numerus par, differentiale dx negatiue ſumi nequit. Vltimus autem terminus $dx^m \sqrt{dx^n}$ ſignum habet ambiguum; vnde valor ipſius y' erit duplex vterque maior quam ipſius y, ſi quidem $a + 2bf$ fuerit quantitas affirmatiua, atque exponentes n & $m + \frac{1}{2}n$ vnitate fuerint maiores. Fiet ergo valor functionis y caſu $x = f$ minimus: hocque euenit ſive n ſit numerus integer ſiue fractus, dummodo numerator hoc caſu, & ipſe numerus illo caſu non fuerit par.

351. Imprimis autem haec methodus differentialia ex ipſis principiis deducendi vſum habet in functionibus tranſcendentibus, cum quibusdam caſibus differentiale more conſueto inuentum vel euaneſcit, vel in infinitum excreſcere videtur. Occurrunt autem hic eiusmodi infinitorum & infinite paruorum ſpecies, quae in algebraicis nunquam inueniuntur. Cum enim ſi i denotet numerum infinitum, li ſit quoque infinitus quidem, ſed tamen ad ipſum numerum i, eiusque adeo poteſtatem quamcunque i^n, quamtumuis exiguus ſtatuatur exponens n,

ratio-

rationem tenens infinite paruam, erit fractio $\frac{li}{i^n}$ infinite parua, neque ante finita esse poterit, quam exponens n fiat infinite paruus. Erit ergo li homogeneum cum i^n, si exponens n fuerit infinite paruus. Ponamus nunc $i = \frac{1}{\omega}$, existente ω quantitate infinite parua, erit $-l\omega$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^n}$, si exponens n sit infinite paruus, ideoque $-\frac{1}{l\omega}$ homogeneum erit cum ω^n; hincque $-\frac{1}{ldx}$, erit infinite paruum comparandum cum dx^n, existente n fractione infinite parua. Ita si fuerit $y = -\frac{1}{lx}$ differentiale ipsius y casu $x = 0$, erit $= -\frac{1}{ldx} = dx^n$ ideoque dy ad dx atque ad quamcunque ipsius dx potestatem tenebit rationem infinitam: atque prae $-\frac{1}{ldx}$ euanescunt omnes omnino potestates ipsius dx, quantumuis exigui fuerint earum exponentes.

352. Deinde quoque vidimus, si a fuerit numerus vnitate maior, & i infinitus, tum a^i fore infinitum tam excelsi gradus, vt prae eo non solum i, sed etiam quaeuis ipsius i potestas euanescat; neque i^n ante homogeneum cum a^i euadet, quam exponens n in infinitum fuerit auctus. Sit nunc $i = \frac{1}{\omega}$, ita vt ω infinite par-

vum denotet, erit $a^{\frac{1}{\omega}}$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^n}$, existente n numero infinite magno: ideoque $a^{\frac{-1}{\omega}}$ seu $\frac{1}{a^{1:\omega}}$, erit infinite paruum comparandum cum ω^n. Hinc $\frac{1}{a^{1:dx}}$, erit infinite paruum, quod autem prae omnibus ipsius dx potestatibus euanescit; cum homogeneum sit cum potestate dx^n existente n numero infinite magno. Quare si quaeratur differentiale ipsius $y = \frac{1}{a^{1:x}}$ casu $x = 0$; quoniam fit $y = 0$, erit $dy = \frac{1}{a^{1:dx}}$, ideoque infinities minus est quam potestas quantumuis alta ipsius dx.

353. Sin autem a sit numerus vnitate minor, tum quia $\frac{1}{a}$ fit vnitate maior, quaestio ad casum praecedentem reducitur. Scilicet si habeatur expressio $a^{\frac{1}{\omega}}$, ea ponendo $a = 1:b$ transmutabitur in $b^{-\frac{1}{\omega}}$, seu $\frac{1}{b^{1:\omega}}$, quae homogenea erit ob $b > 1$ cum ω^n, existente n numero infinite magno. His igitur praemissis sequentia exempla resoluere poterimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale functionis: $y = xx - \frac{1}{lx}$, *casu* $x = 0$.

Quoniam posito $x = 0$ fit $y = 0$, si ponamus $x + dx$, seu $0 + dx$ loco x, fiet $y' = dy = dx^2 - \frac{1}{l\,dx}$. Cum autem $- \frac{1}{l\,dx}$ homogeneum sit cum dx^n, denotante n numerum infinite paruum, prae eo dx^2 euanescet, eritque $dy = - \frac{1}{l\,dx} == dx^n$. At vero quia logarithmi numerorum negatiuorum sunt imaginarii, dx negatiue accipi non poterit; eritque adeo casu $x == 0$ functio y minimum, sed neque ad primam neque ad secundam speciem pertinens. Ad primam scilicet speciem non pertinet, quia y nullos habet valores antecedentes proximos, sed tantum minus est valoribus sequentibus, si x nihilo maius statuatur. Ad secundam autem speciem ideo non pertinet, quia valores sequentes, quibuscum comparatur, non sunt gemini: sic itaque prodit tertia species maximorum minimorumue, quae in functionibus logarithmicis & transcendentibus tantum locum habet, in algebraicis autem nunquam occurrit; de qua in sequente parte de lineis curuis fusius agetur.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale functionis: $y = (a-x)^n - x^n(la - lx)^n$ *casu quo* $x = a$.

Differentiale hoc si n sit numerus integer, ex formula generali $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ &c. inueniri potest, erit enim:

$$pdx = -n(a-x)^{n-1}dx - nx^{n-1}dx(la-lx)^n + nx^{n-1}(la-lx)^{n-1}dx$$

qui valor posito $x = a$ vtique euanescit: nam etiamsi sit $n = 1$, erit $pdx = -dx + dx = 0$. Si igitur vlterius progrediamur, erit: $\frac{1}{2}qdx^2 =$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}(a-x)^{n-2}dx^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^n + \frac{n^2}{2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-2}$$

Hinc ergo si fuerit $n = 1$, erit $\frac{1}{2}qdx^2 = \frac{dx^2}{2a}$ posito $x = a$. Simili modo si sit $n = 2$, ad terminum tertium $\frac{1}{6}rdx^3$ esset pergendum, & ita porro. Facilius ergo vtemur ipsis differentiationis principiis, & cum posito $x = a$ fiat $y = 0$, si ponamus $x + dx$ seu $a + dx$ loco x, erit $y' = (-dx)^n - (a+dx)^n[la - l(a+dx)]^n = y + dy = dy$ ob $y = 0$. Est vero $l(a+dx) = la + \frac{dx}{a} - \frac{dx^2}{2a^2} + \frac{dx^3}{3a^3} -$ &c. vnde fit $dy = (-dx)^n -$

$$-\left(a^n + na^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}dx^2\right)\left(-\frac{dx}{a} + \frac{dx^2}{2a^2} - \frac{dx^3}{3a^3}\right)^n = \frac{n}{2a}(-dx)^{n+1}$$

Casu

Casu igitur $x = a$ erit formulae propositae differentiale quaesitum dy, vt sequitur:

si $n = 1$	$dy = \frac{dx^2}{2a}$ vt ante inuenimus
si $n = 2$	$dy = -\frac{2dx^3}{2a}$
si $n = 3$	$dy = \frac{3dx^4}{2a}$
si $n = 4$	$dy = -\frac{4dx^5}{2a}$
&c.	&c.

Si ergo n fuerit numerus impar, functio y casu $x = a$ fit minimum, sin autem n sit numerus par, neque maximum neque minimum: quod idem valet, si n fuerit fractio denominatorem habens imparem. Sin autem n fuerit fractio denominatorem habens parem, tum dx negatiue accipi debet, ne in imaginaria incidamus; & ob ambiguitatem significationis functio quoque neque maxima neque minima euadet.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiale functionis: $y = x^x$ *casu* $x = \frac{1}{e}$ *denotante* e *numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est* $= 1$.

Quia fit in genere $dy = x^x dx(lx + 1)$, hoc differentiale casu $x = \frac{1}{e}$ seu $lx = -1$ euanescit. Compa-

retur ergo hoc differentiale cum forma generali $p\,dx + \frac{1}{2} q\,dx^2 +$ &c. erit $p = x^x(lx+1)$ & $q = x^x(lx+1)^2 + x^{x-1}$, & posito $lx = -1$ seu $x = \frac{1}{e}$, erit $q = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$. Quare differentiale quaesitum erit $dy = \frac{1}{2} e^{(e-1):e} dx^2$, euaditque ergo functio $y = x^x$ minimum casu $x = \frac{1}{e}$.

EXEMPLUM IV.

Inuenire differentiale functionis huius: $y = x^n + e^{-1:x}$ *casu quo* $x = 0$.

Quia facto $x = 0$ fit $y = 0$, si ponatur $x = 0 + dx$, erit $y' = dy = dx^n + \frac{1}{e^{1:dx}}$. Vidimus autem $\frac{1}{e^{1:dx}}$ homogeneum esse cum potestate ipsius dx infinita, seu cum dx^∞, ideoque prae dx^n euanescet; ita vt sit $dy = dx^n$.

354. Quod in differentialibus primis certis casibus vsu venit, vt consueta differentiationis regula non prodeant, idem quoque in differentialibus secundi ac tertii superiorumque ordinum euenit, iis casibus, quibus in forma differentiali completa:

$$d.y = p\,dx + \tfrac{1}{2} q\,dx^2 + \tfrac{1}{6} r\,dx^3 + \tfrac{1}{24} s\,dx^4 + \text{&c.}$$

quantitatum q, r, s, &c. nonnullae vel euanescunt, vel in infinitum abeunt. Scilicet cum sit:

$$dd.y = q\,dx^2 + r\,dx^3 + \tfrac{7}{12} s\,dx^4 + \text{&c.}$$

si

si quo casu fiat $q = 0$, tum erit $ddy = r dx^3$; sin autem eodem casu & r euanescat, tum erit $ddy = \frac{7}{12} s dx^4$, & ita porro. Sin autem vel q vel r vel s &c. fiat infinitum, tum ex ista serie differentiale secundum prorsus inueniri nequit, sed confugiendum erit ad principia differentialium: scilicet ponendo $x + dx$ loco x quaeratur valor y', & ponendo $x + 2dx$ loco x valor ipsius y'', quo facto erit verus valor differentialis secundi $ddy = dy' - dy = y'' - 2y' + y$. Simili modo si de differentiali tertio quaestio proponatur, tum praeterea in y loco x scribatur $x + 3dx$, inuentoque valore y''' erit $d^3y = y''' - 3y'' + 3y' - y$, sicque deinceps. Quos casus sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale secundum functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ *casu quo ponitur* $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Quaerendo differentiale completum ipsius y, ex forma $dy = p dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 + \frac{1}{24} s dx^4 +$ &c. prodibunt pro p, q, r, s, &c. sequentes valores:

$$p = -\frac{4aax}{(aa+xx)^2}; \quad q = -\frac{4a^4 + 12aaxx}{(aa+xx)^3}; \text{ atque}$$

$$r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}.$$

Cum nunc sit $ddy = q dx^2 + r dx^3 + \frac{7}{12} s dx^4 +$ &c. ob

ob $q = 0$ casu $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, eodemque casu sit $r = \frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$, fiet differentiale secundum quaesitum $ddy = \frac{27dx^3\sqrt{3}}{8a^3}$.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale tertium functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ *casu* $x = a$.

Quaerendo vt ante differentiale completum
$dy = \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 + \&c.$
quia est differentiale tertium $d^3y = rdx^3 + \frac{1}{4}sdx^4$, ob $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}$, fiet $r = 0$ casu $x = a$; quare ad valorem s est progrediendum, qui erit:

$$s = \frac{48a^4 - 144aaxx}{(aa+xx)^4} - \frac{8x(48a^4x - 48aax^3)}{(aa+xx)^5}$$

facto ergo $x = a$, erit $s = -\frac{96a^4}{2^4a^8} = -\frac{6}{a^4}$; vnde hoc casu erit $d^3y = -\frac{9dx^4}{a^4}$.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentialia cuiusque gradus functionis $y = ax^m + bx^n$ *casu* $x = 0$.

Ponendo successiue $x + dx$; $x + 2dx$; $x + 3dx$; &c. loco x valores sequentes functionis y erunt:

$$y' = a(x+dx)^m + b(x+dx)^n$$
$$y'' = a(x+2dx)^m + b(x+2dx)^n$$
$$y''' = a(x+3dx)^m + b(x+3dx)^n \quad \&c.$$

Posito

Poſito ergo $x = 0$, erit $y = 0$, eiusque differentialia erunt:

$$dy = a\,dx^m + b\,dx^n$$

$$ddy = (2^m - 2)\,a\,dx^m + (2^n - 2)\,b\,dx^n$$

$$d^3y = (3^m - 3.2^m + 3)\,a\,dx^m + (3^n - 3.2^n - 3.2^n + 3)\,b\,dx^n$$

$$d^4y = (4^m - 4.3^m + 6.2^m - 4)\,a\,dx^m + (4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4)\,b\,dx^n$$

&c.

Si igitur exponens n fuerit maior quam m, termini ſecundi in his expreſſionibus euaneſcunt prae primis. Interim tamen eorum ratio erit habenda, ſi n fuerit numerus fractus, vt caſus, quibus haec differentialia vel fiunt imaginaria, vel ambigua, diiudicari queant. Vlteriorem vero horum caſuum euolutionem in doctrinam de lineis curuis reſeruari conuenit.

CAPUT XV.

DE VALORIBUS FUNCTIONUM, QUI CERTIS CASIBUS VIDENTUR INDETERMINATI.

355.

Si functio ipsius x quaecunque y fuerit fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator posito loco x certo quodam valore simul euanescant; tum isto casu fractio $\frac{P}{Q}$ valorem functionis y exprimens euadet $= \frac{0}{0}$, quae expressio cum cuique quantitati siue finitae siue infinitae siue infinite paruae possit esse aequalis, ex ea prorsus valor ipsius y hoc casu colligi nequit, atque ideo videtur indeterminatus. Interim tamen facile perspicitur, quia praeter hunc casum functio y perpetuo valorem determinatum recipit, quicquid pro x substituatur, etiam hoc casu valorem ipsius y indeterminatum esse non posse. Manifestum hoc fiet vel ex hoc exemplo, si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a - x}$, quo facto $x = a$ fit vtique $y = \frac{0}{0}$. Cum autem numeratore per denominatorem diuiso fiat $y = a + x$, euidens est si ponatur $x = a$ fore $y = 2a$, ita vt hoc casu fractio illa $\frac{0}{0}$ aequiualeat quantitati $2a$.

356. Quoniam ergo supra ostendimus, inter cyphras rationem quamcunque intercedere posse, in huiusmodi exem-

exemplis ratio determinata, quam numerator ad denominatorem teneat, inueſtigari debet. Cum autem in cyphris abſolutis iſta diuerſitas perſpici nequeat, earum loco quantitas infinite paruae introduci debent, quae etſi ratione ſignificationis a cyphra non differunt, tamen ex diuerſis earum functionibus, quae numeratorem & denominatorem conſtituunt, valor fractionis ſponte elucet. Sic ſi habeatur iſta fractio $\frac{a\,dx}{b\,dx}$, etiamſi reuera numerator & denominator ſit $= 0$, tamen patet valorem huius fractionis eſſe determinatum nempe $= \frac{a}{b}$. Sin autem habeatur haec fractio $\frac{a\,dx^2}{b\,dx}$, huius valor erit nullus, quemadmodum huius valor $\frac{a\,dx}{b\,dx^2}$ eſt infinite magnus. Si igitur loco nihilorum, quae ſaepenumero in calculum ingrediuntur, infinite parua introducamus, hunc inde fructum percipiemus, vt rationem, quam illa nihila inter ſe tenent, mox cognoſcamus, nullumque amplius dubium circa ſignificationem huiusmodi expreſſionum ſuperſit.

357. Quo haec planiora reddantur, ponamus fractionis $y = \frac{P}{Q}$ tam numeratorem quam denominatorem euaneſcere, ſi ſtatuatur $x = a$. Ad haec autem nihila, quae inter ſe comparari non poſſunt, euitanda, ponamus $x = a + dx$, quae poſitio reuera in priorem $x = a$ recidit ob $dx = 0$. Cum vero, ſi loco x ponatur $x + dx$, functiones P & Q abeant in $P + dP$ & $Q + dQ$; poſitio-

ſitioni $x = a + dx$ ſatisfiet, ſi in his valoribus vbique ſtatuatur $x = a$, quo quidem caſu P & Q euaneſcere aſſumuntur. Hinc ſi loco x ponatur $a + dx$, fractio $\frac{P}{Q}$ transmutabitur in hanc $\frac{dP}{dQ}$, quae propterea valorem functionis $y = \frac{P}{Q}$ exprimit caſu $x = a$. Haecque expreſſio indeterminata amplius eſſe non poterit, ſiquidem functionum P & Q differentialia vera ſumantur, vti in capite praecedente docuimus. Hoc enim pacto differentialia dP & dQ nunquam in nihilum abſolutum abeunt, ſed niſi per differentiale dx ipſum exprimantur, ſaltem per eius poteſtates exhibebuntur. Quodſi igitur reperiatur $dP = Rdx^m$ & $dQ = Sdx^n$, erit functionis $y = \frac{P}{Q}$ caſu $x = a$ valor $= \frac{Rdx^m}{Sdx^n}$, qui propterea erit finitus & $= \frac{R}{S}$, ſi fuerit $m = n$; ſin autem ſit $m > n$, tum valor fractionis propoſitae reuera erit $= 0$: at ſi ſit $m < n$, iſte valor in infinitum excreſcit.

358. Quoties ergo huiusmodi fractio occurrit $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator certo caſu puta $x = a$ ſimul euaneſcant, valor iſtius fractionis hoc caſu $x = a$ per ſequentem regulam inuenietur:

Quaerantur quantitatum P *&* Q *differentialia caſu* $x = a$, *eaque loco ipſarum* P *&* Q *ſubſtituantur, quo facto frac-*

fractio $\frac{dP}{dQ}$ *exhibebit valorem fractionis* $\frac{P}{Q}$ *quaesitum.* Si differentialia dP & dQ methodo consueta inuenta neque infinita fiant neque euanescant casu $x = a$, tum ea retineri poterunt; sin autem ambo vel $= 0$ fiant vel $= \infty$, tum modo in praecedente Capite exposito haec differentialia completa casu $x = a$ inuestigari debent. Plerumque etiam calculus mirifice contrahitur, si antea ponatur $x - a = t$ seu $x = a - t$, quo prodeat fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator euanescunt casu $t = 0$; tum enim differentialia dP & dQ habebuntur, si vbique dt loco t substituatur.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor fractionis huius $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ *casu* $t = 0$.

Quoniam hoc casu $t = 0$ & numerator & denominator euanescit, loco t tantum scribatur dt, atque valor quaesitus exprimetur hac fractione $\frac{b - \sqrt{(bb - dt^2)}}{dt^2}$. Cum vero sit $\sqrt{(bb - dt^2)} = b - \frac{dt^2}{2b}$, ista fractio abit in hanc $\frac{dt^2}{2bdt^2} = \frac{1}{2b}$. Hinc fractio proposita $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ casu $t = 0$ recipit hunc valorem $\frac{1}{2b}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor huius fractionis :

$$\frac{\sqrt{(aa + ax + xx)} - \sqrt{(aa - ax + xx)}}{\sqrt{(a + x)} - \sqrt{(a - x)}}$$

casu $x = 0$.

Hic iterum statim dx loco x substitui potest; quo facto cum sit:

$$\sqrt{(aa + adx + dx^2)} = a + \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a}$$

$$\sqrt{(aa - adx + dx^2)} = a - \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a}$$

atque $$\sqrt{(a + dx)} = \sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{(a - dx)} = \sqrt{a} - \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

fiet numerator $= dx$ & denominator $= \frac{dx}{\sqrt{a}}$, ex quo fractionis propositae valor quaesitus erit $= \sqrt{a}$.

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor huius fractionis :

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{(2ax - aa)}}{xx - 2ax - aa + 2a\sqrt{(2ax - xx)}}$$

casu $x = a$.

Si more consueto differentialia sumantur & in loca numeratoris ac denominatoris substituantur, habebitur: $\frac{3xx - 8ax + 7a^2 - 2a^3 : \sqrt{(2ax - aa)}}{2x - 2a + 2a(a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}}$, cuius fractionis

nis numerator ac denominator denuo euenefcunt, fi ponatur $x = a$. Quare ob eandem rationem eorum loco denuo ipforum differentialia fubftituantur, prodibitque:

$$\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}};$$ cuius numerator ac denominator iterum cafu $x = a$ euanefcunt. Pergamus ergo eorum loco ipforum differentialia fubftituere:

$$\frac{6 - 6a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{6a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

Verum & hic pofito $x = a$ denuo tam numerator quam denominator euanefcunt. Porro igitur differentialibus ipforum loco fubftitutis, orietur:

$$\frac{5a^6 : (2ax - aa)^{\frac{7}{2}}}{-(5a^5 - 8a^4x + 4a^3xx) : (2ax - xx)^{\frac{7}{2}}}.$$

Nunc denique loco x ponatur, a prodibitque haec fractio determinata $\frac{5 : a}{-1 : a^2} = -5a$, qui eft valor quaefitus fractionis propofitae:

Quodfi autem antequam haec inueftigatio fufcipiatur, ponatur $x = a + t$, fractio propofita transmutabitur in hanc:

$$\frac{2a^3 + 2a^2t - att + t^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2at)}}{-2aa + tt + 2a\sqrt{(aa - tt)}}$$

quae cum recipiat formam $\frac{0}{0}$, fi ponatur $t = 0$, ponatur dt loco t, & erit:

$2a^3 +$

$$\frac{2a^3 + 2a^2dt - adt^2 + dt^3 - 2a^2V(aa + 2adt)}{-2aa + dt^2 + 2aV(aa - dt^2)}$$

Conuertantur iam formulae irrationales in ſeries, quae eousque continuentur, quoad termini a membro rationali non amplius deſtruantur:

$$V(aa + 2adt) = a + dt - \frac{dt^2}{2a} + \frac{dt^3}{2aa} - \frac{5dt^4}{8a^3}$$

$$V(aa - dt^2) = a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}.$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodibit fractio haec:

$$\frac{5dt^4 : 4a}{-dt^4 : 4aa} = -5a,$$

qui eſt valor fractionis propoſitae iam ante inuentus.

EXEMPLUM IV.

Inuenire valorem huius fractionis:

$$\frac{a + V(2aa - 2ax) - V(2ax - xx)}{a - x + V(aa - xx)}$$

caſu x = a.

Subſtitutis in loca numeratoris & denominatoris eorum differentialibus prodibit haec fractio, quae caſu $x = a$ ipſi propoſitae erit aequalis:

$$-\frac{a : V(aa - 2ax) - (a - x) : V(2ax - xx)}{-1 - x : V(aa - xx)}$$

cuius numerator ac denominator caſu $x = a$ fiunt infiniti. Verum ſi vterque per $-V(a - x)$ multiplicetur, habebitur

a :

$$\frac{a : \sqrt{2a} + (a - x)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(a - x)} + x : \sqrt{(a + x)}}$$

quae poſito $x = a$ dabit hunc valorem determinatum, $\frac{a : \sqrt{2a}}{a : \sqrt{2a}} = 1$, qui propterea aequalis eſt fractioni propoſitae caſu $x = a$.

359. Si igitur habeatur fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator caſu $x = a$ euaneſcat, eius valor per conſuetas differentiandi regulas aſſignari poterit, neque opus erit ad differentialia, quae capite praecedente tractauimus, recurrere. Sumtis enim differentialibus fractio propoſita $\frac{P}{Q}$ caſu $x = a$ aequalis erit fractioni $\frac{dP}{dQ}$; cuius ſi numerator & denominator poſito $x = a$ induant valores finitos, cognoſcetur valor fractionis propoſitae; ſin autem alter fiat $= 0$, manente altero finito, tum fractio erit vel $= 0$ vel $= \infty$, prout vel numerator euaneſcat vel denominator. At ſi alteruter vel vterque fiat $= \infty$, quod euenit, ſi diuidantur per quantitates caſu $x = a$ euaneſcentes, tum multiplicando vtrumque per hos diuiſores, iſtud incommodum tolletur, vti in exemplo poſtremo euenit. Quodſi vero tam numerator quam denominator caſu $x = a$ denuo euaneſcat, tum iterum, vti initio factum eſt, differentialia erunt capienda, ita vt haec fractio $\frac{ddP}{ddQ}$ prodeat, quae caſu $x = a$ propoſitae adhuc erit aequalis; &, ſi idem rurſus in hac fractione

vſu veniat, vt fiat $= \frac{0}{0}$, tum in eius locum ſurrogetur haec $\frac{d^3 P}{d^3 Q}$, atque ita porro, donec ad fractionem perveniatur, quae valorem determinatum exhibeat, ſiue finitum ſiue infinite magnum ſiue infinite paruum. Sic in exemplo tertio oportebat ad fractionem $\frac{d^4 P}{d^4 Q}$ progredi, antequam valorem fractionis propoſitae $\frac{P}{Q}$ aſſignari licuerit.

360. Vſus huius inueſtigationis elucet in definiendis ſummis ſerierum, quas ſupra capite II. §. 22. eruimus, ſi ponatur $x = 1$. Ex iis enim, quae ibi tradita ſunt, ſequitur fore:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$x + 3x^3 + 5x^5 + \ldots + (2n-1)x^{2n-1} = \frac{x + x^3 - (2n+1)x^{2n+1} + (2n-1)x^{2n+3}}{(1 - xx)^2}$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2 x^n = \frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2nn+2n-1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

&c.

Quod ſi nunc harum ſerierum ſummae deſiderentur caſu

ſu quo $x = 1$, in expreſſionibus iſtis tam numerator quam denominator euaneſcunt. Valores ergo harum ſummarum caſu $x = 1$ methodo hic expoſita definiri poterunt. Quoniam vero eaedem ſummae aliunde conſtant, ex conſenſu veritas huius methodi magis elucebit.

EXEMPLUM I.

Definire valorem huius fractionis $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ *caſu* $x = 1$, *qui exhibebit ſummam ſeriei* $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ *ex* n *terminis conſtantis, quae propterea erit* $= n$.

Quoniam caſu $x = 1$ numerator ac denominator euaneſcit, ſubſtituantur differentialia in eorum locum, habebiturque $\frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$, quae poſito $x = 1$ dat n pro ſumma ſeriei quaeſita.

EXEMPLUM II.

Definire valorem fractionis $\frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$ *caſu* $x = 1$, *qui exhibebit ſummam ſeriei* $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ *ex* n *terminis conſtantis, quae propterea erit* $= n$.

Sumtis differentialibus fractio propoſita transmutatur in hanc: $\frac{1 - (2n+1)x^{2n}}{-2n}$, cuius valor poſito $x = 1$, erit $= n$.

EXEMPLUM III.

Inuenire valorem huius fractionis: $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ *casu* $x=1$, *qui exprimet summam seriei* $1+2+3+\ldots+n$, *quam constat esse* $=\frac{nn+n}{2}$.

Sumtis differentialibus peruenietur ad hanc fractionem $\frac{1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$, cuius adhuc tam numerator quam denominator casu $x=1$ euanescit. Hinc denuo differentialia sumantur, vt prodeat haec fractio: $-\frac{n(n+1)^2x^{n-1}+n(n+1)(n+2)x^n}{2}$, quae posito $x=1$ abit in $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$ summam seriei propositae.

EXEXPLUM IV.

Inuenire valorem huius fractionis:

$$\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}$$

casu $x=1$, *qui exprimet summam seriei* $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ *quam constat esse* $=nn$.

Substitutis differentialibus in loca numeratoris & denominatoris prouenit haec fractio:

$$\frac{1+3xx-(2n+1)^2x^{2n}+(2n-1)(2n+3)x^{2n+2}}{-4x(1-xx)}$$

quae

quae cum adhuc idem incommodum habeat, vt posito $x = 1$ abeat in $\frac{0}{0}$, denuo differentialia sumantur,

$$\frac{6x - 2n(2n+1)^2 x^{2n-1} + (2n-1)(2n+2)(2n+3)x^{2n+1}}{-4 + 12xx}$$

quae posito $x = 1$ abit in:

$$\frac{6 - 2n(2n+1)^2 + (2n-1)(2n+2)(2n+2)}{8} = nn.$$

EXEMPLUM. V.

Inuenire valorem huius fractionis:

$$\frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2nn+2n-1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

casu $x = 1$, *qui dabit summam seriei* $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$, *quam constat esse* $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Sumtis numeratoris ac denominatoris differentialibus, fiet

$$\frac{1 + 2x - (n+1)^3 x^n + (n+2)(2nn+2n-1)x^{n+1} - nn(n+3)x^{n+2}}{-3(1-x)^2}$$

in qua cum numerator ac denominator posito $x = 1$ denuo euanescat, differentialia secunda sumantur:

$$\frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + (n+1)(n+2)(2nn+3n-1)x^n - n^2(n+2)(n+3)x^{n+1}}{6(1-x)}$$

Eodem vero adhuc subsistente incommodo, ad differentialia tertia procedatur, vt prodeat haec fractio:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 x^{n-2} + n(n+1)(n+2)(2nn+2n-1)x^{n-1} - n^2(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{-6}$$

 quae

quae tandem posito $x = 1$ abit in hanc formam determinatam:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 + n(n+1)(n+2)(nn-n-1)}{-6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$= \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$; qui est ille ipse valor, quo seriem memoratam exprimi inuenimus.

EXEMPLM VI.

Sit proposita ista fractio $\frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$, *cuius valorem casu* $x = 1$ *assignari oporteat.*

Quoniam haec fractio est productum ex his duabus: $\frac{x^m}{1+x^p} \cdot \frac{1-x^n}{1-x^p}$, prioris autem factoris casu $x = 1$ valor est $= \frac{1}{2}$, tantum opus est vt alterius factoris $\frac{1-x^n}{1-x^p}$ valor eodem casu quaeratur, qui sumtis differentialibus erit $= \frac{nx^{n-1}}{px^{p-1}} = \frac{n}{p}$: vnde fractionis propositae valor casu $x = 1$, erit $= \frac{n}{2p}$. Idem valor prodit, si immediate differentialia in fractione proposita capiantur: fiet enim $\frac{mx^{m-1} - (m+n)x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}}$, cuius valor posito $x = 1$, erit $= \frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$, vt ante.

361. Eadem methodo erit vtendum, si in fractione proposita $\frac{P}{Q}$ vel numerator vel denominator vel

vterque

vterque fuerit quantitas transcendens. Quae operationes, quo clarius explicentur, ſequentia exempla adiicere viſum eſt.

EXEMPLUM I.

Sit propoſita iſta fractio $\frac{a^n - x^n}{la - lx}$, *cuius valor quaeratur caſu* $x = a$.

Sumtis differentialibus ſtatim peruenitur ad hanc fractionem $\frac{nx^{n-1}}{-1:x} = nx^n$, cuius valor poſito $x = a$, erit na^n.

EXEMPLUM II.

Sit propoſita iſta fractio $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$, *cuius valor quaeritur caſu* $x = 1$.

Sumtis differentialibus numeratoris & denominatoris prodit $\frac{1:x}{-1:2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-2\sqrt{(1-x)}}{x}$, cuius valor poſito $x = 1$, cum ſit $= 0$, ſequitur fractionem $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ caſu $x = 1$ euaneſcere.

EXEMPLUM III.

Sit propoſita iſta fractio $\frac{a - x - ala + alx}{a - \sqrt{(2ax - xx)}}$, *cuius valor quaeratur poſito* $x = a$, *quo caſu numerator & denominator euaneſcunt.*

Differentiatis ſecundum regulam numeratore ac denominatore

minatore erit $\frac{-1+a:x}{-(a-x):\sqrt{(2ax-xx)}} = \frac{(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}}{-x(a-x)}$: vbi etſi numerator ac denominator caſu $x = a$ adhuc euaneſcit, tamen quia vterque diuiſibilis eſt per $a - x$, habebitur ita fractio $-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, cuius valor caſu $x = a$ eſt determinatus atque $= -1$; abitque igitur fractio propoſita in -1, ſi ponatur $x = a$.

EXEMPLUM IV.

Sit propoſita iſta fractio $\frac{e^x - e^{-x}}{l(1+x)}$, *cuius valor quaeritur poſito* $x = 0$.

Sumtis differentialibus habebitur iſta functio $\frac{e^x + e^{-x}}{1:(1+x)}$, quae poſito $x = 0$ dat 2 pro valore quaeſito.

EXEMPLUM V.

Inuenire valorem huius fractionis $\frac{e^x - 1 - l(1+x)}{xx}$, *caſu quo ponitur* $x = 0$.

Si loco numeratoris ac denominatoris eorum differentialia ſubſtituantur, orietur haec fractio $\frac{e^x - 1 : (1+x)}{2x}$, quae cum adhuc abeat in $\frac{0}{0}$, ſi ponatur $x = 0$, denuo differentialia ſumantur, vt habeatur $\frac{e^x + 1:(1+x)^2}{2}$, quae poſito $x = 0$ praebet $\frac{1+1}{2} = 1$. Quod idem patet ſi loco

loco x ſtatim $0 + dx$ ſubſtituatur: cum enim ſit $e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2}dx^2 + \&c.$ & $l(1+dx) = dx - \frac{1}{2}dx^2 + \&c.$ $\frac{e^{dx} - 1 - l(1+dx)}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} = 1.$

EXEMPLUM VI.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{lx}$, *caſu quo ponitur* $x = \infty$.

Quo iſta fractio ad formam, quae hoc caſu tranſeat in $\frac{0}{0}$ reducatur, ita repraeſentetur $\frac{1:lx}{1:x^n}$: ſic enim caſu $x = \infty$, tam numerator quam denominator euaneſcet. Ponatur vero porro $x = \frac{1}{y}$, ita vt caſu $x = \infty$, fiat $y = 0$, atque proponetur iſta fractio $-\frac{1:ly}{y^n}$, cuius valor caſu $y = 0$ inueſtigari debet. Sumtis autem differentialibus erit $\frac{1:y(ly)^2}{ny^{n-1}} = \frac{1:(ly)^2}{ny^n}$, quae poſito $y = 0$, cum abeat in $\frac{0}{0}$, ſumantur denuo differentialia, eritque $\frac{-2:(ly)^3}{n^2y^n}$; vbi quia idem incommodum adeſt, ſi porro differentialia ſumantur prodibit $\frac{6:(ly)^4}{n^3y^n}$, ſicque quousque procedamus, perpetuo idem incommodum occurret. Quamobrem vt hoc non obſtante valorem quaeſitum eruamus, ſit s valor fractionis $-\frac{1:ly}{y^n}$ caſu, quo

 poni-

ponitur $y = 0$, & cum eodem casu sit quoque $s = \frac{1:(ly)^2}{ny^n}$; erit ex illa aequatione $ss = \frac{1:(ly)^2}{y^{2n}}$, quae per istam diuisa dabit $s = \frac{ny^n}{y^{2n}} = \frac{n}{y^n}$, ex qua perspicitur casu $y = 0$ fieri s infinitum. Fit ergo fractionis $\frac{1:ly}{y^n}$ valor casu $y = 0$ infinitus, ideoque posito $y = dx$, habebit $\frac{1}{ldx}$ ad dx^n rationem infinitam, vti iam supra innuimus.

EXEMPLUM VII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{e^{-1:x}}$ *casu* $x = 0$, *quo tam numerator quam denominator euanescit.*

Sit hoc casu $\frac{x^n}{e^{-1:x}} = s$, erit sumtis differentialibus quoque $s = \frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x}:xx} = \frac{nx^{n+1}}{e^{-1:x}}$, & quia hic idem incommodum occurrit, perpetuoque recurrit, quousque differentiationes continuentur, remedio ante adhibito vtamur. Prior aequatio dat $x^n = e^{-1:x}s$, & $x^{n(n+1)} = e^{-(n+1):x}s^{n+1}$ altera aequatio dat $x^{n+1} = e^{-1:x}s:n$, vnde fit $x^{n(n+1)} = e^{-n:x}s^n:n^n$, qui valor illi aequatus dabit $e^{-1:x}sn^n = 1$ ideoque $s = \frac{1}{n^n e^{-1:x}} = \infty$, si $x = 0$. Quare posito x infinite paruo habebit dx^n ad $e^{-1:dx}$ rationem infinite

finite magnam, quicunque numerus finitus pro n statuatur: vnde sequitur $e^{-1:dx}$ esse infinite paruum homogeneum cum dx^m, si m fuerit numerus infinite magnus.

EXEMPLUM VIII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ *casu, quo ponitur* $x = \frac{\pi}{2}$ *seu arcui* 90 *graduum.*

Sumtis differentialibus obtinebitur haec fractio $= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x}$, quae posito $x = \frac{\pi}{2}$ ob $\sin x = 1$ & $\cos x = 0$ abit in 1: ita vt vnitas sit valor quaesitus fractionis propositae. Quod idem patet sine differentiatione: cum enim sit $\cos x = \sqrt{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$ fractio proposita abit in hanc $\frac{\sqrt{(1 - \sin x)} + \sqrt{(1 + \sin x)}}{\sqrt{(1 + \sin x)} - \sqrt{(1 - \sin x)}}$, quae fit euidenter $= 1$, si fiat $\sin x = 1$.

EXEMPLUM IX.

Inuenire valorem huius expressionis $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ *casu quo ponitur* $x = 1$.

Loco numeratoris & denominatoris eorum differentialibus substitutis prodibit ista fractio: $\frac{x^x(1 + lx) - 1}{-1 + 1 : x}$; quae cum etiam nunc fiat $= \frac{0}{0}$ posito $x = 1$, sumantur

tur denuo differentialia, vt prodeat $\frac{x^x(1+lx)^2+x^x:x}{-1:xx}$, quae posito $x=1$ abit in -2, qui est valor fractionis propositae casu $x=1$.

362. Quoniam hic omnes expressiones, quae quibusdam casibus indeterminatos valores recipere videntur, pertractare constituimus, huc non solum pertinent eae fractiones $\frac{P}{Q}$, quarum numerator ac denominator certo casu euanescunt; sed etiam eiusmodi fractiones, quarum numerator ac denominator certo casu fiunt infiniti, huc sunt referendae: propterea quod earum valores aeque indeterminati videntur. Si scilicet P & Q eiusmodi fuerint functiones ipsius x, vt casu quopiam $x=a$, ambae fiant infinitae, fractioque $\frac{P}{Q}$ induat hanc formam $\frac{\infty}{\infty}$; quoniam infinita aeque ac cyphrae inter se rationem quamcunque tenere possunt, hinc valor verus minime cognosci potest. Hic quidem casus ad praecedentem reuocari potest, fractionem $\frac{P}{Q}$ in hanc formam $\frac{1:Q}{1:P}$ transmutando, cuius fractionis nunc numerator ac denominator casu $x=a$ euanescunt; ideoque eius valor modo ante tradito inueniri potest. At vero quoque sine hac transformatione valor inuenietur, si loco x non a, sed $a+dx$ substituatur, quo facto non eiusmodi infinita absoluta ∞ prouenient; sed ita erunt expressa

$\frac{1}{dx}$ vel $\frac{A}{dx^n}$; quae expreſſiones etſi ſunt aeque infinitae ac ∞, tamen comparatione inter dx eiusue poteſtates inſtituta, valor quaeſitus facile colligetur.

363. Ad eandem claſſem quoque pertinent producta ex duobus factoribus conſtantia, quorum alter certo caſu $x = a$ euaneſcit, alter vero in infinitum abit: cum enim quaeuis quantitas per huiusmodi productum $0 . \infty$ repraeſentari poſſit, eius valor indefinitus videtur. Sit PQ huiusmodi productum, in quo, ſi ponatur $x = a$, fiat $P = 0$ & $Q = \infty$, eius valor per praecepta ante tradita inuenietur, ſi ponatur $Q = \frac{1}{R}$, tum enim productum PQ transmutabitur in fractionem $\frac{P}{R}$: cuius numerator ac denominator ante caſu $x = a$ euaneſcunt, ideoque eius valor methodo ambo expoſita inueſtigari poterit. Sic ſi quaeratur valor huius producti $(1-x)\tan g\frac{\pi x}{2}$ caſu $x = 1$, quo fit $1 - x = 0$ & $\tan g\frac{\pi x}{2} = \infty$, conuertatur id in hanc fractionem $\frac{1-x}{\cot\frac{1}{2}\pi x}$, cuius numerator ac denominator caſu $x = 1$ euaneſcunt. Cum igitur ſit differentiale numeratoris $(1-x) = -dx$, & differentiale denominatoris $\cot\frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi dx : 2}{(\sin\frac{1}{2}\pi x)^2}$, caſu $x = 1$

valor fractionis propositae erit $= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} . \sin \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$, ob $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

364. Imprimis autem huc sunt referendae eiusmodi expressiones, quae dum ipsi x certus quidam valor tribuitur, abeunt in huiusmodi formam $\infty - \infty$: quoniam enim duo infinita quauis quantitate finita inter se discrepare possunt, manifestum est hoc casu valorem expressionis non determinari, nisi differentia inter illa duo infinita assignari possit. Iste ergo casus occurrit, si proponatur huiusmodi functio $P - Q$, in qua posito $x = a$ fiat tam $P = \infty$ quam $Q = \infty$, quo casu ope regulae ante traditae valor quaesitus non tam facile assignari potest. Etsi enim posito hoc casu fieri $P - Q = f$, statuatur $e^{P-Q} = e^f$, ita vt sit $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, vbi casu $x = a$ tam numerator e^{-Q} quam denominator e^{-P} euanescit; tamen si regula ante tradita huc transferatur, fiet $e^f = \frac{e^{-Q} dQ}{e^{-P} dP}$, vnde ob $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, fieret $1 = \frac{dQ}{dP}$, ideoque valor quaesitus ipsius f hinc non innotescit. Quoties quidem P & Q sunt quantitates algebraicae, quoniam hae infinitae fieri nequeunt, nisi sint fractiones, quarum denominatores euanescunt; tum $P - Q$ in vnicam fractionem colligi poterit, cuius denominator

 pari-

pariter euanescet. Quo facto si etiam numerator euanescat, valor modo supra explicato definietur: sin autem numerator non euanescat, tum eius valor reuera erit infinitus. Sic si huius expressionis $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ valor desideretur casu $x = 1$, quia ea abit in $\frac{1-x}{1-xx} = \frac{-1}{1+x}$, patet valorem quaesitum esse $= -\frac{1}{2}$.

365. Verum si functiones P & Q fuerint transcendentes, tum plerumque haec transformatio ad calculum molestissimum perduceret. Expediet ergo his casibus methodo directa vti, atque loco $x = a$, quo ambae quantitates P & Q in infinitum abeunt, poni $x = a + \omega$, existente ω quantitate infinite parua, pro qua dx accipi poterit. Quo facto si fiat $P = \frac{A}{\omega} + B$ & $Q = \frac{A}{\omega} + C$, manifestum est functionem $P - Q$ abituram esse in $B - C$, qui erit valor finitus. Rationem igitur huiusmodi functionum valores inuestigandi sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor huius expressionis $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ *casu, quo ponitur* $x = 1$.

Quoniam tam $\frac{x}{x-1}$ quam $\frac{1}{lx}$ fit infinitum posito $x = 1$, statuatur $x = 1 + \omega$, atque expressio proposita transformabitur in $\frac{1+\omega}{\omega} - \frac{1}{l(1+\omega)}$. Cum igitur sit

$l(1+\omega)$

$l(1+\omega) = \omega - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 - \&c. = \omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.)$ habebitur

$$\frac{(1+\omega)(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.)-1}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.)} = \frac{\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{6}\omega^2 + \&c.}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\omega + \&c.}{1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.}$$

Posito nunc ω infinite paruo seu $\omega = 0$, manifestum est valorem quaesitum esse $= \frac{1}{2}$.

EXEMPLUM II.

Denotantibus e *numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est* $= 1$, *&* π *semicircumferentiam circuli, cuius radius est* $= 1$, *inuestigare valorem huius expressionis:*

$$\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}, \textit{ casu } x = 0.$$

Expressio ista proposita exhibet summam huius seriei:

$$\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{4+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{16+xx} + \frac{1}{25+xx} + \&c.$$

vnde si ponatur $x = 0$, prodire debet summa seriei huius $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$ quam constat esse $= \frac{\pi\pi}{6}$. Facto autem $x = 0$ expressionis propositae $\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ valor maxime videtur indeterminatus, ob omnes terminos infinitos. Ponatur ergo $x = \omega$, existente ω quantitate infinite parua, atque membrum prius $\frac{\pi x - 1}{2xx}$ abit in $-\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\pi}{2\omega}$. Cum deinde

sit $e^{2\pi\omega} - 1 = 2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 + \&c.$ alterum membrum $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ abit in

$$\frac{\pi}{\omega(2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 + \&c.)} = \frac{1}{2\omega^2(1 + \pi\omega + \frac{2}{3}\pi^2\omega^2 + \&c.)}$$

At est $\frac{1}{1 + \pi\omega + \frac{2}{3}\pi^2\omega^2 + \&c.} = 1 - \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^2\omega^2 - \&c.$ vnde posterius membrum fit $= \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{6}\pi^2 - \&c.$ ad quod si prius addatur prodit $\frac{1}{6}\pi^2$, qui est valor quaesitus expressionis propositae casu $x = 0$.

Idem quoque per methodum fractionum, quarum numerator ac denominator certo casu euanescunt, praestari potest: expressio enim proposita in hanc fractionem transmutatur: $\frac{\pi x e^{2\pi x} - e^{2\pi x} + \pi x + 1}{2xxe^{2\pi x} - 2xx}$, cuius numerator ac denominator casu $x = 0$ euanescunt. Sumtis ergo differentialibus oritur:

$$\frac{\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x} - 2\pi e^{2\pi x} + \pi}{4xe^{2\pi x} + 4\pi xxe^{2\pi x} - 4x}$$

siue haec $\frac{\pi - \pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x}}{4xe^{2\pi x} + 4\pi xxe^{2\pi x} - 4x}$

cuius, si ponatur $x = 0$, adhuc numerator ac denominator euanescunt. Quare sumtis denuo differentialibus habebitur:

$$\frac{-2\pi\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi e^{2\pi x} + 4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi^2 xxe^{2\pi x} - 4}$$

seu $$\frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x} + 4\pi x e^{2\pi x} + 2\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 1}$$

seu $$\frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2 \pi^2 - e^{-2\pi x}}$$

cuius numerator ac denominator adhuc euanescunt casu $x = 0$. Quocirca iterum differentialia sumantur

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}$$

quae fractio posito $x = 0$ abit in $\frac{\pi^2}{6}$, vt ante.

EXEMPLUM III.

Retinentibus e *&* π *eosdem valores, quaeratur valor expressionis huius casu* x = o

$$\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}.$$

Expressio haec transmutatur in hanc: $\frac{\pi e^{\pi x} - \pi}{4x e^{\pi x} + 4x}$ cuius numerator ac denominator casu $x = 0$ euanescunt. Ponatur ergo $x = \omega$, & cum sit

$$e^{\pi\omega} = 1 + \pi\omega + \tfrac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c.$$

formula proposita transmutatur in hanc:

$$\frac{\pi^2\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^2 + \frac{1}{6}\pi^4\omega^3 + \&c.}{8\omega + 4\pi\omega^2 + 2\pi^2\omega^3 + \&c.}$$

quae posito ω infinite paruo statim dat $\frac{1}{8}\pi^2$, qui est valor quaesitus expressionis propositae casu $x = 0$. At vero expressio proposita $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$, exhibet summam

mam huius seriei $\frac{1}{1+xx}+\frac{1}{9+xx}+\frac{1}{25+xx}+\frac{1}{49+xx}+$ &c. cuius summa posito $x=0$ vtique fit $=\frac{1}{8}\pi^2$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur valor huius expressionis $\frac{1}{2xx}-\frac{\pi}{2x\,tang\,\pi x}$ *casu* $x=0$.

Formula haec proposita $\frac{1}{2xx}-\frac{\pi}{2x\,\mathrm{tang}\,\pi x}$ exprimit summam huius seriei infinitae

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{4-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{16-xx}+\text{\&c.}$$

Si igitur ponatur $x=0$, prodire debet summa seriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ &c. quae est $=\frac{1}{6}\pi\pi$.

Quoniam est $\mathrm{tang}\,\pi x=\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}$, expressio proposita induet hanc formam: $\frac{1}{2xx}-\frac{\pi\cos\pi x}{2x\sin\pi x}=\frac{\sin\pi x-\pi x\cos\pi x}{2xx\sin\pi x}$ cuius numerator ac denominator euanescit posito $x=0$. Ponatur ergo $x=\omega$ & cum sit

$$\sin\pi x=\pi\omega-\frac{1}{6}\pi^3\omega^3+\text{\&c.}$$

$$\cos\pi x=-\frac{1}{2}\pi^2\omega^2+\text{\&c.}$$

expressio proposita fiet:

$$\frac{\pi\omega-\frac{1}{6}\pi^3\omega^3+\text{\&c.}-\pi\omega+\frac{1}{2}\pi^3\omega^3-\text{\&c.}}{2\pi\omega^3-\frac{1}{3}\pi^3\omega^5+\text{\&c.}}=\frac{\frac{1}{3}\pi^3\omega^3-\text{\&c.}}{2\pi\omega^3-\text{\&c.}}$$

quae ob ω infinite paruum dat $\frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM V.

Cum sit summa huius seriei infinitae

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\&c.=\frac{\pi\, \sin \frac{1}{2}\pi x}{4x\, \cos \frac{1}{2}\pi x}$$

inuenire eius summam, si fuerit $x=0$.

Quia est $\sin \frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{48}\pi^3 x^3 + \&c.$ & $\cos \frac{1}{2}\pi x = 1 - \frac{1}{8}\pi^2 x^2 + \&c.$ erit expressio proposita

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi^2 x - \frac{1}{48}\pi^4 x^3 + \&c.}{4x - \frac{1}{2}\pi^2 x^3 + \&c.} = \frac{\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{48}\pi^4 x^2 + \&c.}{4 - \frac{1}{2}\pi^2 x^2 + \&c.}$$

in qua si fiat $x=0$, valor erit manifesto $=\frac{1}{8}\pi^2$, quam esse summam seriei $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\&c.$ supra pluribus modis est demonstratum. Sin autem pro x sumatur numerus par quicunque, summa seriei propositae semper est $=0$.

366. In his seriebus, quas binis vltimis exemplis tractauimus, aliisque litteram variabilem x continentibus, ipsi x eiusmodi valores tribui possunt, vt quidam termini in infinitum excrescant, quibus quidem casibus summa totius seriei fiet infinita. Sic series:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{4-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{16-xx}+\&c.$$

si pro x ponatur numerus quicunque integer, vnus perpetuo terminus ob denominatorem euanescentem fit infinitus; hancque ob causam ipsa seriei summa infinita euadet. Quodsi autem iste terminus infinitus ex serie tolla-

tollatur, tum summa reliqua sine dubio erit finita, exprimeturque summa priori infinita termino isto infinito mulctata, hoc modo $\infty - \infty$: quemnam ergo habitura sit valorem determinatum modo hic exposito inueniri poterit; id quod clarius ex subiunctis exemplis perspicietur.

EXEMPLUM I.

Inuenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$

casu $x = 1$, *& demto termino primo, qui hoc casu in infinitum augetur.*

Quia in genere summa est $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \,\text{tang.}\, \pi x}$, erit summa quaesita $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \,\text{tang}\, \pi x} - \frac{1}{1-xx}$ posito $x = 1$. Sit $x = 1 + \omega$, & habebitur pro summa quaesita $\frac{1}{2(1+2\omega+\omega\omega)} - \frac{\pi}{2(1+\omega)\,\text{tang}(\pi+\omega\pi)} + \frac{1}{2\omega+\omega\omega}$.
At est $\text{tang}(\pi+\omega\pi) = \text{tang}\,\omega\pi = \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^3\omega^3 + \&c.$
Vnde cum primus terminus $\frac{1}{2xx}$ posito $x = 1$ determinatum habeat valorem $\frac{1}{2}$, duo reliqui tantum termini sunt spectandi, qui erunt

$$\frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{\pi}{2\omega(1+\omega)(\pi+\frac{1}{3}\pi^3\omega^2)} = \frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{1}{\omega(2+2\omega)(1+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2)}$$

si quidem ω sit infinite paruum, quo casu etiam termi-

minus $\frac{1}{3}\pi^2\omega^2$ negligi poterit. Proueniet autem $\frac{\omega}{\omega(2+\omega)\,(2+2\omega)} = \frac{1}{4}$ posito $\omega = 0$, estque ergo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ summa seriei: $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+$ &c. vti aliunde constat.

EXEMPLUM II.

Inuenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{4-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{16-xx}+\text{\&c.}$$

casu quo pro x *ponitur numerus quicunque integer* n *& demto ex serie termino illo* $\frac{1}{nn-xx}$, *qui sit infinitus.*

Summa ergo haec, quae quaeritur, ita erit expressa $\frac{1}{2xx}-\frac{\pi}{2x\tang\pi x}-\frac{1}{nn-xx}$, si quidem statuatur $x=n$, quo quidem casu primus terminus $\frac{1}{2xx}$ abit in $\frac{1}{2nn}$, bini vero reliqui ambo fiunt infiniti. Ponatur ergo $x=n+\omega$, & cum sit $\tang(\pi n+\pi\omega)=\tang\pi\omega=\pi\omega$, posito ω infinite paruo, habebimus pro summa quaesita:

$$\frac{1}{2nn}-\frac{\pi}{2(n+\omega)\pi\omega}+\frac{1}{2n\omega+\omega\omega} \quad \text{seu}$$

$$\frac{1}{2nn}-\frac{1}{\omega(2n+2\omega)}+\frac{1}{\omega(2n+\omega)}=\frac{1}{2nn}+\frac{1}{(2n+2\omega)(2n+\omega)}$$

vnde si fiat $\omega=0$, prodibit summa quaesita $=\frac{1}{2nn}+\frac{1}{4nn}=\frac{3}{4nn}$. Quocirca erit $\frac{3}{4nn}=$

1—

$$\frac{1}{1-nn}+\frac{1}{4-nn}+\frac{1}{9-nn}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)^2-nn}$$

$$+\frac{1}{(n+1)^2-nn}+\frac{1}{(n+2)^2-nn}+\&c.$$

in infinitum, siue erit istius seriei infinitae summa:

$$\frac{1}{(n+1)^2-nn}+\frac{1}{(n+2)^2-nn}+\frac{1}{(n+3)^2-nn}+\&c.$$

$$=\frac{3}{4nn}+\frac{1}{nn-1}+\frac{1}{nn-4}+\frac{1}{nn-9}+\ldots+\frac{1}{nn-(n-1)^2}.$$

EXEMPLUM III.

Inuenire summam huius seriei

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\&c.$$

si ponatur $x=1$, *atque terminus primus* $\frac{1}{1-xx}$, *qui hoc casu sit infinitus, auferatur.*

Cum huius seriei summa sit in genere $=\frac{\pi \sin \frac{1}{2}\pi x}{4x \cos \frac{1}{2}\pi x}$ erit summa quaesita $=\frac{\pi \sin. \frac{1}{2}\pi x}{4\pi x \cos. \frac{1}{2}\pi x}-\frac{1}{1-xx}$, si ponatur $x=1$. Quia vero vterque terminus sit infinitus, ponatur $x=1-\omega$, & cum sit $\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega)=\cos\frac{1}{2}\pi\omega=1-\frac{1}{8}\pi^2\omega^2$, & $\cos(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega)=\sin\frac{1}{2}\pi\omega=\frac{1}{2}\pi\omega$ ob ω infinite paruum, habebitur ista expressio:

$$\frac{\pi(1-\frac{1}{8}\pi^2\omega^2)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\pi\omega}-\frac{1}{2\omega-\omega\omega}=\frac{1}{\omega(2-2\omega)}-\frac{1}{\omega(2-\omega)}$$

quae fit $=\frac{1}{4}$ posito $\omega=0$, estque propterea

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\&c.$$

EXEM-

EXEMPLM IV.

Inuenire summam seriei huius:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\text{\&c.}$$

si pro x *ponatur numerus quicunque integer impar* $2n-1$ *isque terminus* $\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$, *qui hoc casu fit infinitus, e medio tollatur.*

Erit ergo summa, quae quaeritur, $=\frac{\pi\,\text{sin}\,\frac{1}{2}\pi x}{4x\,\text{cos}\,\frac{1}{2}\pi x}-\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$ posito $x=2n-1$. Statuamus ergo $x=2n-1-\omega$, existente ω infinite paruo, fietque $\text{sin}\,\frac{1}{2}\pi x=\text{sin}\left(\frac{2n-1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega\right)=\pm\,\text{cos}\,\frac{1}{2}\pi\omega$, vbi signum superius valet, si sit n numerus impar, inferius vero si sit par. Simili modo erit $\text{cos}\,\frac{1}{2}\pi x=\text{cos}\left(\frac{2n-1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega\right)=\pm\,\text{sin}\,\frac{1}{2}\pi\omega$; ideoque siue n sit par siue impar, erit $\frac{\text{sin}\,\frac{1}{2}\pi x}{\text{cos}\,\frac{1}{2}\pi x}=\frac{1}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\pi\omega}=\frac{1}{\frac{1}{2}\pi\omega}$. Hinc summa quaesita ita exprimetur:

$$\frac{1}{2\omega(2n-1-\omega)}-\frac{1}{\omega[2(2(2n-1)-\omega]},$$

eritque propterea $=\frac{1}{4(2n-1)^2}$. Sic si sit $n=2$, erit

$$\frac{1}{36}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{40}+\frac{1}{72}+\frac{1}{112}+\text{\&c.}$$

cuius summationis veritas aliunde constat.

CAPUT

CAPUT XVI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM INEXPLICABILIUM.

367.

Functiones inexplicabiles hic voco, quae neque expressionibus determinatis, neque per aequationum radices explicari possunt; ita vt non solum non sint algebraicae, sed etiam plerumque incertum sit, ad quod genus transcendentium pertineant. Huiusmodi functio inexplicabilis est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{x}$, quae vtique ab x pendet, at nisi x sit numerus integer nullo modo explicari potest. Simili modo haec expressio $1.\,2.\,3.\,4.\ldots x$, erit functio inexplicabilis ipsius x, quoniam si x sit numerus quicunque, eius valor non solum non algebraice, sed ne quidem per vllum certum quantitatum transcendentium genus exprimi potest. Generatim ergo talium functionum inexplicabilium notio ex seriebus deriuari potest. Sit enim proposita series quaecunque

$$\begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \ldots & & x \\ A & + & B & + & C & + & D & + & \ldots & + & X \end{matrix}$$

cuius summa si formula finita exprimi nequeat, praebebit functionem inexplicabilem ipsius x, nempe

$$S = A + B + C + D + \ldots + X.$$

 Simili-

Similiter continua producta ex terminis serierum vti

$$P = A B C D \ldots . X$$

exhibebunt functiones inexplicabiles ipsius x, quae autem ope logarithmorum ad formam priorem reuocari possunt, erit enim:

$$lP = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX.$$

368. Hoc igitur capite methodum explicare constitui, huiusmodi functionum inexplicabilium differentialia inuestigandi. Quod argumentum, quamuis ad primam huius operis partem, vbi praecepta calculi differentialis sunt tradita, pertinere videatur; tamen quoniam vberiorem doctrinae serierum cognitionem postulat, ad quam in hac altera parte peruenire licuit, ordinem naturalem relinquere coacti hoc loco attingamus. Cum autem haec inuestigatio prorsus sit noua, neque a quoquam adhuc tractata, tantum abest vt hanc calculi differentialis partem absoluere queamus, vt potius prima tantum eius elementa adumbrare conemur. Praeterea vero nonnullas quaestiones proponam, quarum enodatio differentiationem huiusmodi functionum inexplicabilium requirat, quo simul vsus huius tractationis, qui autem in posterum sine dubio multo amplior erit, clarius perspiciatur.

369. Ad huiusmodi functiones inexplicabiles differentiandas ante omnia necesse est, vt earum valores inuestigemus, quos induunt, si pro x ponatur $x + \omega$.

Sit igitur

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

atque ponatur Σ valor ipſius S, quem recipit, ſi pro x ponatur $x + \omega$, ſitque Z terminus ſeriei reſpondens indici $x + \omega$. Iam igitur termini, qui reſpondent indicibus $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, &c. indicentur per X', X'', X''', X^{IV}, &c. atque is, qui conuenit indici infinito $x + \infty$ per $X^{|\infty|}$. Similique modo termini competentes indicibus $x + \omega + 1$, $x + \omega + 2$, $x + \omega + 3$ &c. indicentur per Z', Z'', Z''', &c. & ſit $Z^{|\infty|}$ terminus reſpondens indici $x + \omega + \infty$. Quibus poſitis erit

$$S' = S + X'$$
$$S'' = S + X' + X''$$
$$S''' = S + X' + X'' + X'''$$
&c.
$$S^{|\infty|} = S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{|\infty|}$$

Simili modo cum etiam Σ ſucceſſiue terminis Z', Z'' &c. augeatur, erit

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$
&c.
$$\Sigma^{|\infty|} = \Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{|\infty|}$$

370. Nunc natura ſeriei S, S', S'', S''', &c. eſt perpendenda, qualis futura ſit, ſi in infinitum continue-

 tur

tur: quae ſi in infinito cum progreſſione arithmetica confundatur; quod fit ſi termini ſeriei X, X', X'', X''', &c. in infinito ad aequalitatem conuergant, ita vt differentiae ſeriei S, S', S'', &c. tandem fiant aequales: hoc caſu quantitates $S^{|\infty|}, S^{|\infty+2|}, S^{|\infty+1|}$ &c. erunt in arithmetica progreſſione, & cum ſit $\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty+\omega|}$ ob $S^{|\infty+\omega|} = S^{|\infty|} + \omega(S^{|\infty+1|} - S^{|\infty|}) = \omega S^{|\infty+1|} + (1-\omega) S^{|\infty|}$ erit $\Sigma^{|\infty|} = \omega S^{|\infty+1|} + (1-\omega) S^{|\infty|}$. At eſt $S^{|\infty+1|} = S^{|\infty|} + X^{|\infty+1|}$, vnde fit $\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|}$, ex quo obtinebitur haec aequatio

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{|\infty|} =$$
$$S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|}$$

ex qua definitur valor quaeſitus Σ, quem induit functio S, dum in ea $x+\omega$ loco x ſubſtituitur; eritque

$$\Sigma = S + \omega X^{|\infty+1|} + X' + X'' + X''' + \text{\&c. in infinitum}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - \text{\&c. in infinitum}$$

Quare ſi ſeriei A, B, C, D, &c. termini infiniteſimi euaneſcant, terminus $\omega X^{|\infty+1|}$ euaneſcit, & omitti poteſt.

371. Exprimitur ergo valor ipſius Σ per nouam ſeriem infinitam, quae exhiberi poteſt, ſi ſeriei $A + B + C +$ &c. habeatur terminus generalis, ex quo valores terminorum Z', Z'', Z''', &c. definiri queant. Poſito ergo ω infinite paruo, cum ſit $\Sigma - S$ differentiale functionis S, hoc differentiale dS per ſeriem infinitam exprimetur. Atque ſi nequidem altiores poteſtates ipſius

ω

ω negligantur, habebitur differentiale completum functionis huius inexplicabilis S, cuius natura, quo clarius ob oculos ponatur, sequentibus exemplis hoc negotium illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}.$$

Quoniam huius seriei terminus generalis X est $= \frac{1}{x}$ ac propterea

$X' = \frac{1}{x+1}$	$Z' = \frac{1}{x+1+\omega}$
$X'' = \frac{1}{x+2}$	$Z'' = \frac{1}{x+2+\omega}$
$X''' = \frac{1}{x+3}$	$Z''' = \frac{1}{x+3+\omega}$
&c.	&c.

ob $X^{|\infty+1|} = \frac{1}{x+\infty+1} = 0$, si loco x ponatur $x+\omega$ functio S abibit in Σ, vt sit

$$\Sigma = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \&c.$$
$$- \frac{1}{x+1+\omega} - \frac{1}{x+2+\omega} - \frac{1}{x+3+\omega} - \&c.$$

siue binis his terminis in singulos colligendis, erit

$$\Sigma = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)} + \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \&c.$$

 seu

seu cum sit

$$\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \&c.$$

$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+2)^4} + \&c.$$

&c.

erit seriebus secundum potestates ipsius ω dispositis

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ \omega\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c.\right)\\ &- \omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c.\right)\\ &+ \omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c.\right)\\ &- \omega^4\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \&c.\right)\end{aligned}$$

&c.

Posito ergo dx pro ω obtinebimus functionis propositae S differentiale completum

$$\begin{aligned}dS = dx&\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c.\right)\\ - dx^2&\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c.\right)\\ + dx^3&\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c.\right)\\ - dx^4&\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \&c.\right)\end{aligned}$$

&c.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis ipsius S:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1}.$$

Quia huius seriei terminus generalis est $X = \frac{1}{2x-1}$; erit:

$X' = \frac{1}{2x+1}$	$Z' = \frac{1}{2x+1+2\omega}$
$X'' = \frac{1}{2x+3}$	$Z'' = \frac{1}{2x+3+2\omega}$
$X''' = \frac{1}{2x+5}$	$Z''' = \frac{1}{2x+5+2\omega}$
&c.	&c.

ob terminos huius seriei infinitesimos euanescentes & aequales, prodibit valor ipsius S, si loco x ponatur $x+1$:

$$\Sigma = S + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c.$$
$$- \frac{1}{2x+1+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \frac{1}{2x+5+2\omega} - \&c.$$

seu

$$\Sigma = S + \frac{2\omega}{(2x+1)(2x+1+2\omega)} + \frac{2\omega}{(2x+3)(2x+3+2\omega)} + \&c.$$

Verum si singuli termini in series secundum dimensiones ipsius ω resoluantur, erit:

$\Sigma =$

$$\Sigma = S + 2\omega\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c.\right)$$

$$- 4\omega^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c.\right)$$

$$+ 8\omega^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c.\right)$$

$$- 16\omega^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c.\right)$$

&c.

Ponatur nunc dx pro ω, atque prodibit differentiale completum functionis inexplicabilis S propositae:

$$dS = 2dx\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c.\right)$$

$$- 4dx^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c.\right)$$

$$+ 8dx^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c.\right)$$

$$- 16dx^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c.\right)$$

&c.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiale completum functionis huius inexplicabilis ipsius S:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots + \frac{1}{x^n}.$$

Cum huius feriei terminus generalis sit $= \frac{1}{x^n}$, erunt termini infinitesimi euanescentes & inter se aequales. Hincque ob

$$X' = \frac{1}{(x+1)^n} \quad\Big|\quad Z' = \frac{1}{(x+1+\omega)^n}$$
$$X'' = \frac{1}{(x+2)^n} \quad\Big|\quad Z'' = \frac{1}{(x+2+\omega)^n}$$
$$X''' = \frac{1}{(x+3)^n} \quad\Big|\quad Z''' = \frac{1}{(x+3+\omega)^n}$$
$$\&c. \qquad\qquad \&c.$$

erit:

$$X' - Z' = \frac{n\omega}{(x+1)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+1)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+1)^{n+3}} - \&c.$$
$$X'' - Z'' = \frac{n\omega}{(x+2)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+2)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+2)^{n+3}} - \&c.$$
$$\&c.$$

ex quibus inuenitur:

$$\Sigma - S = n\omega\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \&c.\right)$$
$$- \frac{n(n+1)}{1.\,2}\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{3}{(x+3)^{n+2}} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

 Qua-

Quare poſito $\omega = dx$ prodibit differentiale completum functionis S quaeſitum:

$$dS = + n dx \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \&c. \right)$$
$$- \frac{n(n+1)}{1.\ 2} dx^2 \left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \&c. \right)$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} dx^3 \left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \&c. \right)$$
&c.

362. Ex his quoque ſummae iſtarum ſerierum interpolari, ſeu valores terminorum ſummatoriorum exhiberi poſſunt, quando numerus terminorum non eſt numerus integer. Si enim ponatur $x = 0$, erit quoque $S = 0$, atque Σ exprimet ſummam tot terminorum, quot numerus ω continet vnitates, etiamſi iſte numerus ω non ſit integer. Ita in exemplo primo ſi ponatur

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{\omega}$$

erit:

$$\Sigma = \frac{\omega}{1(1+\omega)} + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \&c.$$

ſiue

$$\Sigma = \omega \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.\right)$$
$$- \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$
$$+ \omega^3 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$
&c.

In

In exemplo vero tertio erit:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots + \frac{1}{\omega^n}.$$

Valorque ipsius Σ, siue ω sit numerus integer siue fractus, per series sequenti modo exprimetur:

$$\begin{aligned}\Sigma = \quad & n\omega\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} + \&c.\right)\\ & - \frac{n(n+1)}{1.\ 2}\omega^2\left(1 + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \&c.\right)\\ & + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\omega^3\left(1 + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{3^{n+3}} + \frac{1}{4^{n+3}} + \&c.\right)\\ & \&c.\end{aligned}$$

373. Haec eadem quoque ad seriem generalem accommodari possunt, cum enim sit

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

atque posito $x+\omega$ loco x, abeat X in Z, & S in Σ, erit:

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2\,dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3\,dx^3} + \&c.$$

& quia simili modo Z', Z'', Z''', &c. per X', X'', X''', &c. exprimuntur, erit:

$$\begin{aligned}\Sigma = S + \omega X^{|\omega+1|} & - \frac{\omega}{dx}\,d.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]\\ & - \frac{\omega^2}{1.2\,dx^2}\,dd.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]\\ & - \frac{\omega^3}{1.2.3\,dx^3}\,d^3.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]\\ & \&c.\end{aligned}$$

&

& nisi $X^{|\infty+1|}$ sit $=0$, hoc modo exprimi poterit, vt consideratio infiniti tollatur:

$$X^{|\infty+1|} = X' + (X''-X') + (X'''-X'') + (X''''-X''') + \&c.$$

eritque ergo:

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega[(X''-X') + (X'''-X'') + (X''''-X''') + \&c.]$$
$$- \frac{\omega}{dx}\, d.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \&c.]$$
$$+ \frac{\omega^2}{2\,dx^2}\, dd.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$- \frac{\omega^3}{6\,dx^3}\, d^3.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$\&c.$$

Si ergo ponatur $\omega = dx$, orietur differentiale completam ipsius $S = A + B + C + \ldots + X$, ita expressum:

$$dS = X'dx + dx\,[(X''-X') + (X'''-X'') + (X''''-X''') + \&c.]$$
$$- d.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{2}\,dd.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{6}\,d^3.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$\&c.$$

374. Ponamus esse $x=0$, fiet $X'=A$, $X''=B$, &c. ideoque $X' + X'' + X''' +$ &c. erit series infinita cuius terminus generalis est $=X$. Formentur deinde series ex his terminis generalibus:

$$\frac{dX}{dx};\quad \frac{ddX}{2dx^2};\quad \frac{d^3X}{6dx^3};\quad \frac{d^4X}{24dx^4};\quad \&c.$$

qua-

quarum ſerierum in infinitum continuatarum ſummae ſint:

$$\int . X = \mathfrak{A}$$
$$\int . \frac{dX}{dx} = \mathfrak{B}$$
$$\int . \frac{ddX}{2\,dx^2} = \mathfrak{C}$$
$$\int . \frac{d^3X}{6\,dx^3} = \mathfrak{D} \quad \&c.$$

& quia poſito $x = 0$, fit quoque $S = 0$, & Σ erit ſumma ſeriei $A + B + C + D + \ldots + Z$ continentis ω terminos; eſt enim Z terminus indicis ω, ſiue ω ſit numerus integer ſiue fractus. Quare habebitur

$$\Sigma = \omega A + \omega[(B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.]$$
$$- \omega\mathfrak{B} - \omega^2\mathfrak{C} - \omega^3\mathfrak{D} - \omega^4\mathfrak{E} - \&c.$$

vbi prima ſeries praetermitti poteſt, ſi ſeriei propoſitae termini tandem euaneſcant.

375. Scribamus nunc x loco ω, abibitque Σ in S ita vt ſit

$$\begin{matrix} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots & x \\ S = & A & + & B & + & C & + & D & + \ldots + & X \end{matrix}$$

atque idem ipſius S valor iam per ſeriem infinitam exprimetur hoc modo:

$$S = Ax + x[(B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.]$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \mathfrak{F}x^5 - \&c.$$

cuius valor cum aeque diſtincte exprimatur, ſiue x ſit numerus integer ſiue fractus, differentialia ipſius S cuiusque ordinis hinc facile exhiberi poſſunt:

$$\frac{dS}{dx} = A + (B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.$$
$$- \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}x - 3\mathfrak{D}x^2 - 4\mathfrak{E}x^3 - \&c.$$
$$\frac{ddS}{2dx^2} = - \mathfrak{C} - 3\mathfrak{D}x - 6\mathfrak{E}x^2 - 10\mathfrak{F}x^3 - \&c.$$
$$\frac{d^3S}{6dx^3} = - \mathfrak{D} - 4\mathfrak{E}x - 10\mathfrak{F}x^2 - 20\mathfrak{G}x^3 - \&c.$$
$$\frac{d^4S}{24dx^4} = - \mathfrak{E} - 5\mathfrak{F}x - 15\mathfrak{G}x^2 - \&c.$$

Quare cum differentiale completum ſit
$$= dS + \tfrac{1}{2}ddS + \tfrac{1}{6}d^3S + \tfrac{1}{24}d^4S + \&c.$$
erit functionis propoſitae S differentiale completum:
$$dS = Adx + (B-A)dx + (C-B)dx + (D-C)dx + \&c.$$
$$- \mathfrak{B}dx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3)$$
$$- \mathfrak{E}(4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4) - \&c.$$

376. Hoc ergo modo functionis cuiusque inexplicabilis S differentiale aſſignari poteſt, ſi ſeriei A + B + C + D + &c. termini infiniteſimi vel euaneſcant vel inter ſe ſint aequales. Quodſi enim huius termini infiniteſimi non fuerint = o, tum ſumma ſeriei $\mathfrak{B}$, quae ex termino generali $\frac{dX}{dx}$ formatur, fiet infinita; at vero cum ſerie A + (B − A) + (C − B) + (D − C) + &c. coniuncta ſummam finitam conſtituet. At fieri poteſt, vt termini ſeriei A + B + C + D + &c. ita in infinitum augeantur, vt non ſolum ſeriei $\mathfrak{B}$, ſed etiam ſeriei $\mathfrak{C}$ ſumma fiat infinite magna, quo caſu non ſufficit

feriem A + (B − A) + (C − B) + &c. adiecisse: sed quoniam hoc casu valores infinitesimi §. 370. considerati, nempe $S^{|\backsim|}$, $S^{|\backsim+1|}$, $S^{|\backsim+2|}$, non amplius in arithmetica sunt progressione, vti assumseramus, huius progressionis ratio erit habenda. Quemadmodum ergo assumsimus, horum terminorum differentias primas esse aequales; ita methodum amplius extendemus, si horum valorum differentias demum secundas, vel tertias, vel vlteriores constantes statuamus.

377. Retento ergo eodem ratiocinio, quo §. 369. sumus usi, ponamus memoratorum valorum differentias demum secundas esse constantes:

$$S^{|\backsim|}, \quad S^{|\backsim+1|}, \quad S^{|\backsim+2|};$$

DIFF. I. $\quad X^{|\backsim+1|}, \quad X^{|\backsim+2|}$

DIFF. II. $\quad X^{|\backsim+2|} - X^{|\backsim+1|}$

Hinc erit $\Sigma^{|\backsim|} = S^{|\backsim+\omega|} = S^{|\backsim|} + \omega X^{|\backsim+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2}$
$(X^{|\backsim+2|} - X^{|\backsim+1|}) = S^{|\backsim|} - \frac{\omega(\omega-3)}{1.\,2} X^{|\backsim+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} X^{|\backsim+2|}$.

Quamobrem habebimus hanc aequationem:

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{|\backsim|} =$$
$$S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{|\backsim|} -$$
$$- \frac{\omega(\omega-3)}{1.\,2} X^{|\backsim+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} X^{|\backsim+2|},$$

cx

ex qua elicitur :

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \text{ in infinitum}\\ &- Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \text{ in infinitum}\\ &+ \omega X^{|\infty+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}\left(X^{|\infty+2|} - X^{|\infty+1|}\right).\end{aligned}$$

Termini autem iſti infiniteſimi ita repraeſentari poterunt, vt ſit

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.\\ &- Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c.\\ &+ \omega X' + \omega\begin{Bmatrix} + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \&c.\\ - X' - X'' - X''' - X'''' - \&c.\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{matrix} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}X'' \\ - \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}X' \end{matrix} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}\begin{Bmatrix} + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.\\ - 2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - \&c.\\ + X' + X'' + X''' + \&c.\end{Bmatrix}$$

vnde ſimul lex patet, qua haec expreſſio erit comparata, ſi differentiae demum tertiae vel quartae vel vlteriores fuerint conſtantes.

378. Cum igitur ſit, vt ſupra demonſtrauimus :

$$Z = X + \frac{\omega dX}{1\, dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2\, dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3\, dx^3} + \&c.$$

ſi loco Z', Z'', Z''', &c. valores hinc oriundos ſubſtituamus, erit valor ipſius S, ſi loco x ſcribatur $x + \omega$, ſequens :

$\Sigma = S$

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} X'' \\ - \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} X' \end{array} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} \left\{ \begin{array}{l} + X''' + X^{IV} + X^{V} + X^{VI} + \&c. \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - 2X^{V} - \&c. \\ + X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c. \end{array} \right\}$$

$$- \frac{\omega}{dx} d. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

$$- \frac{\omega^2}{2\,dx^2} d^2. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

$$- \frac{\omega^3}{6\,dx^3} d^3. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

&c.

Si ergo loco ω ponatur dx, prodibit differentiale completum functionis inexplicabilis propositae S; scilicet

$$dS = X' dx + dx \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} - X'' \frac{dx(1-dx)}{1.\,2} \\ + X' \frac{dx(1-dx)}{1.\,2} \end{array} - \frac{dx(1-dx)}{1.\,2} \left\{ \begin{array}{l} + X''' + X^{IV} + X^{V} + X^{VI} + \&c. \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - 2X^{V} - \&c. \\ + X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c. \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} + X''' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\,2.\,3} \\ - 2X'' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\,2.\,3} \\ + X' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\,2.\,3} \end{array} + \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\,2.\,3} \left\{ \begin{array}{l} + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ -3X''' - 3X^{IV} - \&c. \\ +3X'' + 3X''' + \&c. \\ - X' - X'' - \&c. \end{array} \right\}$$

&c.

$$
\begin{aligned}
&- d. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.] \\
&- \tfrac{1}{2} dd. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.] \\
&- \tfrac{1}{6} d^3. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.] \\
&- \tfrac{1}{24} d^4. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.] \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

quae expreſſio latiſſime patet, & quotaecunque demum differentiae fuerint conſtantes, differentiale quaeſitum exhibet. Accommodata enim eſt haec formula ad differentias conſtantes, & ſimul lex patet, ſi forte vlterius progredi neceſſe ſit.

379. Quod ſi ſeries $A + B + C + D + \&c.$ ex qua formatur functio inexplicabilis

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

ita fuerit comparata, vt eius termini infiniteſimi euaneſcant, tum vti iam notauimus erit:

$$
\begin{aligned}
dS = &- d. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
&- \tfrac{1}{2} dd. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
&- \tfrac{1}{6} d^3. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
&- \tfrac{1}{24} d^4. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

Sin autem illius ſeriei termini infiniteſimi non ſint $= 0$, ſed tamen differentias habeant euaneſcentes, tum ad iſtam expreſſionem inſuper addi debet

$$dx \left\{ X' \begin{array}{l} + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{array} \right]$$

Ve-

Verum si terminorum infinitesimorum huius seriei A + B + C + D + &c. differentiae demum secundae euanescant, tum praeterea adiici oportet:

$$\frac{dx(dx-1)}{1.\ 2.}\left\{\begin{array}{llllll} & +\ X''' & +\ X^{IV} & +\ X^{V} & +\ \&c. \\ +X'' & -2X'' & -2X''' & -2X^{IV} & -\ \&c. \\ -X' & +\ X' & +\ X'' & +\ X''' & +\ \&c. \end{array}\right.$$

Atque si memoratorum terminorum infinitesimorum differentiae demum tertiae fuerint euanescentes, tum praeter has iam exhibitas expressiones insuper addi debet.

$$\frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1.\ 2.\ 3.}\left\{\begin{array}{lllll} X''' & +\ X^{IV} & +\ X^{V} & +\ X^{VI} & +\ \&c. \\ -2X'' & -3X''' & -3X^{IV} & -3X^{V} & -\ \&c. \\ +\ X' & +3X'' & +3X''' & +3X^{IV} & +\ \&c. \\ & -\ X' & -\ X'' & -\ X''' & -\ \&c. \end{array}\right.$$

Sicque porro expressiones insuper addendae erunt comparatae, si vlteriores demum differentiae terminorum infinitesimorum seriei A + B + C + D + &c. euanescant. Hincque adeo quaecunque series assumatur, dummodo eius termini infinitesimi tandem ad differentias euanescentes perducantur, functionis inexplicabilis ex ea formatae differentiale definiri poterit.

380. Si ponatur $x=0$, fiet $X'=A$, $X''=B$, $X'''=C$ &c. Quare vti A + B + C + D + &c. est series, cuius terminus generalis est X, si ex terminis generalibus $\frac{dX}{dx}$; $\frac{ddX}{2dx^2}$; $\frac{d^3X}{6dx^2}$; $\frac{d^4X}{24dx^4}$; &c. simili modo formentur series infinitae, earumque summae denotentur per litteras: $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{E}$; &c. respectiue. Summa

ω terminorum feriei $A + B + C + D +$ &c. ita exprimetur, vt perinde fit, fiue ω fit numerus integer fiue fecus. Scribamus ergo x pro ω, vt fit,

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

atque fi huius feriei termini infinitefimi euanefcant, erit

$$S = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \&c.$$

At fi termini infinitefimi differentias faltem primas habeant conftantes, tum ad hunc valorem infuper addi debet hic:

$$x\left\{A \begin{array}{l} + B + C + D + E + \&c. \\ - A - B - C - D - \&c. \end{array}\right]$$

fin autem illorum terminorum infinitefimorum differentiae demum fecundae euanefcant, tum praeterea addi debet:

$$\frac{x(x-1)}{1.\ 2}\left\{\begin{array}{l} + B \\ - A \end{array} \begin{array}{l} + C + D + E + F + \&c. \\ - 2B - 2C - 2D - 2E - \&c. \\ + A + B + C + D + \&c. \end{array}\right]$$

Si differentiae demum tertiae fuerint euanefcentes, tum infuper adiici debet haec feries infinita:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3.}\left\{\begin{array}{l} + C \\ - 2B \\ + A \end{array} \begin{array}{l} + D + E + F + G + \&c. \\ - 3C - 3D - 3E - 3F - \&c. \\ + 3B + 3C + 3D + 3E + \&c. \\ - A - B - C - D - \&c. \end{array}\right]$$

&c.

381. Accommodemus haec quoque ad alterum functionum inexplicabilium genus, quae constant continuo producto terminorum aliquot seriei propositae $A + B + C + D +$ &c. sitque

$$S = \overset{1}{A}\ \overset{2}{B}\ \overset{3}{C}\ \overset{4}{D} \ldots \overset{x}{X}$$

& quaeratur primo valor Σ, in quem S transmutatur, si loco x scribatur $x + \omega$; ponamus autem vt ante esse Z terminum seriei $A + B + C + D +$ &c. cuius index sit $= x + \omega$, vti X respondet indici x. Quo ergo hunc casum ad praecedentem reducamus sumamus logarithmos, eritque

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

Quod si iam huius seriei termini infinitesimi euanescant, erit eandem methodum, qua ante vsi sumus, adhibendo

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \text{\&c.}$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \text{\&c.}$$

hincque ad numeros regrediendo erit

$$\Sigma = S.\frac{X'}{Z'}\cdot\frac{X''}{Z''}\cdot\frac{X'''}{Z'''}\cdot\frac{X''''}{Z''''}, \text{\&c.}$$

quae ergo expressio valet, si seriei A, B, C, D, &c. termini infinitesimi vnitati aequentur. Sin autem logarithmi terminorum infinitesimorum huius seriei non euanescant, at tamen differentias habeant euanescentes; tum ad illam seriem, quam pro $l\Sigma$ inuenimus, insuper addi debet haec series

$$\omega\, lX' + \omega\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \text{\&c.}\right)$$

 sicque

ſicque numeris ſumendis habebitur

$$\Sigma = SX^{I\omega} \cdot \frac{X^{II\omega} \cdot X^{I(1-\omega)}}{Z'} \cdot \frac{X^{III\omega} \cdot X^{II(1-\omega)}}{Z''} \cdot \frac{X^{IV\omega} \cdot X^{III(1-\omega)}}{Z'''} \cdot \text{\&c.}$$

382. Quodſi ergo ponamus $x = 0$, quo caſu fit $S = 1$ & $X' = A$, $X'' = B$; $X''' = C$; &c. Σ denotabit productum ω terminorum huius ſeriei A, B, C, D &c. Si igitur pro ω ſcribamus x, vt Σ obtineat valorem, quem ante ipſi S tribueramus, ita vt ſit

$$S = \overset{1}{A}.\ \overset{2}{B}.\ \overset{3}{C}.\ \overset{4}{D}. \ldots \overset{x}{X}$$

quia nunc Z', Z'', Z''', &c. abeunt in X', X'', X''' &c. ſi logarithmi terminorum infiniteſimorum iſtius ſeriei A, B, C, D, E, &c. euaneſcant, exprimetur S hoc modo.

$$S = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X^{IV}} \cdot \frac{E}{X^{V}}, \text{ \&c.}$$

Sin autem differentiae demum logarithmorum terminorum infiniteſimorum ſeriei A, B, C, D, &c. euaneſcant, tum iſta functio S ſequenti modo exprimetur, vt ſit:

$$S = A^{x} \cdot \frac{B^{x} A^{1-x}}{X'} \cdot \frac{C^{x} B^{1-x}}{X''} \cdot \frac{D^{x} C^{1-x}}{X'''} \cdot \frac{E^{x} D^{1-x}}{X^{IV}} \cdot \text{\&c.}$$

ſi illorum logarithmorum differentiae ſecundae demum ſint euaneſcentes, ex praecedentibus facile colligitur, cuiusmodi factores inſuper addi debeant; quem caſum, cum vix occurrere ſoleat, hic praetermittamus. Ceterum

rum vsum harum expressionum in interpolationis negotio capite sequente ostendam.

383. Hic igitur cum differentiatio huiusmodi functionum inexplicabilium potissimum sit proposita: inuestigemus differentiale huius functionis

$$S = A.\ B.\ C.\ D.\ \ldots\ldots\ X$$

Ad hoc resumamus aequationem ante inuentam

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \&c.$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c.$$

& cum lZ oriatur ex lX, si loco x ponatur $x + \omega$, erit

$$lZ = lX + \frac{\omega}{dx} d.\, lX + \frac{\omega^2}{2dx^2} dd.\, lX + \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3.\, lX + \&c.$$

quibus valoribus pro lZ', lZ'', lZ''', &c. substitutis habebitur

$$l\Sigma = lS - \frac{\omega}{dx} d\ [lX' + lX'' + lX''' + lX^{\text{IV}} + \&c.]$$
$$- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd\ [lX' + lX'' + lX''' + lX^{\text{IV}} + \&c.]$$
$$- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3.\ [lX' + lX'' + lX''' + lX^{\text{IV}} + \&c.]$$
&c.

Ponatur nunc $\omega = dx$, fietque $l\Sigma = lS + d.\, lS$, ideoque erit

$$\frac{dS}{S} = -\ d.\ [lX' + lX'' + lX''' + lX^{\text{IV}} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{2} dd.\ [lX' + lX'' + lX''' + lX^{\text{IV}} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{6} d^3.\ [lX' + lX'' + lX''' + lX^{\text{IV}} + \&c.]$$
&c.

quae

quae formula valet, si logarithmi terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. euanescant; sin autem ipsi non euanescant, attamen differentias habeant euanescentes, tum ad praecedentem differentialis completi expressionem insuper addi debet haec series:

$$dx\,lX' + dx\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \&c.\right)$$

vt obtineatur differentiale completum.

384. Idem adhuc alio modo praestari potest. Ponatur $x = 0$, quo casu abit lS in 0. Tum formentur series, quarum termini generales sint:

$$lX\,;\quad \frac{d.lX}{dx}\,;\quad \frac{dd.lX}{2dx^2}\,;\quad \frac{d^3.lX}{6dx^3}\,;\quad \&c.$$

harumque serierum infinitarum summae sint respectiue: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. Scribatur x pro ω, vt sit $\Sigma = S$, eritque

$$lS = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \&c.$$

si quidem logarithmi terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. cuius terminus generalis est X, euanescant: at si horum logarithmorum differentiae demum euanescant, erit:

$$lS = x\,lA + x\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \&c.$$

Hincque adeo differentiale ipsius lS erit:

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$- \mathfrak{B}dx - 2\mathfrak{C}x\,dx - 3\mathfrak{D}x^2dx - 4\mathfrak{E}x^3dx - \&c.$$

At

At si differentiale completum desideretur, erit id:

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$- \mathfrak{B}dx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3xxdx + 3xdx^2 + dx^3)$$
$$- \&c.$$

Ad quarum formularum vsum ostendendum sequentia exempla adiicimus, quae vtroque modo resoluemus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot \;.\;.\;.\; \frac{2x-1}{2x}.$$

Hic ante omnia notandum est, terminos infinitesimos horum factorum abire in vnitates, ideoque eorum logarithmos euanescere. Cum igitur sit $X = \frac{2x-1}{2x}$, erit

$X' = \frac{2x+1}{2x+2}$; $X'' = \frac{2x+3}{2x+4}$; $X''' = \frac{2x+5}{2x+6}$; &c.

& generaliter $X^{(n)} = \frac{2x+2n-1}{2x+2n}$;

 vnde

vnde erit:

$$lX^{|n|} = l(2x+2n-1) - l(2x+2n)$$

$$d.\,lX^{|n|} = \frac{2dx}{2x+2n-1} - \frac{2dx}{2x+2n}$$

$$dd.\,lX^{|n|} = -\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2}$$

$$d^3.\,lX^{|n|} = +\frac{2.2.\;4dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2.2.\;4dx^3}{(2x+2n)^3}$$

$$d^4.\,lX^{|n|} = -\frac{2.2.4.\;6dx^4}{(2+2n-1)^4} + \frac{2.2.4.\;6dx^4}{(2x+2n)^4}$$

&c.

vnde erit differentiale completum:

$$\frac{dS}{S} = -2dx \begin{cases} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c. \\ -\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{2x+6} - \&c. \end{cases}$$

$$+\tfrac{4}{2}dx^2 \begin{cases} \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c. \\ -\frac{1}{(2x+2)^2} - \frac{1}{(2x+4)^2} - \frac{1}{(2x+6)^2} - \&c. \end{cases}$$

$$-\tfrac{8}{3}dx^3 \begin{cases} \frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c. \\ -\frac{1}{(2x+2)^3} - \frac{1}{(2x+4)^3} - \frac{1}{(2x+6)^3} - \&c. \end{cases}$$

&c.

Quod

Quod si autem tantum differentiale primum quaeratur, erit id:

$$\frac{dS}{S} = -2dx \text{ in } \left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} + \frac{1}{(2x+5)(2x+6)} + \&c.\right)$$

quod idem altera methodo §. 394. tradita ita inuestigatur. Cum sit $lX = l\frac{2x-1}{2x}$, erit $\frac{d.\,lX}{dx} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$;

$$\frac{dd.\,lX}{2\,dx^2} = -\frac{2}{(2x-1)} + \frac{1}{2xx};\quad \frac{d^3.\,lX}{6\,dx^3} = +\frac{8}{3(2x-1)^3} - \frac{1}{3x^3}\,\&c.$$

ideoque fiet

$$\mathfrak{A} = l\frac{1}{2} + l\frac{3}{4} + l\frac{5}{6} + l\frac{7}{8} + \&c.$$

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{matrix} +\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \&c. \\ -\frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \frac{2}{6} - \frac{2}{8} - \frac{2}{10} - \&c. \end{matrix}\right\} = 2\,l2$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{2}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. \\ -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} - \&c. \end{matrix}\right\}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8}{3}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \&c. \\ -\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} - \&c. \end{matrix}\right\}$$

&c.

 siue

siue erit:

$$\mathfrak{B} = +\frac{2}{1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{D} = +\frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{16}{4}\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c.\right)$$

&c.

Quibus valoribus inuentis substitutis erit:

$$\frac{dS}{S} = -2\,dx\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.\right)$$
$$+ 4x\,dx\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c.\right)$$
$$- 8x^2dx\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c.\right)$$
$$+ 16x^3dx\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c.\right)$$

&c.

Si igitur sit $x = 0$, quo casu sit $lS = 0$ & $S = 1$, erit $dS = -2\,dx\,.\,l2$.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis :

$$S = 1 .\ 2 .\ 3 .\ 4 \ldots\ldots X$$

Huius feriei 1, 2, 3, 4, &c. termini in infinitum ita crefcunt, vt logarithmorum differentiae euanefcant: eft enim $l(\infty + 1) - l\infty = l\left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{\infty} == 0.$ Cum igitur fit $X = x$ erit $X' = x + 1$; $X'' = x + 2$; $X''' = x + 3$; &c. porro autem ob $lX = lx$ fiet $d. lX = \frac{dx}{x}$; $dd. lX = -\frac{dx^2}{x^2}$; $d^3. lX = \frac{2\,dx^3}{x^3}$; $d^4. lX = -\frac{2.3\,dx^4}{x^4}$; &c. vnde fi logarithmi vltimi euanefcerent, foret

$$\frac{dS}{S} = -dx\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \&c.\right)$$
$$+\frac{dx^2}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c.\right)$$
$$-\frac{dx^3}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

At cum differentiae demum logarithmorum euauefcant, infuper addi debet haec expreffio :

$$dx\, l(x+1) + dx\left(l\frac{x+2}{x+1} + l\frac{x+3}{x+2} + l\frac{x+4}{x+3} + l\frac{x+5}{x+4} + \&c.\right)$$

Quia vero eſt:

$$l\frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + \&c.$$

$$l\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3} - \frac{1}{4(x+2)^4} + \&c.$$

&c.

erit verum differentiale completum:

$$\frac{dS}{S} = dx\, l(x+1)$$

$$-\tfrac{1}{2}(dx - dx^2)\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}(dx - dx^3)\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{4}(dx - dx^4)\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{5}(dx - dx^5)\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \&c.\right)$$

&c.

Sin autem altero modo differentiale hoc exprimere velimus, quia eſt

$$lX = lx;\quad \frac{d.lX}{dx} = 1;\quad \frac{dd.lX}{2\,dx^2} = -\frac{1}{2x^3};$$

$$\frac{d^3.lX}{6\,dx^3} = \frac{1}{3x^3};\quad \frac{d^4.lX}{24\,dx^4} = -\frac{1}{4x^4};\quad \&c.$$

habe-

habebuntur sequentes series:

$$\mathfrak{A} = l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \&c.$$

$$\mathfrak{B} = 1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c.\right)$$

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right)$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$

$$\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$

&c.

Hinc ob $lA = l1 = 0$, fiet ex §. 384:

$$lS = x\left(l\frac{2}{1} + l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} + l\frac{5}{4} + \&c.\right)$$

$$-\, x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c.\right)$$

&c.

Binae

Binae autem primae ſeries, per quas x eſt multiplicatum, etiamſi vtraque habeat ſummam infinitam, tamen ambae ſimul ſummam habent finitam. Si enim vtriusque n termini capiantur, prodibit:

$$l(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n}.$$

At ſupra §. 142. inuenimus eſſe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = \text{Conſt.} + ln$$
$$+ \frac{1}{2n} - \frac{\mathfrak{A}}{2n^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4n^4} - \&c.$$

haecque conſtans prodit $= 0,5772156649015325$. Quodſi ergo ponatur $n = \infty$, erit:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\infty} = \text{Conſt.} + l\infty,$$

vnde binarum illarum ſerierum in infinitum continuatarum valor erit $= l(\infty+1) - \text{Conſt.} - l\infty = -\text{Conſt.}$

Ex quo erit:

$$lS = -x.\,0,5772156649015325$$
$$+ \tfrac{1}{2}xx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right)$$
$$- \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

vnde differentialia cuiusque ordinis facile reperiuntur.

Erit

Erit enim:

$$\frac{dS}{S} = -dx.\ 0,5772156649015325$$
$$+ xdx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right)$$
$$- x^2dx\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$
$$+ x^3dx\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$
&c.

At ſi hae ſeries in vnam colligantur erit:

$$\frac{dS}{S} = -dx.\ 0,5772156649015325$$
$$+ \frac{xdx}{1(1+x)} + \frac{xdx}{2(2+x)} + \frac{xdx}{3(3+x)} + \frac{xdx}{4(4+x)} + \&c.$$

Quare ſi ſit $x = 0$, fiet:

$$\frac{dS}{S} = -dx.\ 0,5772156649015325$$

Ex priori vero expreſſione hoc caſu erit:

$$\frac{dS}{S} = -\tfrac{1}{2}dx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}dx\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right)$$
$$- \tfrac{1}{4}dx\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c.\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}dx\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c.\right)$$
&c.

385. Hinc ergo etiam huiusmodi functionum inexplicabilium differentialia quouis casu speciali exhiberi possunt, propterea quod hic differentialia completa eruimus. Quamobrem si tales functiones ingrediantur in expressiones, quae indeterminatae videntur, cuiusmodi capite praecedente tractauimus; valores eadem methodo definiri poterunt, vti ex adiunctis exemplis intelligetur.

EXEMPLUM I.

Determinare valorem huius expressionis:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{x}}{x(x-1)}-\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$$

eo casu, quando ponitur $x=1$.

Ponamus $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ .\ .\ .\ .\ +\frac{1}{x}=S$, erit ex §. 372:

$$S=x\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\&c.\right)$$
$$-x^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\&c.\right)$$
$$+x^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\&c.\right)$$
$$\&c.$$

seu cum sit quoque

$$S=+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\&c.$$
$$-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}-\frac{1}{5+x}-\&c.$$

si

si quiuis terminus superioris seriei cum praecedente inferioris combinetur, prodibit:

$$S = 1 + \frac{x-1}{2(1+x)} + \frac{x-1}{3(2+x)} + \frac{x-1}{4(3+x)} + \&c.$$

quae expressio, quoniam poni debet $x = 1$ est commodior. Sit ergo $x = 1 + \omega$, fietque

$$S = 1 + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \&c.$$

siue

$$S = 1 + \omega\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right) = 1 + \mathfrak{B}\omega$$

$$- \omega^2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right) \quad - \mathfrak{C}\omega^2$$

$$+ \omega^3\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right) \quad + \mathfrak{D}\omega^3$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

Tota ergo expressio posito $x = 1 + \omega$ abibit in hanc:

$$\frac{1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \&c.}{\omega(1+\omega)} - \frac{1}{\omega(1+2\omega)} \text{ seu}$$

$$\frac{\omega + \mathfrak{B}\omega + 2\mathfrak{B}\omega^2 - \mathfrak{C}\omega^2}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)} = \frac{1 + \mathfrak{B} + 2\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega - \&c.}{(1+\omega)(1+2\omega)}$$

Ponatur nunc $\omega = 0$, atque expressionis propositae valor casu $x = 1$, erit:

$$= 1 + \mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.$$

quae series cum sit $= \frac{1}{6}\pi^2$, sequitur valorem quaesitum esse $= \frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM II.

Inuenire valorem huius expreſſionis :

$$\frac{2x-xx}{(x-1)^2}+\frac{\pi\pi x}{6(x-1)}-\frac{(2x-1)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x})}{x(x-1)^2}$$

caſu quo ponitur $x=1$.

Ponatur $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}=S$, ſtatuaturque $x=1+\omega$, fiet vt in exemplo praecedente inuenimus :

$S=1+\mathfrak{B}\omega-\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{D}\omega^3-$&c. exiſtente

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{\&c.}=\tfrac{1}{6}\pi\pi-1$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{\&c.}$$

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{\&c.}$$

&c.

Poſito ergo $x=1+\omega$ expreſſio propoſita induet hanc formam :

$$\frac{1-\omega\omega}{\omega\omega}+\frac{(1+\mathfrak{B})(1+\omega)}{\omega}-\frac{(1+2\omega)(1+\mathfrak{B}\omega-\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{D}\omega^3-\text{\&c.})}{(1+\omega)\omega^2}$$

quae ad eandem denominationem $\omega^2(1+\omega)$ perducta fit :

$$\frac{\begin{array}{l}1+\omega-\omega^2-\omega^3+\omega+2\omega^2+\omega^3+\mathfrak{B}\omega(1+2\omega+\omega\omega)\\ \quad -1-\mathfrak{B}\omega+\mathfrak{C}\omega^2-\mathfrak{D}\omega^3-2\omega-2\mathfrak{B}\omega^2+2\mathfrak{C}\omega^3\ \text{\&c.}\end{array}}{\omega^2(1+\omega)}$$

quae reducitur ad hanc formam :

$$\frac{\omega^2+\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{B}\omega^3+2\mathfrak{C}\omega^3-\mathfrak{D}\omega^3\ \text{\&c.}}{\omega^2(1+\omega)}$$

Fiat

Fiat nunc $\omega = 0$, atque prodibit $1 + \mathfrak{C}$. Quocirca expreſſionis propoſitae valor caſu $x = 1$, erit $= 1 + \mathfrak{C}$, ideoque per hanc ſeriem exprimetur:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.$$

cuius ſumma cum neque per logarithmos, neque per peripheriam circuli π exhiberi poſſit, valor quaeſitus etiamnum alio modo finite aſſignari non poteſt. Ex his ergo duobus exemplis vſus, quem differentiatio functionum inexplicabilium in doctrina ſerierum habere poteſt, ſatis luculenter perſpicitur.

386. In methodo hic tradita functiones inexplicabiles differentiandi aſſumſimus ſeriei A, B, C, D, E, &c. terminos infiniteſimos vel eſſe $= 0$, vel differentias tandem euaneſcentes habere; quorum ſi neutrum contingat, iſta methodo vti non licebit. Hancobrem aliam exponam methodum huic conditioni non adſtrictam, quam ſummatio generalis ſerierum ex termino generali petita & ſupra fuſius explicata ſuppeditat. Denotent igitur litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, &c. numeros Bernullianos §. 122. exhibitos, ſitque functio inexplicabilis propoſita haec:

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

& quia ſupra (130.) oſtendimus fore:

$$S = \int X dx + \tfrac{1}{2} X + \frac{\mathfrak{A}\, dX}{1.2\, dx} - \frac{\mathfrak{B}\, d^3X}{1.2.3.4\, dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\, d^5X}{1.2.3.4.5.6\, dx^5} - \&c.$$

 hinc

hinc facile erit istius functionis S differentiale exhibere erit enim:

$$dS = X dx + \tfrac{1}{2} dX + \frac{\mathfrak{A}\, ddX}{1.2\, dx} - \frac{\mathfrak{B}\, d^4X}{1.2.3.4\, dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\, d^6X}{1.2.3.4.5.6\, dx^5} - \&c.$$

387. Sin autem progressio proposita coniuncta sit cum geometrica, quo casu termini eius infinitesimi nunquam ad differentias constantes reducuntur, ac propterea methodus prior locum inuenit nullum; tum methodus §. 174. tradita medelam afferet. Si enim proposita sit haec functio:

$$S = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots + Xp^x,$$

quaerantur valores litterarum α, β, γ, δ, &c. vt sit

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \&c.$$

quibus inuentis, vti eos §. 170. exhibuimus, erit:

$$S = \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(X - \frac{\alpha\, dX}{dx} + \frac{\beta\, ddX}{dx^2} - \frac{\gamma\, d^3X}{dx^3} + \frac{\delta\, d^4X}{dx^4} - \&c. \right)$$

$+$ Constante, quae summam reddat $= 0$, si ponatur $x = 0$, seu quae cuiquam alii casui satisfaciat. Sumto ergo differentiali haec constans ex computo abibit, eritque:

$$dS = \frac{p}{p-1} \cdot p^x dx\, lp \left(X - \frac{\alpha\, dX}{dx} + \frac{\beta\, ddX}{dx^2} - \frac{\gamma\, d^3X}{dx^3} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(dX - \frac{\alpha\, ddX}{dx} + \frac{\beta\, d^3X}{dx^2} - \frac{\gamma\, d^4X}{dx^3} + \&c. \right)$$

siue

$$dS = \frac{p^{x+1}}{p-1} \left(X dx\, lp - (\alpha lp - 1)\, dX + (\beta lp - \alpha) \frac{ddX}{dx} - (\gamma lp - \beta) \frac{d^3X}{dx^2} + \&c. \right)$$

quod est differentiale quaesitum functionis propositae S.

388. Sin autem functio inexplicabilis proposita ex factoribus constet, eorumque logarithmi infinitesimi differentias habeant constantes siue minus; tum hac quoque methodo differentiale functionis perpetuo exhiberi poterit. Sit enim

$$S = \overset{1}{A}. \overset{2}{B}. \overset{3}{C}. \overset{4}{D}. \ldots \overset{x}{X}.$$

Quia hinc fit

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

methodo superiori, numeros Bernoullianos in subsidium vocando erit:

$$lS = \int dx\, lX + \tfrac{1}{2} lX + \frac{\mathfrak{A}d.lX}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}d^3.lX}{1.2.3.4\,dx^3} + \&c.$$

qua expressione differentiata fit:

$$\frac{dS}{S} = dx\,lX + \tfrac{1}{2} d.lX + \frac{\mathfrak{A}dd.lX}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}d^4.lX}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}d^6.lX}{1.2.3.4.5.6.dx^5} - \frac{\mathfrak{D}d^8.lX}{1.2.3\ldots 8\,dx^7} + \&c.$$

Hinc si fuerit $X = x$, vt fit:

$$S = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ x$$

fiet applicatione facta

$$\frac{dS}{S} = dx\,lx + \frac{dx}{2x} - \frac{\mathfrak{A}dx}{2xx} + \frac{\mathfrak{B}dx}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}dx}{6x^6} + \&c.$$

quae forma, si x sit numerus valde magnus, commodius vsurpatur, quam eae, quas ante inuenimus.

CAPUT

CAPUT XVII.

DE INTERPOLATIONE SERIERUM.

389.

Series interpolari dicitur, dum eius termini aſſignantur, qui reſpondent indicibus fractis vel etiam ſurdis. Si igitur ſeriei terminus generalis fuerit cognitus, interpolatio nullam habet difficultatem, cum quicunque numerus loco indicis x ſubſtituatur, iſta expreſſio praebeat terminum reſpondentem. Verum ſi ſeries ita fuerit comparata, vt eius terminus generalis nullo modo exhiberi queat; tum interpolatio huiusmodi ſerierum plerumque eſt maxime difficilis, neque maximam partem termini indicibus non integris reſpondentes aliter niſi per ſeries infinitas definiri poſſunt. Quoniam ergo in Capite praecedente huiusmodi expreſſionum, quae more conſueto finite exprimi non poſſunt, valores quibuscunque indicibus reſpondentes determinauimus; ea tractatio maximam afferet vtilitatem ad interpolationes perficiendas. Quam ob cauſam vſum, qui ex ſuperiori Capite in hoc negotium redundat, hic diligentius proſequemur.

390. Sit ergo propoſita ſeries quaecunque

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \; . \; . \; . \; . \; . \; \overset{x}{X}$$

cuius terminus generalis X ſit cognitus, ſummatorius autem S lateat. Hinc formetur alia ſeries, cuius terminus

gene-

generalis aequetur illius ſeriei termino ſummatorio, eritque iſta noua ſeries:

$$\overset{1}{A};\ (\overset{2}{A+B});\ (\overset{3}{A+B+C});\ (\overset{4}{A+B+C+D});\ (\overset{5}{A+B+C+D+E});\ \&c.$$

eiusque terminus generalis ſeu indici indefinito x reſpondens erit $= A + B + C + D + \ldots + X = S$, qui cum explicite non ſit cognitus, interpolatio huius nouae ſeriei iisdem difficultatibus erit obnoxia, quas ante meminimus. Ad hanc ergo ſeriem interpolandam inueſtigari oportet valores ipſius S, quos recipit, ſi loco x numeri quicunque non integri ſubſtituantur. Si enim x eſſet numerus integer, tum conueniens ipſius S valor ſine difficultate reperiretur, additione ſcilicet tot terminorum ſeriei $A + B + C + D +$ &c. quot x contineat vnitates.

391. Quo igitur ea, quae in Capite praecedente ſunt tradita, in vſum vocari poſſint, ponamus x eſſe numerum integrum, ita vt valor ei reſpondens $S = A + B + C + \ldots + X$ ſit cognitus, & quaeramus valorem Σ, in quem S transmutetur, ſi loco x ſcribatur $x + \omega$, exiſtente ω fractione quacunque; eritque Σ terminus ſeriei propoſitae interpolandae, qui reſpondet indici $x + \omega$; quo ergo inuento, interpolatio huius ſeriei erit in promtu. Sit Z terminus ſeriei A, B, C, D, E, &c. qui reſpondet indici $x + \omega$, ſintque Z', Z'', Z''', &c. termini eius conſecutiui indices habentes $x + \omega + 1$; $x + \omega + 2$; $x + \omega + 3$; &c.

Ac primo quidem ponamus ſeriei A, B, C, D, &c. terminos infiniteſimos euaneſcere. His ergo poſitis ſeries

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{(A+B)};\ \overset{3}{(A+B+C)};\ \overset{4}{(A+B+C+D)};\ \&c.$$

cuius terminus indici x reſpondens eſt

$$S = A + B + C + \ldots + X$$

interpolabitur quaerendo eius terminum Σ, qui indici fracto $x + \omega$ reſpondeat, erit autem vti inuenimus:

$$\Sigma = S \begin{array}{l} +X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ -Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \end{array}$$

ſicque habebitur ſeries infinita iſti termino quaeſito Σ aequalis, quae ob

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2\, dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3\, dx^3} + \&c.$$

in hanc formam transmutatur, vt ſit:

$$\Sigma = S - \frac{\omega}{dx} d.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$- \frac{\omega^2}{2\, dx^2} dd.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$- \frac{\omega^3}{6\, dx^3} d^3.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$\&c.$$

quarum formularum ea, quae quouis caſu commodior videatur, adhiberi poterit.

392. Sumamus pro A, B, C, D, &c. ſeriem harmonicam quamcunque $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \&c.$ cuius

cuius terminus generalis seu indici x respondens est $= \frac{1}{a+(x-1)b} = X$. Hinc formata sit ista series:

$$\overset{1}{\frac{1}{a}};\ \overset{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right)};\ \overset{3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\right)};\ \overset{4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}\right)}\ \&c.$$

cuius propterea terminus indici x respondens erit:

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ \ldots\ + \frac{1}{a+(x-1)b}.$$

Si iam Σ denotet terminum istius seriei indici $x+\omega$ respondentem, ob $Z = \frac{1}{a+(x+\omega-1)b}$, erit

$$X' = \frac{1}{a+bx};\quad Z' = \frac{1}{a+bx+b\omega}$$

$$X'' = \frac{1}{a+b+bx};\quad Z'' = \frac{1}{a+b+bx+b\omega}$$

$$X''' = \frac{1}{a+2b+bx};\quad Z''' = \frac{1}{a+2b+bx+b\omega}$$

&c. &c.

hincque orietur:

$$\Sigma = S + \frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a+b+bx} + \frac{1}{a+2b+bx} + \&c.$$

$$- \frac{1}{a+bx+b\omega} - \frac{1}{a+b+bx+b\omega} - \frac{1}{a+2b+bx+b\omega} - \&c.$$

 alte-

altera expressio autem erit huiusmodi:

$$\Sigma = S + b\omega\left(\frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{1}{(a+b+bx)^2} + \frac{1}{(a+2b+bx)^2} + \&c.\right)$$
$$- b^2\omega^2\left(\frac{1}{(a+bx)^3} + \frac{1}{(a+b+bx)^3} + \frac{1}{(a+2b+bx)^3} + \&c.\right)$$
$$+ b^3\omega^3\left(\frac{1}{(a+bx)^4} + \frac{1}{(a+b+bx)^4} + \frac{1}{(a+2b+bx)^4} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

EXEMPLUM I.

Proposita sit ista series:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{(1+\tfrac{1}{2})};\ \overset{3}{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})};\ \overset{4}{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})};\ \&c.$$

cuius terminos, qui indicibus fractis respondent, inueniri oporteat.

Erit ergo $a = 1$ & $b = 1$; vnde si terminus indici integro x respondens ponatur

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x},$$

terminusque indici fracto $x + \omega$ respondens vocetur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = S + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{5+x} + \&c.$$
$$- \frac{1}{1+x+\omega} - \frac{1}{2+x+\omega} - \frac{1}{3+x+\omega} - \frac{1}{4+x+\omega} - \frac{1}{5+x+\omega} - \&c.$$

Notandum autem est, si inuentus fuerit terminus respondens indici fracto ω, quem ponamus $= T$, ex eo ter-

 mi-

minum indicis $x+\omega$ facile inueniri posse; erit enim, si T', T'', T''', &c. denotent terminos indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes:

$$T' = T + \frac{1}{1+\omega}$$

$$T'' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega}$$

$$T''' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{3+\omega} \quad \&c.$$

vnde sufficit eos tantum terminos, qui respondent indicibus ω vnitate minoribus, inuestigasse. Quem in finem ponamus $x = 0$, erit quoque $S = 0$, atque terminus seriei T indici fracto ω respondens ita exprimetur:

$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$$

$$- \frac{1}{1+\omega} - \frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3+\omega} - \frac{1}{4+\omega} - \&c.$$

vel his fractionibus in series infinitas conuersis prodibit altera expressio:

$$T = +\omega\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right)$$

$$- \omega^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$

$$+ \omega^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$

$$- \omega^4\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \&c.\right)$$

$$\&c.$$

quae ad valorem ipſius T proxime inueniendum perquam eſt apta.

Quaeratur ergo propoſitae ſeriei terminus reſpondens indici, $\frac{1}{2}$ qui ſi ponatur $= T$, erit:

$$T = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \&c.$$

ſeu $T = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \&c.\right)$

cuius ſeries valor eſt $= 2 - 2l2$, ſicque terminus indicis $= \frac{1}{2}$ finite exprimi poteſt. Erunt ergo termini ſequentes, quorum indices ſunt $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ita expreſſi:

Ind. $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

Term. $2-2l2$; $2+\frac{2}{3}-2l2$; $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2l2$; $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}-2l2$; &c.

EXEMPLUM II.

Propoſita ſit iſta ſeries:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{\left(1+\frac{1}{3}\right)};\ \overset{3}{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)};\ \overset{4}{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)};\ \&c.$$

cuius terminos indicibus fractis reſpondentes exprimere oporteat.

Erit ergo $a = 1$, $b = 2$, vnde ſi terminus indici integro x reſpondens ponatur

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2x-1}$$

terminusque indici fracto $x + \omega$ vocetur $= \Sigma$, erit

$$\Sigma = S + \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3+2x} + \frac{1}{5+2x} + \frac{1}{7+2x} + \&c.$$
$$- \frac{1}{1+2(x+\omega)} - \frac{1}{3+2(x+\omega)} - \frac{1}{5+2(x+\omega)} - \frac{1}{7+2(x+\omega)} - \&c.$$

Cum

Cum igitur ſufficiat terminos indicibus vnitate minoribus aſſignaſſe, ſit $x = 0$, & $S = 0$: quocirca ſi terminus indici ω conueniens ponatur $= T$, erit:

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c.$$
$$- \frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{3+2\omega} - \frac{1}{5+2\omega} - \frac{1}{7+2\omega} - \frac{1}{9+2\omega} - \&c.$$

& ſi ω numerum quemcunque denotare ponatur, quoniam T eſt terminus indici ω reſpondens, erit T terminus generalis ſeriei propoſitae, qui etiam hoc modo exprimetur:

$$T = \frac{2\omega}{1(1+2\omega)} + \frac{2\omega}{3(3+2\omega)} + \frac{2\omega}{5(5+2\omega)} + \frac{2\omega}{7(7+2\omega)} + \&c.$$

vel ita:

$$T = 2\omega\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.\right)$$
$$- 4\omega^2\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \&c.\right)$$
$$+ 8\omega^3\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.\right)$$
$$- 16\omega^4\left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + \&c.\right)$$

&c.

Pona-

Ponamus esse $\omega = \frac{1}{2}$, erit terminus huic indici respondens $T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c. = l2$, eruntque

Ind.	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Term.	$l2$;	$\frac{1}{2} + l2$;	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + l2$;	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + l2$; &c.

Si sit $\omega = \frac{1}{4}$; erit

$T = +1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \&c.$ siue $- \frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{2}{11} - \frac{2}{15} - \&c.$

$$T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c. - \frac{1}{2}l2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}l2.$$

393. Quod si ergo huius seriei generalis:

$$\frac{1}{a};\ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right);\ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b}\right);\ \&c.$$

quaeratur terminus respondens indici $= \frac{1}{2}$, ponatur in expressionibus §. praeced. $x = 0$, & $\omega = \frac{1}{2}$; fietque $S = 0$, & terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens quaesitus erit

$$\Sigma = \frac{1}{a} - \frac{2}{2a+b} + \frac{1}{a+b} - \frac{2}{2a+3b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{2}{2a+5b} + \&c.$$

siue terminis ad maiorem vniformitatem perductis erit

$$\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+2b} - \frac{1}{2a+3b} + \frac{1}{2a+4b} - \&c.$$

in qua serie cum signa + & — alternentur, sumendis continuis differentiis per methodum supra expositam valor ipsius $\frac{1}{2}\Sigma$ per seriem magis conuergentem exprimetur.

Erunt

Erunt autem differentiarum series:

$$\frac{b}{2a(2a+b)};\quad \frac{b}{(2a+b)(2a+2b)};\quad \frac{b}{(2a+2b)(2a+3b)};\ \&c.$$

$$\frac{2bb}{2a(2a+b)(2a+2b)};\quad \frac{2bb}{(2a+b)(a+2b)(2a+3b)};\ \&c.$$

$$\frac{6b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)};\ \&c.$$

&c.

Ex quibus concluditur fore:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4a} + \frac{1b}{8a(2a+b)} + \frac{1.\ 2bb}{16a(2a+b)(2a+2b)}$$
$$+ \frac{1.\ 2.\ 3\ b^3}{32a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \&c.$$

Hincque ergo habebitur:

$$\Sigma = \frac{1}{2a} + \frac{\frac{1}{2}\cdot b}{2a(2a+b)} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\,bb}{2a(2a+b)(2a+2b)}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\,b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \&c.$$

quae series maxime conuergit, atque valorem termini Σ facili labore proxime exhibet.

394. Quod si autem in genere seriei A, B, C, D, E, &c. termini infinitesimi euanescant, terminusque indici ω respondens fuerit $= Z$, eiusque sequentes, qui indicibus $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, &c. respondeant, sint Z', Z'', Z''', Z^{IV}, &c. Si in superioribus (391) ponatur $x = 0$,

$x = 0$, vt ſit $S = 0$ & $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$, &c. ſequetur, ſi formetur huiusmodi ſeries:

$$\overset{1}{A},\ (\overset{2}{A+B}),\ (\overset{3}{A+B+C}),\ (\overset{4}{A+B+C+D}),\ \&c.$$

eiusque terminus indici ω reſpondens ponatur $= \Sigma$, fore

$$\Sigma = (A-Z') + (B-Z'') + (C-Z''') + (D-Z^{\text{IV}}) + \&c.$$

ex qua expreſſione termini quicunque intermedii definiri poterunt. Sufficiet autem ad interpolationem perficiendam eos terminos inueſtigaſſe, qui reſpondeant indicibus ω vnitate minoribus. Si enim terminus Σ indici huiusmodi cuicunque ω reſpondens fuerit repertus, iique qui conueniant indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c. ponantur Σ', Σ'', Σ''', Σ^{IV}, &c. erit

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$
&c.

EXEMPLUM I.

Interpolare hanc ſeriem:

$$\overset{1}{1};\ (\overset{2}{1+\tfrac{1}{4}});\ (\overset{3}{1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}});\ (\overset{4}{1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}});$$
&c.

Sit Σ huius ſeriei terminus reſpondens indici ω, & cum haec ſeries formata ſit ex ſummatione huius:

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \&c.$$

cuius terminus indici ω reſpondens eſt $= \frac{1}{\omega^2}$ erit

Z =

$$Z = +\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^2} - \frac{1}{(2+\omega)^2} - \frac{1}{(3+\omega)^2} - \frac{1}{(4+\omega)^2} - \&c.$$

Quod ſi ergo ſeriei propoſitae quaeratur terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, poni debit $\omega = \frac{1}{2}$, fietque:

$\Sigma = 1 - \frac{4}{9} + \frac{1}{4} - \frac{4}{25} + \frac{1}{9} - \frac{4}{49} + \&c.$ ſiue

$\Sigma = 4(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} + \&c.)$

Cum igitur ſit $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \&c. = \frac{\pi^2}{12}$, erit

$\Sigma = 4\left(1 - \frac{\pi\pi}{12}\right) = 4 - \frac{1}{3}\pi^2$, qui eſt terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens. Hinc ergo reſpondebunt

Indicibus	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	&c.
Termini	$4 - \frac{1}{3}\pi^2$;	$\frac{4}{1} + \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\pi^2$;	$\frac{4}{1} + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} - \frac{1}{3}\pi^1$;	&c.

EXEMPLUM II.

Interpolare hanc ſeriem:

$$\overset{1}{1}\ ;\ \overset{2}{(1 + \tfrac{1}{9})}\ ;\ \overset{3}{(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25})}\ ;\ \overset{4}{(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49})}$$
&c.

Sit Σ terminus reſpondens indici cuicunque ω, & cum haec ſeries formata ſit ex ſummatione huius:

$$1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{81} + \&c.$$

ex qua fit terminus indici ω reſpondens $Z = \frac{1}{(2\omega - 1)^2}$

erit $Z' = \frac{1}{(2\omega + 1)^2}$; $Z'' = \frac{1}{(2\omega + 3)^2}$; $Z''' = \frac{1}{(2\omega + 5)^2}$
&c.

 Quam-

Quamobrem habebitur:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$$

$$- \frac{1}{(1+2\omega)^2} - \frac{1}{(3+2\omega)^2} - \frac{1}{(5+2\omega)^2} - \frac{1}{(7+2\omega)^2} - \&c.$$

Ponamus $\omega = \frac{1}{2}$, vt inueniamus terminum ſeriei propoſitae reſpondentem indici $= \frac{1}{2}$, qui erit:

$$\Sigma = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \&c. = \frac{\pi\pi}{12},$$

ex quo termini, qui medium interiacent inter binos quosvis datos, ſequenti modo exprimentur. Reſpondebunt

Ind. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$; &c.

Term. $\frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{\pi\pi}{12}$; &c.

EXEMPLUM III.

Interpolare hanc ſeriem:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1; & \left(1 + \frac{1}{2^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right); \&c. \end{matrix}$$

Sit vt ante Σ terminus indici ω reſpondens, erit

$$Z = \frac{1}{\omega^3}; \& \ Z' = \frac{1}{(1+\omega)^n}; \ Z'' = \frac{1}{(2+\omega)^n}; \ Z''' = \frac{1}{(3+\omega)^n}$$

&c. hincque habebitur:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \&c.$$

$$- \frac{1}{(1+\omega)^n} - \frac{1}{(2+\omega)^n} - \frac{1}{(3+\omega)^n} - \frac{1}{(4+\omega)^n} - \&c.$$

Si igitur desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, erit

$$\text{is} = 1 - \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{2^n}{5^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{2^n}{7^n} + \&c.$$

$$\text{seu} = 2^n\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \&c.\right)$$

Quare si ponatur:

$$\mathfrak{N} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c.$$

erit seriei propositae terminus qui indici $\frac{1}{2}$ respondet $= 2^n(1 - \mathfrak{N})$; hincque respondebunt

Indic. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$

Term. $2^n - 2^n\mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} - 2^n\mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - 2^n\mathfrak{N}$; &c.

EXEMPLUM IV.

Interpolare hanc seriem:

$$\overset{1}{1}\,;\ \overset{2}{\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}\,;\ \overset{3}{\left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)}\,;\ \overset{4}{\left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}\right)}\,;\ \&c.$$

Sit Σ terminus qui indici cuicunque ω respondeat, & cum sit $Z = \frac{1}{(2\omega-1)^n}$, erit:

$$Z' = \frac{1}{(2\omega+1)^n}\,;\ Z'' = \frac{1}{(2\omega+3)^n}\,;\ Z''' = \frac{1}{(2\omega+5)^n}\,;\ \&c.$$

atque

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$$
$$- \frac{1}{(1+2\omega)^n} - \frac{1}{(3+2\omega)^n} - \frac{1}{(5+2\omega)^n} - \frac{1}{(7+2\omega)^n} - \&c.$$

 Po-

Ponatur $\omega = \frac{1}{2}$, & prodibit terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens

$$= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c. = \mathfrak{N},$$

ex quo porro erunt reliqui termini inter binos datos medii

Indices: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; &c.

Termini: $\mathfrak{N}$; $\frac{1}{2^n} + \mathfrak{N}$; $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \mathfrak{N}$; &c.

395. Ponamus nunc seriei A, B, C, D, E, &c. ex cuius summatione series interpolanda formatur, terminos infinitesimos non euanescere, sed ita esse comparatos, vt eorum differentiae euanescant; sitque X huius seriei terminus respondens indici x, & Z terminus respondens exponenti $x+\omega$, tum vero sint X', X'', X''', X'''', &c. termini ipsum X sequentes, & Z', Z'', Z''', &c. termini ipsum Z sequentes. Quibus positis proponatur haec series interpolanda:

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{(A+B)};\ \overset{3}{(A+B+C)};\ \overset{4}{(A+B+C+D)};\ \&c.$$

cuius terminus indici x respondens sit $= S$, at terminus indici $x + \omega$ respondens sit $= \Sigma$; eritque ex iis, quae Capite praecedente sunt tradita:

$$\begin{aligned} \Sigma = S &+ X' + X'' + X''' + \&c. \\ &- Z' - Z'' - Z''' - \&c. \\ +\omega X' + \omega &\left\{ \begin{matrix} X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ -X' - X'' - X''' - \&c. \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

Quia

Quia autem vt ante ſufficit terminos indicibus vnitate minoribus reſpondentes inueſtigaſſe, ponamus $x = 0$, vt ſit $S = 0$, $X' = A$, $X'' = B$, &c. eritque terminus indici ω reſpondens:

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z'''') \text{ \&c.}$$
$$+ \omega A + \omega [(B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + \text{\&c.}]$$

Vel ſi differentias has more ſupra recepto exprimere velimus quo eſt $\Delta A = B - A$; $\Delta B = C - B$; &c. habebitur:

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z'''') + \text{\&c.}$$
$$+ \omega (A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \text{\&c.})$$

395. Sin autem ſeriei A, B, C, D, E, &c. ex cuius ſummatione ſeries interpolanda formatur, termini infiniteſimi neque ipſi euaneſcant, neque differentias primas habeant euaneſcentes; tum plures ſeries ad valorem ipſius Σ exprimendum adiici debebunt, quoad ſcilicet ad differentias terminorum infiniteſimorum euaneſcentes perueniatur. Sit enim vt ante ſeriei A, B, C, D, E, &c. terminus indici x reſpondens $= X$, eumque ſequentes X', X'', X''', &c. indici autem $x + \omega$ reſpondeat terminus Z, quem ſequantur Z', Z'', &c. atque proponatur haec ſeries:

$$\overset{1}{A}; \; \overset{2}{(A+B)}; \; \overset{3}{(A+B+C)}; \; \overset{4}{(A+B+C+D)}; \; \text{\&c.}$$

cuius terminus indici x reſpondens ſit

$$S = A + B + C + D + \ldots\ldots + X$$

in-

indici vero $x+\omega$ reſpondeat terminus Σ; ita vt

indicibus	reſpondeant termini
$x+\omega+1$	$\Sigma' = \Sigma + Z'$
$x+\omega+2$	$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$
$x+\omega+3$	$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$
&c.	&c.

Si iam differentiae terminorum ita exprimantur, vt ſit

$$\Delta X' = X'' - X';\ \Delta X'' = X''' - X'';\ \Delta X''' = X'''' - X''';\ \&c.$$
$$\Delta^2 X' = \Delta X'' - \Delta X';\ \Delta^2 X'' = \Delta X''' - \Delta X'';\ \Delta^2 X''' = \Delta X'''' - \Delta X''';\&c.$$
$$\Delta^3 X' = \Delta^2 X'' - \Delta^2 X';\ \Delta^3 X'' = \Delta^2 X''' - \Delta^2 X'';\ \&c.$$

ex §. 377. terminus Σ ſequenti modo exprimetur:

$$\begin{aligned}\Sigma = S & + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ & - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \\ & + \omega[X' + \Delta X' + \Delta X'' + \Delta X''' + \Delta X'''' + \&c.] \\ & + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}[\Delta X' + \Delta^2 X' + \Delta^2 X'' + \Delta^2 X''' + \Delta^2 X'''' + \&c.] \\ & + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3}[\Delta^2 X' + \Delta^3 X' + \Delta^3 X'' + \Delta^3 X''' + \Delta^3 X'''' + \&c.] \\ & \&c.\end{aligned}$$

397. Sufficit, vti iam notauimus, tot huiusmodi ſeries adieciſſe, donec ad terminorum infiniteſimorum differentias euaneſcentes perueniatur: ſi enim has ipſas ſeries quoque in infinitum continuare velimus, vel eo vsque ſaltem, donec terminorum finitorum differentiae euaneſcant; tum ob

$Z' =$

$$Z' = X' + \omega\Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}\Delta^2 X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 X' + \&c.$$

tota expreſſio inuenta contrahetur in hanc:

$$\Sigma = S + \omega X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}\Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^2 X' + \&c.$$

quae terminum ſummatorium ſeriei A + B + C + D + &c. inuoluit; qui autem ſi eſſet cognitus, interpolatio nullam haberet difficultatem. Interim tamen & hac formula vti licebit, quippe quae, quoties abrumpitur, quemvis terminum interpolandum finite & algebraicae expreſſum exhibet: ſin autem in infinitum progrediatur, plerumque praeſtat priorem formulam adhibere, in qua ratio terminorum infiniteſimorum habetur. Haec vero, ſi ponatur $x = 0$, vt Σ denotet terminum indici ω reſpondentem, ob $S = 0$ hanc formam induet:

$$\begin{aligned}\Sigma = \;& + A + B + C + D + \&c.\\ & - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c.\\ & + \omega[A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \&c.]\\ & + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}[\Delta A + \Delta^2 A + \Delta^2 B + \Delta^2 C + \Delta^2 D + \&c.]\\ & + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3}[\Delta^2 A + \Delta^3 A + \Delta^3 B + \Delta^3 C + \Delta^3 D + \&c.]\\ & \&c.\end{aligned}$$

Vel si ponatur breuitatis gratia:

$$\omega = \alpha; \quad \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} = \beta; \quad \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\,2.\,3} = \gamma; \quad \&c.$$

erit:

$$\begin{aligned}\Sigma = & \quad \alpha A + \beta\Delta A + \gamma\Delta^2 A + \delta\Delta^3 A + \&c.\\ & + A + \alpha\Delta A + \beta\Delta^2 A + \gamma\Delta^3 A + \&c. - Z'\\ & + B + \alpha\Delta B + \beta\Delta^2 B + \gamma\Delta^3 B + \&c. - Z''\\ & + C + \alpha\Delta C + \beta\Delta^2 C + \gamma\Delta^3 C + \&c. - Z'''\\ & \&c.\end{aligned}$$

quarum serierum horizontalium numerus in infinitum quidem progreditur, at quaelibet finito terminorum numero constat.

EXEMPLUM.

Interpolare hanc seriem:

$$\overset{1}{\tfrac{1}{2}};\ \overset{2}{\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}};\ \overset{3}{\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4}};\ \overset{4}{\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{4}{5}};\ \&c.$$

Sit huius seriei terminus indici ω respondens $= \Sigma$, & cum ea oriatur ex summatione huius seriei:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\ \&c. \quad \text{erit} \quad Z = \frac{\omega}{\omega+1};$$

& quia termini infinitesimi differentias suas primas iam habent euanescentes, differentiae tantum primae sunt accipiendae, quae erunt:

$$\text{ob} \quad A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{2}{3}; \quad C = \frac{3}{4}; \quad D = \frac{4}{5}; \quad \&c.$$

$$\Delta A = \frac{1}{2.3}; \quad \Delta B = \frac{1}{3.4}; \quad \Delta C = \frac{1}{4.5}; \quad \&c.$$

Hinc

Hinc ergo habebitur:

$$\Sigma = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \&c.$$

$$+ \frac{\omega}{2.3} + \frac{\omega}{3.4} + \frac{\omega}{4.5} + \frac{\omega}{5.6} + \&c.$$

$$- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \&c.$$

seu ob $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2.3} + \frac{\omega}{3.4} + \frac{\omega}{4.5} + \&c. = \omega$; erit

$$\Sigma = \omega + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \&c.$$

$$- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \&c.$$

Si ergo quaeratur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, erit is

$$\Sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{5}{7} + \frac{3}{4} - \frac{7}{9} + \frac{4}{5} - \frac{9}{11} + \&c.$$

seu $\Sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} - \frac{1}{3.7} - \frac{1}{4.9} - \frac{1}{5.11} - \frac{1}{6.13} - \&c.$

ideoque $\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \frac{1}{8.9} - \frac{1}{10.11} - \frac{1}{12.13} - \&c.$

seu $\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{13} - \&c.$

$$+ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \&c.$$

Quare cum fit $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c. = l2$

erit $\frac{1}{2}\Sigma = l2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \&c. = l2 - \frac{7}{12}$,

ideoque $\Sigma = 2\,l\,2 - \frac{7}{6}$.

398. Pergamus nunc ad feries interpolandas, quarum termini ex factoribus funt conflati, fitque propofita haec feries generaliffima:

$$\overset{1}{A}\,;\ \overset{2}{AB}\,;\ \overset{3}{ABC}\,;\ \overset{4}{ABCD}\,;\ \overset{5}{ABCDE}\,;\ \&c.$$

cuius terminus indici ω refpondens fit $= \Sigma$. Erit ergo $l\Sigma$ terminus refpondens indici ω in hac ferie:

$$\overset{1}{lA}\,;\ \overset{2}{(lA+lB)}\,;\ \overset{3}{(lA+lB+lC)}\,;\ \overset{4}{(lA+lB+lC+lD)}\ \&c.$$

Quodfi ergo ponamus huius feriei terminos infinitefimos euanefcere; atque feriei A, B, C, D, E, &c. terminum indici ω refpondentem effe Z, eiusque fequentes indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c. refpondentes effe Z', Z'', Z''', Z'''', &c. erit ex fupra demonftratis:

$$l\Sigma = \begin{array}{l} +lA + lB + lC + lD + \&c. \\ -lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \&c. \end{array}$$

Hinc igitur ad numeros progrediendo habebitur:

$$\Sigma = \frac{A}{Z'} \cdot \frac{B}{Z''} \cdot \frac{C}{Z'''} \cdot \frac{D}{Z''''} \cdot \&c.$$

399.

399. Quodſi autem terminorum infiniteſimorum ſeriei A, B, C, D, &c. logarithmi non euaneſcant, ſed habeant differentias euaneſcentes, erit vti vidimus:

$$
\begin{aligned}
l\Sigma = &+ lA + lB + lC + \&c. \\
&- lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c. \\
&+ \omega lA + \omega\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + \&c.\right)
\end{aligned}
$$

hincque ad numeros a logarithmis procedendo fiet

$$\Sigma = A^{\omega} . \frac{A^{1-\omega}B^{\omega}}{Z'} . \frac{B^{1-\omega}C^{\omega}}{Z''} . \frac{C^{1-\omega}D^{\omega}}{Z'''} . \frac{D^{1-\omega}E^{\omega}}{Z''''} . \&c.$$

At ſi illorum logarithmorum infiniteſimorum differentiae demum ſecundae euaneſcant, erit:

$$
\begin{aligned}
l\Sigma = &\quad lA + lB + lC + lD + \&c. \\
&+ lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \&c. \\
&+ \omega\left(lA + l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right) \\
&+ \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left(l\frac{B}{A} + l\frac{AC}{B^2} + l\frac{BD}{C^2} + l\frac{CE}{D^2} + l\frac{DE}{E^2} + \&c.\right)
\end{aligned}
$$

Ex his itaque obtinebitur:

$$\Sigma = A^{\frac{\omega(3-\omega)}{2}} . B^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}} .$$

$$\frac{A^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} B^{\omega(2-\omega)} C^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z'} . \frac{B^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} C^{\omega(2-\omega)} D^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z''} \&c.$$

quae si $\omega < 1$ commodius ita exprimetur :

$$\Sigma = \frac{A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1.2}}}{B^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}}} \cdot \frac{A^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}} B^{\omega(2-\omega)}}{C^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}} C^{\omega(2-\omega)}}{D^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} Z''} . \&c.$$

400. Accommodemus hanc interpolationem ad istam seriem :

$$\overset{1}{\frac{a}{b}}; \quad \overset{2}{\frac{a(a+c)}{b(b+c)}}; \quad \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}}; \quad \overset{4}{\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)}}; \ \&c.$$

cuius factores desumti sunt ex hac serie :

$$\overset{1}{\frac{a}{b}}; \quad \overset{2}{\frac{a+c}{b+c}}; \quad \overset{3}{\frac{a+2c}{b+2c}}; \quad \overset{4}{\frac{a+3c}{b+3c}}; \ \&c.$$

cuius terminorum infinitesimorum logarithmi sunt $= 0$. Erit ergo $Z = \frac{a-c+c\omega}{b-c+c\omega}$; $Z' = \frac{a+c\omega}{b+c\omega}$; &c. Hinc si illius seriei terminus indici ω respondens ponatur $= \Sigma$, erit ex §. 398 :

$$\Sigma = \frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)} \cdot \frac{(a+c)(b+c+c\omega)}{(b+c)(a+c+c\omega)} \cdot \frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(b+2c+c\omega)} . \&c.$$

Quare si desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit :

$$\Sigma = \frac{a(2b+c)}{b(2a+c)} \cdot \frac{(a+c)(2b+3c)}{(b+c)(2a+3c)} \cdot \frac{(a+2c)(2b+5c)}{(b+2c)(2a+5c)} . \&c.$$

EXEMPLUM.

Interpolare hanc seriem:

$$\overset{1}{\frac{1}{2}};\ \overset{2}{\frac{1.3}{2.4}};\ \overset{3}{\frac{1.3.5}{2.4.6}};\ \overset{4}{\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}};\ \overset{5}{\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}};\ \text{\&c.}$$

Cum hic sit $a = 1$, $b = 2$, & $c = 2$; si terminus indici cuicunque ω respondens $= \Sigma$, erit

$$\Sigma = \frac{1(2+2\omega)}{2(1+2\omega)} \cdot \frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)} \cdot \frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)} \cdot \frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)} \cdot \text{\&c.}$$

Hinc si termini, qui indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c. respondent, ponantur Σ', Σ'', Σ''', &c. erit:

$$\Sigma' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \Sigma$$

$$\Sigma'' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \Sigma$$

$$\Sigma''' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \frac{5+2\omega}{6+2\omega} \cdot \Sigma$$

&c.

Si itaque desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{9.11}{10.10} \cdot \text{\&c.}$$

Verum posito $\pi =$ semicircumferentiae circuli, cuius radius est $= 1$, supra ostendimus esse:

$$\pi = 2 . \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \text{\&c.}$$

Hanc-

Hancobrem termini intermedii indicibus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. per peripheriam circuli exprimi poterunt, hoc modo:

Indices: $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{5}{2}$ $\qquad$ $\frac{7}{2}$

Termini: $\frac{2}{\pi}$; $\frac{2}{3}.\frac{2}{\pi}$; $\frac{2.4}{3.5}.\frac{2}{\pi}$; $\frac{2.4.6}{3.5.7}.\frac{2}{\pi}$ &c.

Quam eandem interpolationem *Wallisius* in arithmetica infinitorum inuenit.

401. Consideremus nunc istam seriem:

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a; & a(a+b); & a(a+b)(a+2b); & a(a+b)(a+2b)(a+3b); \text{ \&c.} \end{array}$$

cuius factores hanc progressionem arithmeticam constituunt: a, $(a+b)$, $(a+2b)$, $(a+3b)$, $(a+4b)$, &c. huiusque termini infinitesimi ita sunt comparati, vt eorum logarithmorum differentiae euanescant. Cum igitur sit $Z = a - b + b\omega$, & $Z' = a + b\omega$; $Z'' = a + b + b\omega$; $Z''' = a + 2b + b\omega$; &c. si Σ denotet terminum seriei propositae, cuius index est $= \omega$, erit:

$$\Sigma = a^{\omega} . \frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega} . \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega} . \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+b\omega} . \text{ \&c.}$$

Hocque valore inuento, si ω denotet numerum quemvis fractum vnitate minorem, termini sequentes indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes ita determinabuntur, vt sit

$\Sigma' =$

$$\Sigma' = (a+b\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma'' = (a+b\omega)(a+b+b\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma''' = (a+b\omega)(a+b+b\omega)(a+2b+b\omega)\,\Sigma$$
&c.

Quare ſi deſideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma = a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}b} \cdot \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+2b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{3}{2}b} \cdot \frac{(a+2b)^{\frac{1}{2}}(a+3b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{5}{2}b} \cdot \&c.$$

ideoque ſumtis quadratis:

$$\Sigma^2 = a \cdot \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)}{(a+\frac{5}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)} \cdot \&c.$$

402. Ponatur in ſerie quam ſupra tractauimus:

$$\overset{1}{\frac{f}{g}}; \overset{2}{\frac{f(f+h)}{g(g+h)}}; \overset{3}{\frac{f(f+h)(f+2h)}{g(g+h)(g+2h)}}; \overset{4}{\frac{f(f+h)(f+2h)(f+3h)}{g(g+h)(g+2h)(g+3h)}}; \&c.$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens $= \Theta$, erit:

$$\Theta = \frac{f(g+\frac{1}{2}h)}{g(f+\frac{1}{2}h)} \cdot \frac{(f+h)(g+\frac{3}{2}h)}{(g+h)(f+\frac{3}{2}h)} \cdot \frac{(f+2h)(g+\frac{5}{2}h)}{(g+2h)(f+\frac{5}{2}h)} \cdot \&c.$$

ſtatuatur nunc: $f = a$; $g = a+\frac{1}{2}b$; & $h = b$; erit:

$$\Theta = \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \&c.$$

ideoque fiet $\Sigma^2 = a\Theta$, & $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$. Quocirca ſi huius ſeriei:

$$\overset{1}{a}; \overset{2}{a(a+b)}; \overset{3}{a(a+b)(a+2b)}; \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}; \&c.$$

 ter-

terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens statuatur $= \Sigma$; atque huius seriei:

$$\overset{1}{\frac{a}{a+\frac{1}{2}b}},\quad \overset{2}{\frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)}},\quad \overset{3}{\frac{a(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)}},\ \text{\&c.}$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens ponatur $= \Theta$; erit $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$.

Cum igitur hic seriei solorum numeratorum terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens sit $= \Sigma$, si in serie denominatorum terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens ponatur $= \Lambda$; erit $\Theta = \frac{\Sigma}{\Lambda}$; at est $\Theta = \frac{\Sigma^2}{a}$, vnde fiet $\Sigma = \frac{a}{\Lambda}$, seu $\Sigma\Lambda = a$, quibus theorematibus interpolatio huiusmodi serierum non mediocriter illustratur.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec series interpolanda:

$$1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4,\ \text{\&c.}$$

Quia hic est $a = 1$, & $b = 1$, si terminus indici ω respondens ponatur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega}.2^{\omega}}{1+\omega} \cdot \frac{2^{1-\omega}.3^{\omega}}{2+\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega}.4^{\omega}}{3+\omega} \cdot \frac{4^{1-\omega}.5^{\omega}}{4+\omega}\ \text{\&c.}$$

Hic pro ω semper fractio vnitate minor accipi potest nihilominus enim interpolatio per totam seriem extendetur. Nam si termini indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes ponantur Σ', Σ'', Σ''', &c.

erit:

erit:

$$M' = (1+\omega)\, M$$
$$M'' = (1+\omega)(2+\omega)\, M$$
$$M''' = (1+\omega)(2+\omega)(3+\omega)\, M$$
&c.

Seriei ergo propositae terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens erit:

$$M = \frac{1^{\frac{1}{2}}\,.\,2^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}}\,;\ \frac{2^{\frac{1}{2}}\,.\,3^{\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}}\,;\ \frac{3^{\frac{1}{2}}\,.\,4^{\frac{1}{2}}}{3\frac{1}{2}}\,;\ \text{\&c.} \quad \text{siue}$$

$$M^2 = \frac{2.4}{3.3}\,.\,\frac{4.6}{5.5}\,.\,\frac{6.8}{7.7}\,.\,\frac{8.10}{9.9}\,.\ \text{\&c.}$$

Vnde cum sit $\pi = 2\,.\,\frac{2.2}{1.3}\,.\,\frac{4.4}{3.5}\,.\,\frac{6.6}{5.7}\,.$ &c.

erit $M^2 = \frac{\pi}{4}$ & $M = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: hincque respondebunt

Indicibus: $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \frac{5}{2}$ $\quad \frac{7}{2}$

Termini: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,;\ \frac{3}{2}\,.\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,;\ \frac{3.5}{2.2}\,.\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,;\ \frac{3.5.7}{2.2.2}\,.\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,;$ &c.

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec series interpolanda:

$$\overset{1}{1}\,;\ \overset{2}{1.3}\,;\ \overset{3}{1.3.5}\,;\ \overset{4}{1.3.5.7}\,;\ \text{\&c.}$$

Quia hic est $a = 1$; $b = 2$; si terminus indici ω respondens ponatur $= M$, erit:

$$M = \frac{1^{1-\omega}\,.\,3^{\omega}}{1+2\omega}\,.\,\frac{3^{1-\omega}\,.\,5^{\omega}}{3+2\omega}\,.\,\frac{5^{1-\omega}\,.\,7^{\omega}}{5+2\omega}\,.\ \text{\&c.}$$

 ter-

terminique ordine ſequentes ita erunt comparati:

$$\Sigma' = (1+2\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma'' = (1+2\omega)(3+2\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma''' = (1+2\omega)(3+2\omega)\,5+2\omega)\,\Sigma$$
&c.

Si igitur ſeriei propoſitae deſideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, isque vocetur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{\sqrt{1.3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3.5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5.7}}{6}\cdot\frac{\sqrt{7.9}}{8}\cdot \&c. \quad \text{ergo}$$

$$\Sigma^2 = \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{3.5}{4.4}\cdot\frac{5.7}{6.6}\cdot\frac{7.9}{8.8}\cdot \&c. = \frac{2}{\pi},$$

ideoque habebitur $\Sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. At reſpondebunt

Indicibus:	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	&c.
Termini:	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;	$2.\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;	$2.4\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;	$2.4.6\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;	&c.

Quodſi ergo prior ſeries & haec inuicem multiplicentur vt habeatur haec ſeries:

$$\overset{1}{1^2};\ \overset{2}{1^2.2.3};\ \overset{3}{1^2.2.3^2.5};\ \overset{4}{1^2.2.3^2.4.5.7};\ \overset{5}{1^2.2.3^2.4.5^2.7.9};$$
&c.

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens erit $= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; quod facile perſpicitur, ſi iſti ſeriei haec forma tribuatur:

$$\overset{1}{\frac{1.2}{2}};\ \overset{2}{\frac{1.2.3.4}{2^2}};\ \overset{3}{\frac{1.2.3.4.5.6}{2^3}};\ \overset{4}{\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2^4}};\ \&c.$$

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens manifeſto eſt $= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Sit ista series proposita interpolanda:

$$\overset{1}{\frac{n}{1}}\ ;\ \overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.2}}\ ;\ \overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}\ ;\ \overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}}\ ;\ \&c.$$

Considerentur huius seriei numeratores ac denominatores seorsim, & cum numeratores sint:

$$\overset{1}{n}\ ;\ \overset{2}{n(n-1)}\ ;\ \overset{3}{n(n-1)(n-2)}\ ;\ \overset{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\ ;\ \&c.$$

fiet applicatione facta, $a = n$, & $b = -1$, vnde huius seriei terminus indici ω respondens erit $=$

$$n^{\omega}.\frac{n^{1-\omega}(n-1)^{\omega}}{n-\omega}.\frac{(n-1)^{1-\omega}(n-2)^{\omega}}{n-1-\omega}.\frac{(n-2)^{1-\omega}(n-3)^{\omega}}{n-2-\omega}.\ \&c.$$

quae autem expressio ob factores in negatiuos abeuntes nihil certi monstrat. Transformetur ergo series proposita, ponendo breuitatis gratia $1.2.3 \ldots n = N$, in hanc:

$$N\left(\overset{1}{\frac{1}{1.1.2.3\ldots(n-1)}}\ ;\ \overset{2}{\frac{1}{1.2.\,1.2.3\ldots(n-2)}}\ ;\ \overset{3}{\frac{1}{1.2.3.\,1.2.3\ldots(n-3)}}\ ;\ \&c.\right)$$

cuius denominatores cum constent duobus factoribus, alteri constituent hanc seriem:

$$\overset{1}{1.2.3\ldots.(n-1)}\ ;\ \overset{2}{1.2.3\ldots.(n-2)}\ ;\ \overset{3}{1.2.3\ldots.(n-3)}\ ;\ \&c.$$

cuius terminus indici ω respondens, conuenit cum termino huius seriei:

$$\overset{1}{1}\;;\;\overset{2}{1.2}\;;\;\overset{3}{1.2.3}\;;\;\overset{4}{1.2.3.4}\;;\;\overset{5}{1.2.3.4.5}\;;\;\&c.$$

indici $n-\omega$ respondente: qui est

$$\frac{1^{1-n+\omega}\,.\,2^{n-\omega}}{1+n-\omega}\,.\,\frac{2^{1-n+\omega}\,.\,3^{n-\omega}}{2+n-\omega}\,.\,\frac{3^{1-n+\omega}\,.\,4^{n-\omega}}{3+n-\omega}\,.\,\&c.$$

Sit autem huius seriei terminus indici $1-\omega$ respondens $=\Theta$; erit:

$$\Theta=\frac{1^{\omega}\,.\,2^{1-\omega}}{2-\omega}\,.\,\frac{2^{\omega}\,.\,3^{1-\omega}}{3-\omega}\,.\,\frac{3^{\omega}\,.\,4^{1-\omega}}{4-\omega}\,.\,\&c.$$

atque cum respondeant:

Indicibus: $1-\omega$; $2-\omega$; $3-\omega$

Termini: Θ ; $(2-\omega)\Theta$; $(2-\omega)(3-\omega)\Theta$; &c.

indici $n-\omega$ respondebit hic terminus:

$$(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\;.\;.\;.\;(n-\omega)\Theta.$$

Deinde illorum denominatorum alteri factores constituent hanc seriem:

$$\overset{1}{1}\;;\;\overset{2}{1.2}\;;\;\overset{3}{1.2.3}\;;\;\overset{4}{1.2.3.4}\;;\;\overset{5}{1.2.3.4.5}\;;\;\&c.$$

si terminus indici ω respondens ponatur $=\Lambda$, erit:

$$\Lambda=\frac{1^{1-\omega}\,.\,2^{\omega}}{1+\omega}\,.\,\frac{2^{1-\omega}\,.\,3^{\omega}}{2+\omega}\,.\,\frac{3^{1-\omega}\,.\,4^{\omega}}{3+\omega}\,.\,\&c.$$

Quibus inuentis si ipsius seriei propositae:

$$\overset{1}{\frac{n}{1}}\;;\;\overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.\,2}}\;;\;\overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}}\;;\;\overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}}\;;\;\&c.$$

ter-

terminus indici ω respondens ponatur Σ, erit:

$$\Sigma = \frac{N}{\Lambda.(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ldots\ (n-\omega)\Theta}.$$

At vero est:

$$\frac{N}{(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ldots\ (n-\omega)} =$$

$$\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot\frac{n}{n-\omega},$$

atque

$$\Lambda\Theta = \frac{1.2}{(1+\omega)(2-\omega)}\cdot\frac{2.3}{(2+\omega)(3-\omega)}\cdot\frac{3.4}{(3+\omega)(4-\omega)}.\ \&c.$$

Ex quibus terminus indici ω respondens quaesitus erit:

$$\Sigma = \frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\frac{5}{5-\omega}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot\frac{n}{n-\omega}\cdot$$

$$\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.\ 2}\cdot\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.\ 3}\cdot\frac{(3+\omega)(4-\omega)}{3.\ 4}.\ \&c.\ \text{in infinitum.}$$

Indici ergo $\frac{1}{2}$ respondebit iste terminus:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot$$

$$\frac{3.3}{2.4}\cdot\frac{5.5}{4.6}\cdot\frac{7.7}{6.8}\cdot\frac{9.9}{8.10}.\ \&c.$$

qui reducitur ad $\frac{4.6.8.10\ \ldots\ldots\ 2n}{3.5.7.9\ \ldots\ (2n-1)}\cdot\frac{4}{\pi}$, seu

erit $= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.8.10\ \ldots\ldots\ 2n}{1.3.5.7.9\ \ldots\ (2n-1)}$.

Si

Si fuerit $n = 2$, prodibit iſta ſeries interpolanda:

$$\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \&c. \\ 1, & 2, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \&c. \end{matrix}$$

cuius propterea terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens eſt $= \frac{16}{3\pi}$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur terminus reſpondens indici $= \frac{1}{2}$ *in hac ſerie:*

$$\begin{matrix} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ 1 & + & \frac{1}{2} & - & \frac{1.1}{2.4} & + & \frac{1.1.3}{2.4.6} & - & \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} & + \&c. \end{matrix}$$

Oritur haec ſeries ex praecedente ſi ponatur $n = \frac{1}{2}$, eritque propterea terminus quaeſitus, qui ſit $= \Sigma$:

$$\Sigma = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2.4.6.8 \;.\;.\;.\;.\; 2n}{1.3.5.7 \;.\;.\;.\; (2n-1)} \text{ poſito } n = \tfrac{1}{2}.$$

Ponatur $\frac{2.4.6.8 \;.\;.\;.\;.\; 2n}{1.3.5.7 \;.\;.\;.\; (2n-1)} = \Theta$ ſi ſit $n = \frac{1}{2}$, eritque Θ terminus reſpondens indici $\frac{1}{2}$ in hac ſerie:

$$\frac{2}{1}; \quad \frac{2.4}{1.3}; \quad \frac{2.4.6}{1.3.5}; \quad \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}; \quad \&c.$$

qui ex ſuperioribus prodit $= \frac{\pi}{2}$. Quocirca ſeriei propoſitae terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, qui quaeritur, erit $= 1$. Quoniam autem in iſta ſerie, ſi terminus indici cuicunque ω reſpondens ponatur $= \Sigma$, ſequens eum erit

$\Sigma' =$

$\Sigma' = \frac{1-2\omega}{2+2\omega}\Sigma$; series proposita ita mediis terminis interiiciendis interpolabitur:

Indices: $\quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3 \quad \frac{7}{2}$

Termini: $\quad 1;\ 1;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{-1.1}{2.4};\ 0;\ \frac{1.1.3}{2.4.6};\ 0;$ &c.

EXEMPLUM. V.

Si n *fuerit numerus quicunque fractus, inuenire terminum indici* ω *respondentem in serie:*

$$\overset{0}{1};\ \overset{1}{\frac{n}{1}};\ \overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.\,2}};\ \overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}};\ \overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}}$$

&c.

Si expressionem $\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{n}{n-\omega}$ cum §. 400. comparemus, fiat $a=1$, $c=1$, $b=1-\omega$, ibique loco ω posito n, erit:

$$\frac{1}{1-\omega}\cdot\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\ .\ .\ .\ .\ \frac{n}{n-\omega} = \frac{1(1-\omega+n)}{(1-\omega)(1+n)}\cdot\frac{2(2-\omega+n)}{(2-\omega)(2+n)}\cdot\&c.$$

vnde terminus quaesitus indici ω respondens si ponatur $=\Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{(1-\omega+n).2}{(1+n)(2-\omega)}\cdot\frac{(2-\omega+n)3}{(2+n)(3-\omega)}\cdot\&c.\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.\ \ 2}\cdot\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.\ \ 3}\cdot\&c.$$

ideoque

$$\Sigma = \frac{(1+\omega)(1+n-\omega)}{1\ (1+n)}\cdot\frac{(2+\omega)(2+n-\omega)}{2\ (2+n)}\cdot\frac{(3+\omega)(3+n-\omega)}{3\ (3+n)}\cdot\&c.$$

quoties ergo $n-\omega$ fuerit numerus integer valor ipſius Σ rationaliter exprimi poteſt.

Sic ſi ſit $n = \omega$ erit $\Sigma = 1$

ſi $n = 1 + \omega$ erit $\Sigma = n$

ſi $n = 2 + \omega$ erit $\Sigma = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$

ſi $n = 3 + \omega$ erit $\Sigma = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

&c.

At ſi fuerit $\omega - n$ numerus integer affirmatiuus, erit ſemper $\Sigma = 0$.

CAPUT

CAPUT XVIII.

DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS IN RESOLUTIONE FRACTIONUM.

403.

Methodus fractionem quamuis propositam in fractiones simplices resoluendi, quam in Introductione exposuimus etsi, per se satis est facilis; tamen ope calculi differentialis ita perfici potest, vt saepenumero multo minori negotio in vsum vocari possit. Praecipue vero si denominator fractionis resoluendae fuerit indefiniti gradus, methodus ante exposita plerumque non mediocriter impeditur, dum loco quantitatis incognitae substitutio valoris, quem ex quopiam factore induit, fieri debet. Imprimis autem his casibus diuisio denominatoris per factorem iam inuentum nimis fit molesta. Quae operatio, si calculus differentialis in subsidium vocetur, euitari poterit, ita vt non opus sit alterum denominatoris factorem, qui oritur si denominator per factorem iam cognitum diuidatur, nosse. Hunc autem vsum praestat methodus determinandi valorem fractionis, cuius numerator ac denominator certo casu ambo euanescunt, cuius beneficio, quemadmodum resolutio fractionum iam supra tradita commodior & tractabilior reddi queat, hoc Capite doceamus, simulque finem huic libro, in quo vsum calculi differentialis in Analysi exposuimus, imponamus.

404. Si igitur propoſita fuerit fractio quaecunque $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator ſint functiones variabilis quantitatis x, rationales & integrae; primum videndum eſt, vtrum x in numeratore P tot pluresue dimenſiones habeat, quam in denominatore Q. Quodſi eueniat, complectetur fractio $\frac{P}{Q}$ in ſe partem integram huius formae $A + Bx + Cx^2 +$ &c. quae diuiſionis ope inde erui poterit: pars reliqua erit fractio eundem denominatorem Q habens, ſed cuius numerator erit functio puta R pauciores ipſius x dimenſiones continens, quam denominator Q, ita vt vlterior reſolutio inſtituenda ſit in fractione $\frac{R}{Q}$. Interim tamen non opus eſt noſſe hunc nouum numeratorem R, ſed eaedem fractiones ſimplices, quas fractio $\frac{R}{Q}$ ſuppeditatura eſſet, elici poſſunt immediate ex fractione propoſita $\frac{P}{Q}$; prouti iam ſupra notauimus.

405. Praeter partem integram igitur, ſi quam continet fractio $\frac{P}{Q}$, erui debent fractiones ſimplices, quarum denominatores ſint vel binomiales huius formae $f + gx$, vel trinomiales huiusmodi $f + 2x \cos\phi . \sqrt{fg} + gxx$, vel eiusmodi formularum quadrata, cubiue ſeu altiores poteſtates. Hique denominatores omnes erunt factores denominatoris Q, ita vt quilibet denominatoris ipſius Q factor praebeat fractionem ſimplicem. Scilicet ſi denomi-

minator Q factorem habeat $f+gx$, ex eo nafcetur fractio fimplex huiusmodi $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$; fin autem factor fuerit $(f+gx)^2$, binae fractiones $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$. Atque ex denominatoris Q factore cubico $(f+gx)^3$ orientur tres fractiones fimplices huius formae: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{C}}{f+gx}$; & ita porro. Quodfi autem denominator Q factorem habuerit trinomialem huiusmodi $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$, ex eo orietur fractio fimplex talis formae $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}x}{ff-2fgx\cos\phi+ggxx}$; &, fi duo huiusmodi factores fuerint aequales vti $(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^2$, hinc prodibunt duae fractiones $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}x}{(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^2}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}x}{ff-2fgx\cos\phi+ggxx}$. Huiusmodi autem factor cubicus $(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^3$ dabit tres fractiones fimplices, biquadratus quatuor, & ita porro.

406. Refolutio ergo fractionis cuiuscunque $\frac{P}{Q}$ ita inftituatur. Quaerantur primo omnes factores tam fimplices feu binomiales, quam trinomiales denominatoris Q, &, fi qui fuerint inter fe aequales, ii probe notentur, & inftar vnius habeantur. Tum ex fingulis his denominatoris factoribus eliciantur fractiones fimplices, vel modo iam fupra oftenfo, vel eo, quem hic fumus tra-

tradituri, & qui pro lubitu in locum prioris ſubſtitui poterit. Quo facto aggregatum omnium iſtarum fractionum ſimplicium vna cum parte integra, ſi quam continet fractio propoſita $\frac{P}{Q}$, huius valorem exhaurient. Inventionem quidem factorum denominatoris Q hic tanquam cognitam aſſumimus, cum pendeat a reſolutione aequationis $Q = 0$; methodumque hic trademus per calculum differentialem pro dato quouis denominatoris factore fractionem ſimplicem inde ortam definiendi. Quod, cum iſtarum fractionum ſimplicium denominatores iam habeantur, praeſtabitur, ſi numeratorem cuiusque fractionis inueſtigare doceamus.

407. Ponamus ergo fractionis $\frac{P}{Q}$ denominatorem Q factorem habere $f + gx$, ita vt ſit $Q = (f + gx)S$ neque vero hic alter factor S inſuper eundem factorem $f + gx$ contineat. Sit fractio ſimplex ex iſto factore orta $= \frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$; & complementum huiusmodi formam habebit $\frac{V}{S}$, ita vt ſit $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx} + \frac{V}{S} = \frac{P}{Q}$. Erit ergo $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{f + gx} = \frac{P - \mathfrak{A}S}{(f + gx)S}$; ideoque $V = \frac{P - \mathfrak{A}S}{f + gx}$. Cum igitur V ſit functio integra ipſius x, neceſſe eſt vt $P - \mathfrak{A}S$ ſit diuiſibile per $f + gx$; ac propterea ſi ponatur $f + gx = 0$ ſeu $x = \frac{-f}{g}$, expreſ-

ſio

ſio $P - \mathfrak{A}S$ euaneſcet. Fiat ergo $x = \frac{-f}{g}$, & cum ſit $P - \mathfrak{A}S = 0$, erit $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, vti iam ſupra inuenimus. Cum autem ſit $S = \frac{Q}{f + gx}$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{(f + gx) P}{Q}$, ſi vbique ponatur $f + gx = 0$, ſeu $x = \frac{-f}{g}$. Quoniam vero hoc caſu tam numerator $(f + gx) P$, quam denominator Q euaneſcit; per ea, quae de valore huiusmodi fractionum inueſtigando expoſuimus, erit $\mathfrak{A} = \frac{(f + gx)\, dP + P g\, dx}{dQ}$, ſi quidem ponatur $x = \frac{-f}{g}$. Hoc autem caſu ob $(f + gx) dP = 0$, erit $\mathfrak{A} = \frac{g P\, dx}{dQ}$; ſicque per differentiationem valor numeratoris $\mathfrak{A}$ expedite reperitur.

408. Si igitur fractionis propoſitae $\frac{P}{Q}$ denominator Q factorem habeat ſimplicem $f + gx$, ex eo orietur fractio ſimplex $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$, exiſtente $\mathfrak{A} = \frac{g P\, dx}{dQ}$, poſtquam hic vbique loco x valor $\frac{-f}{g}$ ex aequatione $f + gx = 0$ oriundus fuerit ſubſtitutus. Hoc ergo modo non neceſſe eſt, vt ante quaeratur alter denominatoris Q factor S, qui oritur, ſi Q per $f + gx$ diuidatur. Hinc ſi Q non in factoribus exprimatur, hanc diuiſionem ſaepe non parum moleſtam, praecipue ſi x in deno-

nominatore Q habeat exponentes indefinitos, omittere poterimus, cum valor ipſius $\mathfrak{A}$ ex formula $\frac{gPdx}{dQ}$ obtineatur. Sin autem denominator Q iam in factoribus fuerit expreſſus, ita vt inde valor ipſius S ſponte pateat, tum praeferenda erit altera expreſſio, qua inuenimus $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, ponendo pariter vbique $x = \frac{-f}{g}$. Sicque pro inueniendo valore ipſius $\mathfrak{A}$ quouis caſu ea formula adhiberi poterit, quae commodior & expeditior videatur. Vſum autem nouae formulae aliquot exemplis illuſtrabimus.

EXEMPLUM I.

Sit propoſita iſta fractio $\frac{x^9}{1+x^{17}}$, *cuius fractionem ſimplicem ex denominatoris factore* $1+x$ *oriundam definiri oporteat.*

Quoniam hic eſt $Q = 1 + x^{17}$, cuius etſi factor $1 + x$ conſtat, tamen ſi, vti prima methodus poſtulat per eum diuidere velimus, prodiret

$S = 1 - x + xx - x^3 + \ldots + x^{16}$.

Commodius igitur vtemur noua formula $\mathfrak{A} = \frac{gPdx}{dQ}$; quia itaque eſt $f = 1$, $g = 1$, & $P = x^9$, ob $dQ = 17x^{16}dx$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{x^9}{17x^{16}} = \frac{1}{17x^7}$, poſito $x = -1$, vnde fit $\mathfrak{A} = -\frac{1}{17}$, & fractio ſimplex ex denominatoris factore $1+x$ oriunda erit $\frac{-1}{17(1+x)}$.

EX-

EXEMPLUM II.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-x^{2n}}$, *fractionem simplicem ex denominatoris factore* $1-x$ *oriundam inuestigare.*

Ob factorem propositum $1-x$, erit $f=1$, & $g=-1$. Tum vero denominator $Q=1-x^{2n}$ dat $dQ=-2nx^{2n-1}dx$; vnde propter $P=x^m$ obtinebitur $\mathfrak{A}=\frac{-x^m}{-2nx^{2n-1}}$. Positoque ex aequatione $1-x=0$, $x=1$, fiet $\mathfrak{A}=\frac{1}{2n}$; ita vt fractio simplex futura sit haec $\frac{1}{2n(1-x)}$.

EXEMPLUM III.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-4x^k+3x^n}$, *eius fractionem simplicem ex denominatoris factore* $1-x$ *oriundam determinare.*

Hic ergo fit $f=1$; $g=-1$; $P=x^m$; $Q=1-4x^k+3x^n$ & $\frac{dQ}{dx}=-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}$; vnde fit $\mathfrak{A}=\frac{-x^m}{-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}}$ & posito $x=1$, erit $\mathfrak{A}=\frac{1}{4k-3n}$. Fractio ergo simplex ex isto denominatoris factore simplici $1-x$ oriunda erit $=\frac{1}{(4k-3n)(1-x)}$.

409. Ponamus nunc fractionis $\frac{P}{Q}$ denominatorem Q factorem habere quadratum $(f+gx)^2$, & fractiones simplices hinc oriundas esse $= \frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$. Sit $Q = (f+gx)^2 S$ & complementum $= \frac{V}{S}$; ita vt sit $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} - \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$; & $V = \frac{P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}(f+gx)S}{(f+gx)^2}$. Quia nunc V est functio integra, necesse est vt sit $P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}S(f+gx)$ diuisibile per $(f+gx)^2$; & cum S factorem $f+gx$ amplius non contineat, quoque haec expressio $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f+gx)$ diuisibilis erit per $(f+gx)^2$; ideoque facto $f+gx = 0$, seu $x = \frac{-f}{g}$ non solum ipsa, sed etiam eius differentiale $d.\frac{P}{S} - \mathfrak{B}g\,dx$ euanescet. Fiat ergo $x = \frac{-f}{g}$, eritque ex priori aequatione $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$; ex posteriori vero erit $\mathfrak{B} = \frac{1}{g\,dx} d.\frac{P}{S}$; quibus valoribus inuentis habebuntur fractiones quaesitae: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$.

EXEMPLUM.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-4x^3+3x^4}$, *cuius denominator factorem habet* $(1-x)^2$, *inuenire fractiones simplices hinc oriundas.*

Cum hic sit $f=1$, $g=-1$, $P=x^m$ & $Q=1-4x^3+3x^4$, erit $S=1+2x+3xx$; $\frac{P}{S}=\frac{x^m}{1+2x+3xx}$, &

$$d.\frac{P}{S}=\frac{mx^{m-1}dx+2(m-1)x^m dx+3(m-2)x^{m+1}dx}{(1+2x+3xx)^2}.$$

Hinc posito $x=1$, erit:

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{6}\ \&\ \mathfrak{B}=-1.\frac{6m-8}{36}=\frac{4-3m}{18};$$

vnde fractiones quaesitae erunt: $\frac{1}{6(1-x)^2}+\frac{4-3m}{18(1-x)}$.

410. Habeat fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q tres factores simplices aequales, seu sit $Q=(f+gx)^3$, sintque fractiones simplices ex hoc factore cubico $(f+gx)^3$ oriundae hae: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{C}}{f+gx}$; complementum vero harum fractionum ad fractionem propositam $\frac{P}{Q}$ constituendam sit $\frac{V}{S}$, eritque $V=\frac{P-\mathfrak{A}S-\mathfrak{B}S(f+gx)-\mathfrak{C}S(f+gx)^2}{(f+gx)^3}$. Quare haec expressio $\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2$

 diui-

diuiſibilis erit per $(f+gx)^3$; vnde poſito $f+gx=0$ ſeu $x=\frac{-f}{g}$, non ſolum ipſa haec expreſſio, ſed etiam eius differentiale primum & ſecundum euadet $=0$. Erit ſcilicet ponendo $x=\frac{-f}{g}$:

$$\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2=0$$

$$d.\frac{P}{S}-\mathfrak{B}g\,dx-2\mathfrak{C}g\,dx(f+gx)=0$$

$$dd.\frac{P}{S}-\mathfrak{C}g^2dx^2=0.$$

Ex prima aequatione ergo erit $\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$

Ex ſecunda vero erit $\mathfrak{B}=\frac{1}{g\,dx}\,d.\frac{P}{S}$

Ex tertia denique definitur $\mathfrak{C}=\frac{1}{2g^2dx^2}\,dd.\frac{P}{S}$.

411. Generaliter ergo ſi fractionis $\frac{P}{S}$ denominator Q factorem habeat $(f+gx)^n$, ita vt ſit $Q=(f+gx)^nS$; poſitis fractionibus ſimplicibus ex hoc factore $(f+gx)^n$ oriundis his:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^n}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^{n-1}}+\frac{\mathfrak{C}}{(f+gx)^{n-2}}+\frac{\mathfrak{D}}{(f+gx)^{n-3}}+\frac{\mathfrak{E}}{(f+gx)^{n-4}}+\&c.$$

quoad ad vltimam, cuius denominator eſt $f+gx$, perveniatur, ſi ratiocinium vt ante inſtituatur, reperietur haec expreſſio:

$$\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2-\mathfrak{D}(f+gx)^3-\mathfrak{E}(f+gx)^4-\&c.$$

diui-

diuiſibilis eſſe debere per $(f+gx)^n$, hinc tam ipſa, quam ſingula eius differentialia vsque ad gradum $n-1$, caſu $x=\frac{-f}{g}$ euaneſcere debebunt. Ex quibus aequationibus concludetur fore ponendo vbique $x=\frac{-f}{g}$:

$$\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{1\,gdx}d.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{1.2\,g^2dx^2}dd.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{1.2.3\,g^3dx^3}d^3.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{E}=\frac{1}{1.2.3.4\,g^4dx^4}d^4.\frac{P}{S}\quad \&c.$$

Vbi quidem notandum eſt, differentialia iſta ipſius $\frac{P}{S}$ ante capi oportere, quam loco x ponatur $\frac{-f}{g}$, alias enim variabilitas ipſius x tolleretur.

412. Facilius ergo hoc modo iſti numeratores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. exprimuntur, quam eo modo, qui in Introductione eſt traditus, & ſaepenumero quoque hac noua ratione eorum valores expeditius reperiuntur. Quae comparatio quo facilius inſtitui queat, valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. priori modo definiamus:

Posito $x = \frac{-f}{g}$	Statuatur relicto x variabili.
$\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$	$\frac{P - \mathfrak{A}S}{f + gx} = \mathfrak{P}$ erit
$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}}{S}$	$\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{B}S}{f + gx} = \mathfrak{Q}$ erit
$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}}{S}$	$\frac{\mathfrak{Q} - \mathfrak{C}S}{f + gx} = \mathfrak{R}$ erit
$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{R}}{S}$	$\frac{\mathfrak{R} - \mathfrak{D}S}{f + gx} = \mathfrak{S}$ erit
$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{S}}{S}$	& ita porro.

413. Quodsi autem fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q non omnes factores simplices habeat reales, tum bini imaginariorum iunctim sumantur, quorum productum erit reale. Sit ergo denominatoris Q factor $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$, qui positus $= 0$ dat hunc duplicem valorem imaginarium:

$$x = \frac{f}{g}\cos\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi; \quad \text{ex quo erit}$$

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\phi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin . n\phi .$$

Ponamus esse $Q = (ff - 2fgx\cos\phi + ggxx)\,S$, atque S praeterea per $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$ non esse diuisibile. Sit fractio ex isto factore denominatoris oriunda:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x}{ff - 2fgx\cos\phi + ggxx}$$

&

& complementum ad propositam $\frac{P}{Q}$ sit $= \frac{V}{S}$, erit $V = \frac{P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S}{ff - 2fgx\cos\phi + ggxx}$; vnde $P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S$ ac propterea quoque $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ diuisibile erit per $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$. Euanescet ergo $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ si ponatur $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx = 0$, hoc est si ponatur

vel $\quad x = \frac{f}{g}\cos\phi + \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi$

vel $\quad x = \frac{f}{g}\cos\phi - \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi$.

414. Quoniam P & S sunt functiones integrae ipsius x, fiat in vtroque seorsim vtraque substitutio; & quia pro quauis potestate ipsius x, puta x^n binomium hoc $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\phi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin . n\phi$ substitui debet. Ponamus primo vbique $\frac{f^n}{g^n}\cos\phi$ pro x^n, hocque facto abeat P in $\mathfrak{P}$, & S in $\mathfrak{S}$. Deinde ponatur vbique $\frac{f^n}{g^n}\sin n\phi$ pro x^n, hocque facto abeat P in $\mathfrak{p}$ & S in $\mathfrak{s}$; vbi notandum est ante has substitutiones vtramque functionem P & S penitus debere euolui, ita vt, si forte factoribus sint implicatae, ii per actualem multiplicationem tollantur. His valoribus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{s}$, inuentis, manifestum erit, si ponatur:

$$x = \frac{f}{g}\cos\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi$$

func-

functionem P abituram esse in $\mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}}$, & functionem S abituram esse in $\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$. Hinc cum $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ seu $P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S$ vtroque casu euanescere debeat, erit:

$$\mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}} = \left(\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{a}f}{g}\cos\phi \pm \frac{\mathfrak{a}f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi\right)\left(\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}\right)$$

vnde ob signa ambigua hae duae aequationes orientur:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{S}}{g}\cos\phi - \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{s}}{g}\sin\phi$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{s} + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{s}}{g}\cos\phi + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{S}}{g}\sin\phi$$

ex quibus eliminando $\mathfrak{A}$ eruitur:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{a}f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)}{g}\sin\phi;$$ ideoque erit

$$\mathfrak{a} = \frac{g(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})}{f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin\phi}.$$

Deinde eliminando $\sin\phi$ erit:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p} = (\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\left(\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{a}f}{g}\cos\phi\right).$$ Ergo

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2} - \frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})\cos\phi}{(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin\phi}.$$

415. Cum iam sit $S = \frac{Q}{ff - 2fgx\cos\phi + ggxx}$; quia posito $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx = 0$ tam numerator quam denominator euanescent, erit hoc casu:

$$S = \frac{dQ : dx}{2ggx - 2fg\cos\phi}.$$

Po-

Ponamus nunc, ſi vbique ſubſtituatur $x^n = \frac{f^n}{g^n} \operatorname{cof} n\phi$, functionem $\frac{dQ}{dx}$ abire in $\mathfrak{Q}$; ſin autem ſtatuatur $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin n\phi$, eam abire in $\mathfrak{q}$; atque manifeſtum eſt ſi ponatur $x = \frac{f}{g} \operatorname{cof} \phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi$ functionem $\frac{dQ}{dx}$ abire in $\mathfrak{Q} \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{-1}}$. Ex quo functio S abibit in $\frac{\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{q} : \sqrt{-1}}{\pm 2fg \sin \phi : \sqrt{-1}}$. Cum ergo ſit $S = \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$ eodem valore pro x poſito, habebitur:

$$\mathfrak{Q} \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{2fg\mathfrak{S}}{\sqrt{-1}} \sin \phi - 2fg\,\mathfrak{s} \sin \phi.$$

Erit ergo $\mathfrak{s} = \frac{-\mathfrak{Q}}{2fg \sin \phi}$ & $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{q}}{2fg \sin \phi}$.

Hisque valoribus ſubſtitutis, fiet $\mathfrak{a} = \frac{2gg(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$

& $\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}) \sin \phi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q}) \operatorname{cof} \phi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$.

416. Hinc ergo idonea obtinetur ratio ex quouis factore ſecundae poteſtatis fractionem ſimplicem formandi, hicque cum ipſe fractionis propoſitae denominator in computo retineatur, diuiſionem, qua valor litterae S definiri deberet, & quae ſaepe non parum eſt moleſta,

 eui-

euitamus. Si igitur fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q factorem habeat talem $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$, sequenti modo fractio simplex ex hoc factore oriunda, quam fingamus $= \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x}{ff - 2fgx\cos\phi + ggxx}$, definietur. Ponatur $x = \frac{f}{g}\cos\phi$, & pro quauis ipsius x potestate x^n scribatur $\frac{f^n}{g^n}\cos n\phi$; quo facto abeat P in $\mathfrak{P}$, & functio $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q}$. Deinde ibidem ponatur $x = \frac{f}{g}\sin\phi$, & potestas eius quaeuis $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\phi$; abeatque P in $\mathfrak{p}$, & $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{q}$. Inuentisque hoc modo valoribus litterarum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{p}$ & $\mathfrak{q}$ quantitates $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{a}$ ita definientur, vt sit $\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\phi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\cos\phi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$

$$\mathfrak{a} = \frac{2gg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}.$$

Fractio ergo ex denominatoris Q factore $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$ oriunda erit:

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\phi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})(gx - f\cos\phi)}{(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)(ff - 2fgx\cos\phi + ggxx)}.$$

EXEM-

EXEMPLUM I.

Si propoſita fuerit haec fractio $\frac{x^m}{a+bx^n}$, *cuius denominator* $a+bx^n$ *factorem habeat hunc:* $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$ *inuenire fractionem ſimplicem huic factori conuenientem.*

Quoniam hic eſt $P=x^m$ & $Q=a+bx^n$, erit $\frac{dQ}{dx}=nbx^{n-1}$, vnde fiet:

$$\mathfrak{P}=\frac{f^m}{g^m}\cos m\phi \quad ; \quad \mathfrak{p}=\frac{f^m}{g^m}\sin m\phi$$

$$\mathfrak{Q}=\frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos(n-1)\phi \quad ; \quad \mathfrak{q}=\frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin(n-1)\phi.$$

Ex his erit: $\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2b^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}$;

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}=\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(n-m-1)\phi;$$

atque $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(n-m-1)\phi.$

Quamobrem erit fractio ſimplex quaeſita:

$$\frac{2g^{n-m}\{f\sin\phi.\sin(n\ m-1)\phi+gx\cos(n-m-1)\phi-f\cos\phi.\cos(n-m-1)\phi\}}{nbf^{n-m-1}(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)}$$

ſeu

$$\frac{2g^{n-m}[gx\cos(n-m-1)\phi-f\cos(n-m)\phi]}{nbf^{n-m-1}(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)}.$$

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec fractio $\frac{1}{x^m(a+bx^n)}$, *cuius denominator factorem habeat* $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$, *inuenire fractionem simplicem inde oriundam.*

Cum sit $P=1$, & $Q=ax^m+bx^{m+n}$, erit $\frac{dQ}{dx}=max^{m-1}+(m+n)bx^{m+n-1}$, ideoque posito $x^n=\frac{f^n}{g^n}\cos n\phi$ ob $P=x^0$ & $\mathfrak{P}=1$.

$$\mathfrak{Q}=\frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\phi+\frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\phi$$

& $\mathfrak{p}=0$; atque

$$\mathfrak{q}=\frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\phi+\frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\phi$$

Ergo

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{m^2a^2f^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}}+\frac{2m(m+n)abf^{2m+n-2}}{g^{2m+n-2}}\cos n\phi$$
$$+\frac{(m+n)^2b^2f^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}.$$

Quodsi vero est $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$ diuisor ipsius $a+bx^n$, erit $a+\frac{bf^n}{g^n}\cos n\phi=0$ & $\frac{bf^n}{g^n}\sin n\phi=0$, vnde $aa=\frac{bbf^{2n}}{g^{2n}}$.

Erit

Erit ergo:

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{(m+n)^2 bbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}} - \frac{m(2n+m)aaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}}$$

$$= \frac{nnaaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} = \frac{nnbbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}.$$

Deinde vero erit:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}} \sin(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(m+n-1)\phi$$

$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} [(m+n)\sin(m+n-1)\phi - m\cos n\phi . \sin(m-1)\phi]$$

$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} [n\cos n\phi \sin(m-1)\phi + (m+n)\sin n\phi \cos(m-1)\phi]$$

$$\& \quad \mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} =$$

$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} [(m+n)\cos(m+n-1)\phi - m\cos n\phi . \cos(m-1)\phi]$$

Vel cum $ff - 2fg\cos\phi + ggxx$ sit quoque diuisor ipsius $ax^{m-1} + bx^{m+n-1}$, erit:

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}} \cos(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(m+n-1)\phi = 0$$

$$\& \quad \frac{af^{m-1}}{g^{m-1}} \sin(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \sin(m+n-1)\phi = 0,$$

vnde erit:

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(m+n-1)\phi \quad \& \quad \mathfrak{q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \sin(m+n-1)\phi$$

seu

$$\mathfrak{Q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}} \cos(m-1)\phi \quad \& \quad \mathfrak{q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}} \sin(m-1)\phi.$$

Ex quibus resultabit fractio quaesita:

$$+\frac{2g^m[f\cos m\phi - gx\cos(m-1)\phi]}{naf^{m-1}(ff - 2fgx\cos\phi + ggxx)}.$$

Quae formula ex priori exemplo sequitur, si ponatur m negatiuum, vnde non opus fuisset hunc casum peculiarem constituisse.

EXEMPLUM III.

Si huius fractionis $\frac{x^m}{a+bx^n+cx^{2n}}$ *denominator habuerit factorem* $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$, *fractionem simplicem inuestigare ex hoc factore oriundam.*

Si $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$ est factor denominatoris $a + bx^n + cx^{2n}$, erit vt supra ostendimus:

$$a + \frac{bf^n}{g^n}\cos n\phi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\cos 2n\phi = 0$$

$$\& \quad \frac{bf^n}{g^n}\sin n\phi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\sin 2n\phi = 0.$$

Cum igitur sit $P = x^m$ & $Q = a + bx^n + cx^n$, erit $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}$; vnde efficitur:

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos m\phi \quad \& \quad \mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin m\phi:$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos(n-1)\phi + \frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\cos(2n-1)\phi$$

$$\mathfrak{q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin(n-1)\phi + \frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\sin(2n-1)\phi.$$

Quam-

Quamobrem habebimus:

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{n^2 f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}\left(bb + \frac{4bcf^n}{g^n}\operatorname{cos} n\phi + \frac{4ccf^{2n}}{g^{2n}}\right).$$

At ex duabus prioribus aequationibus est:

$$\frac{f^{2n}}{g^{2n}}\left(bb + \frac{2bcf^n}{g^n}\operatorname{cos} n\phi + \frac{ccf^{2n}}{g^{2n}}\right) = aa;$$

ideoque

$$\frac{4bcf^n}{g^n}\operatorname{cos} n\phi = \frac{2g^{2n}aa}{f^{2n}} - 2bb - \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}$$

quo valore ibi substituto erit:

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{n^2 f^{2n-2}}{g^{2n-2}}\left(\frac{2aag^{2n}}{f^{2n}} - bb + \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

seu

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{n^2(2aag^{4n} - bbf^{2n}g^{2n} + 2ccf^{4n})}{ff\, g^{4n-2}}.$$

Deinde erit: $\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} =$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\operatorname{sin}(n-m-1)\phi + \frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\operatorname{sin}(2n-m-1)\phi$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} =$$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\operatorname{cos}(n-m-1)\phi + \frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\operatorname{sin}(2n-m-1)\phi.$$

Quibus valoribus inuentis erit fractio simplex quaesita:

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\operatorname{sin}\phi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})(gx - f\operatorname{cos}\phi)}{(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)(ff - 2fgx\operatorname{cos}\phi + ggxx)}.$$

417. Hae autem fractiones facilius exprimentur, si ipsos denominatorum factores determinemus. Sit igitur denominator fractionis propositae:

$$a + b x^n$$

cuius factor trinomialis si ponatur:

$$ff - 2 f g x \cos\phi + g g x x$$

erit vti in Introductione ostendimus:

$$a + \frac{b f^n}{g^n} \cos n\phi = 0 \quad \& \quad \frac{b f^n}{g^n} \sin n\phi = 0,$$

cum igitur sit $\sin n\phi = 0$, erit vel $n\phi = (2k-1)\pi$, vel $n\phi = 2k\pi$, priori casu erit $\cos n\phi = -1$, posteriori $\cos n\phi = +1$. Si ergo a & b sint quantitates affirmatiuae, prior casus solus locum habebit, quo fit $a = \frac{b f^n}{g^n}$; ac propterea:

$$f = a^{\frac{1}{n}} \quad \& \quad g = b^{\frac{1}{n}}$$

retineamus autem loco harum quantitatum irrationalium litteras f & g, seu ponamus potius $a = f^n$ & $b = g^n$, ita vt factores inuestigari debeant huius functionis:

$$f^n + g^n x^n$$

Cum igitur sit $\phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, vbi k numerum quemcunque affirmatiuum integrum designare potest; at vero maiores numeri pro k non sunt sumendi, quam qui reddant $\frac{2k-1}{n}$ vnitate minorem; hinc fractionis propositae $f^n + g^n x^n$ factores erunt sequentes:

$ff -$

$$ff - 2fgx \cos \frac{\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{3\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{5\pi}{n} + ggxx$$

&c.

vbi notandum eſt ſi n ſit numerus impar, vnum factorem haberi binomium hunc:

$$f + gx$$

ſin autem n ſit numerus par, nullus factor aderit binomius.

EXEMPLUM I.

Reſoluere hanc fractionem $\frac{x^m}{f^n + g^n x^n}$ *in ſuas fractiones ſimplices.*

Cum denominatoris vnusquisque factor trinomialis contineatur in hac forma:

$$ff - 2fgx \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} + ggxx$$

erit in §. praecedente Exempl. I. $a = f^n$, $b = g^n$, & $\phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, vnde erit:

$$\sin(n-m-1)\phi = \sin(m+1)\phi = \sin \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} \quad \&$$

$$\cos(n-m-1)\phi = -\cos(m+1)\phi = -\cos \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}.$$

 Hinc

Hinc ex isto factore oritur fractio simplex haec:

$$\frac{2f\,\text{sin}\frac{(2k-1)\pi}{n}\,\text{sin}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} - 2\,\text{cos}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}\left(gx - f\,\text{cos}\frac{(2k-1)}{n}\pi\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\,\text{cos}\frac{(2k-1)}{n}\pi + ggxx\right)}.$$

Quamobrem fractio proposita resoluetur in has simplices:

$$\frac{2f\,\text{sin}\frac{\pi}{n}.\,\text{sin}\frac{(m+1)\pi}{n} - 2\,\text{cos}\frac{(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\,\text{cos}\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\,\text{cos}\frac{\pi}{n} - ggxx\right)}$$

$$\frac{2f\,\text{sin}\frac{3\pi}{n}.\,\text{sin}\frac{3(m+1)\pi}{n} - 2\,\text{cos}\frac{3(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\,\text{cos}\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\,\text{cos}\frac{3\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{2f\,\text{sin}\frac{5\pi}{n}.\,\text{sin}\frac{5(m+1)\pi}{n} - 2\,\text{cos}\frac{5(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\,\text{cos}\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\,\text{cos}\frac{5\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

Si ergo n fuerit numerus par, hoc modo omnes oriuntur fractiones simplices; sin autem m sit numerus impar, ob factorem binomium $f + gx$, ad fractiones hoc modo resultantes insuper addi debet haec:

$$\frac{\pm 1}{ng^{n-m-1}g^{m}(f + gx)}$$

vbi signum $+$ valet, si m fuerit numerus par, contra signum $-$. Si m fuerit numerus maior quam n, tum ad

has fractiones accedent insuper partes integrae huiusmodi

$$Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \&c.$$

quamdiu exponentes manent affirmatiui, eritque:

$$Ag^n = 1 \;; \quad \text{Ergo} \quad A = \frac{1}{g^n}$$

$$Af^n + Bg^n = 0 \quad . \; . \quad B = -\frac{f^n}{g^{2n}}$$

$$Bf^n + Cg^n = 0 \quad . \; . \quad C = +\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^n + Dg^n = 0 \quad . \; . \quad D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

&c. &c.

EXEMPLUM II.

Resoluere hanc fractionem $\frac{1}{x^m(f^n + g^n x^n)}$ *in suas fractiones simplices.*

Quod ad factores ipsius $f^n + g^n x^n$ attinet, ex iis oriuntur eaedem fractiones, quas exemplo praecedente eruimus, dummodo ibi sumatur m negatiue: super est igitur tantum, vt fractiones simplices ex denominatoris altero factore x^m definiamus, quod hoc modo commodissime fit: statuatur fractio proposita $= \frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{N} x^{n-m}}{f^n + g^n x^n}$, eritque

$$\mathfrak{A} f^n = 1 \;; \quad \text{Ergo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A} g^n + \mathfrak{N} = 0 \quad . \; . \quad \mathfrak{N} = -\frac{g^n}{f^n}.$$

Si $n-m$ adhuc fuerit numerus negatiuus, ſimili modo erit operandum, ita vt, ſi m fuerit numerus quantumuis magnus, reſultent huiusmodi fractiones ſimplices

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \&c.$$

cuius ſeriei tot termini ſunt ſumendi, quot habentur ipſius x exponentes affirmatiui in denominatore. Eritque

$$\mathfrak{A}f^n = 1 \;; \quad \text{Ergo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{B}f^n = 0 \quad . \; . \quad \mathfrak{B} = -\frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{B}g^n + \mathfrak{C}f^n = 0 \quad . \; . \quad \mathfrak{C} = +\frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{C}g^n + \mathfrak{D}f^n = 0 \quad . \; . \quad \mathfrak{D} = -\frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

&c. &c.

Fractio ergo propoſita omnino in has fractiones ſimplices reſoluetur:

$$\frac{1}{f^n x^m} - \frac{g^n}{f^{2n}x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n}x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n}x^{m-3n}} + \&c.$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{3\pi}{n}.\sin\frac{3(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{3\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{5\pi}{n}.\sin\frac{5(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{5(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{5\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

Quibus formulis si n fuerit numerus impar, ob $f+gx$ factorem denominatoris, insuper adiici debet:

$$\frac{\pm\ g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)}$$

vbi signorum ambiguorum $\pm$ superius valet, si m fuerit numerus par, inferius vero si m impar.

418. Consideremus nunc quoque formulam $a+bx^n$, si b sit numerus negatiuus, sitque proposita haec functio:

$$f^n - g^n x^n$$

cuius primo semper erit factor $f-gx$; atque si n sit numerus par, quoque $f+gx$ eius erit factor. Reliqui vero erunt trinomiales, quorum forma generalis si ponatur

$$ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$$

erit $f^n - f^n\cos n\phi = 0$ & $f^n \sin n\phi = 0$ siue $\sin n\phi = 0$ & $\cos n\phi = 1$. Quibus vt satisfiat, oportet esse $n\phi = 2k\pi$ existente k numero quocunque integro, atque propterea erit $\phi = \frac{2k\pi}{n}$. Factor ergo generalis erit:

$$ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi}{n} + ggxx$$

sumendo ergo pro $2k$ omnes numeros pares exponente n minores, prodibunt factores trinomiales omnes:

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{6\pi}{n} + ggxx$$

&c.

EXEMPLUM I.

Resoluere hanc fractionem $\frac{x^m}{f^n - g^n x^n}$ *in suas fractiones simplices.*

Quoniam denominatoris factor est $f-gx$, inde orietur fractio huiusmodi $\frac{\mathfrak{A}}{f-gx}$, ad cuius numeratorem inueniendum, ponatur $x^m = P$ & $f^n - g^n x^n = Q$, erit $dQ = -ng^n x^{n-1}$, fietque $\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{-ng^n x^{n-1}} = \frac{x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}}$, posito $x = \frac{f}{g}$. Ergo erit $\mathfrak{A} = \frac{1}{nf^{n-m-1}g^m}$, hincque fractio simplex ex factore $f-gx$ orta erit:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m(f-gx)}$$

Si n sit numerus par, quia tum denominatoris factor quoque est $f+gx$, ponatur fractio simplex inde oriunda $= \frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$, erit $\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{ng^n x^{n-1}} = \frac{-x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}}$, posito

ſito $x = \frac{-f}{g}$. Fiet ergo ob $n-1$ numerum imparem $g^{n-1}x^{n-1} = -f^{n-1}$: at erit $x^m = \frac{\pm f^m}{g^m}$, vbi ſignum ſuperius valet, ſi m fuerit numerus par, inferius ſi m ſit numerus impar. Quare cum ſit $\mathfrak{A} = \frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m}$, erit fractio ſimplex ex factore $f+gx$ oriunda haec:

$$\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}\, g^m\, (f+gx)}.$$

Deinde cum factorum trinomialium forma generalis ſit:

$$ff - 2fgx \operatorname{cof} \frac{2k\pi}{n} + ggxx,$$

ſi comparatio cum Exemplo 1. §. 416. inſtituatur, erit $a = f^n$, $b = -g^n$ & $\phi = \frac{2k\pi}{n}$; vnde ſin $\phi = 0$ & cof $n\phi = 1$; atque ſin $(n-m-1)\phi = -$ ſin $(m+1)\phi = -$ ſin $\frac{2k(m+1)\pi}{n}$, & cof $(n-m-1)\phi =$ cof $(m+1)\phi =$ cof $\frac{2k(m+1)\pi}{n}$.

Ex quibus erit fractio ſimplex hinc oriunda:

$$\frac{2f \operatorname{ſin} \frac{2k\pi}{n} . \operatorname{ſin} \frac{2k(m+1)\pi}{n} - 2 \operatorname{cof} \frac{2k(m+1)\pi}{n} \left(gx - f \operatorname{cof} \frac{2k\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}\, g^m \left(ff - 2fgx \operatorname{cof} \frac{2k\pi}{n} + ggxx\right)}$$

Hancobrem fractiones ſimplices quaeſitae erunt:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}\, g^m\, (f-gx)}$$

+

$$+\frac{2f\sin\frac{2\pi}{n}.\sin\frac{2(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff-2fgx\cos\frac{2\pi}{n}+ggxx\right)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{4\pi}{n}.\sin\frac{4(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{4(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi}{n}+ggxx\right)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{6\pi}{n}.\sin\frac{6(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{6(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{6\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff-2fgx\cos\frac{6\pi}{n}+ggxx\right)}\ \&c.$$

quibus si n fuerit numerus par, insuper addi debet haec fractio: $\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^{m}(f+gx)}$ cuius signum superius $-$ est sumendum, si m fuerit numerus par, inferius si impar. Praeterea vero si m sit numerus non minor quam n, adiiciendae sunt partes integrae:

$$Ax^{m-n}+Bx^{m-2n}+Cx^{m-3n}+Dx^{m-4n}+\&c.$$

quamdiu exponentes non fuerint negatiui, eritque:

$$-Ag^{n}=1 \quad \text{seu} \quad A=-\frac{1}{g^{n}}$$

$$Af^{n}-Bg^{n}=0 \quad . \quad . \quad B=-\frac{f^{n}}{g^{2n}}$$

$$Bf^{n}-Cg^{n}=0 \quad . \quad . \quad C=-\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^{n}-Dg^{n}=0 \quad . \quad . \quad D=-\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

&c. &c.

EX-

EXEMPLUM II.

Resoluere hanc fractionem $\frac{1}{x^m(f^n - g^n x^n)}$ *in suas fractiones simplices.*

Fractiones quae ex denominatoris factore $f^n - g^n x^n$ oriuntur, eaedem erunt quae ante, dummodo in illis formulis m negatiue accipiatur. Quare ad alterum factorem x^m est respiciendum, ex quo si ponamus has fractiones resultare:

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \&c.$$

quae series eousque est continuanda, donec exponentes ipsius x fiant negatiui. Erit vero

$$\mathfrak{A} f^n = 1 \; ; \quad \text{Ergo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{B} f^n - \mathfrak{A} g^n = 0 \; . \; . \; \mathfrak{B} = \frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{C} f^n - \mathfrak{B} g^n = 0 \; . \; . \; \mathfrak{C} = \frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{D} f^n - \mathfrak{C} g^n = 0 \; . \; . \; \mathfrak{D} = \frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

&c. &c.

Fractio ergo proposita resoluetur in has fractiones simplices:

$$\frac{1}{f^n x^m} + \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{2n} x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \&c.$$

$$+ \frac{g^m}{n f^{n+m-1}(f - gx)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2(m-1)\pi}{n} - 2g^m\cos\frac{2(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{2\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin\frac{4\pi}{n}\sin\frac{4(m-1)\pi}{n} - 2g^m\cos\frac{4(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{4\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{4x}{n} + ggxx\right)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin\frac{6\pi}{n}\sin\frac{6(m-1)\pi}{n} - 2g^m\cos\frac{6(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{6\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{6\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

quibus ſi n fuerit numerus par, inſuper addi debet haec fractio:

$$\frac{\mp g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)}$$

quae autem praetermittitur, ſi n fuerit numerus impar. Signorum ambiguorum vero ſuperius — valet, ſi m ſit numerus par, inferius vero +, ſi m ſit numerus impar.

419. Hoc ergo modo omnes fractiones, quarum denominator ex duobus conſtat membris huiusmodi $a+bx^n$, in fractiones ſimplices reſoluuntur. At ſi denominator conſtet tribus huiusmodi membris $a+bx^n+cx^{2n}$, tum primum videndum eſt, vtrum is in duos factores reales prioris formae reſolui poſſit. Hoc enim ſi eueniat, reſolutio in fractiones ſimplices modo ante expoſito inſtitui poterit. Si enim proponatur huiusmodi fractio

$$\frac{x^m}{(f^n+g^nx^n)(f^n+h^nx^n)}.$$

ea

ea primum in duas fractiones transformabitur huiusmodi:

$$\frac{\alpha x^m}{f^n + g^n x^n} + \frac{\beta x^m}{f^n + h^n x^n}$$

eritque $\alpha f^n + \beta f^n = 1$ & $\alpha h^n + \beta g^n = 0$, vnde fit

$$\alpha = \frac{1}{f^n} - \beta = -\frac{\beta g^n}{h^n};$$ ideoque habebitur

$$\beta = \frac{h^n}{f^n(h^n - g^n)} \ \& \ \alpha = \frac{g^n}{f^n(g^n - h^n)}.$$

Si exponens m fuerit maior quam n, transmutatio in sequentes fractiones erit commodior:

$$\frac{\alpha x^{m-n}}{f^n + g^n x^n} + \frac{\beta x^{m-n}}{f^n + h^n x^n}$$

qua fit $\alpha + \beta = 0$ & $\alpha h^n + \beta g^n = 1$, ideoque $\alpha = \frac{1}{h^n - g^n}$ & $\beta = \frac{1}{g^n - h^n}$. Vtra autem transformatio adhibeatur, vtraque fractio hoc modo oriunda methodo ante exposita resoluetur in suas fractiones simplices, quae iunctim sumtae fractioni propositae erunt aequales.

420. Simili modo methodus hactenus tradita sufficiet, si denominator ex pluribus membris constet huiusmodi $a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} + ex^{4n} +$ &c. dummodo is in factores formae $f^n \pm g^n x^n$ resolui queat. Ponamus enim occurrere hanc fractionem in suas fractiones simplices resoluendam:

$$\frac{x^m}{(a - x^n)(b - x^n)(c - x^n)(d - x^n)}.$$

Haec primum resoluetur in has:

$$\frac{Ax^m}{a - x^n} + \frac{Bx^m}{b - x^n} + \frac{Cx^m}{c - x^n} + \frac{Dx^m}{d - x^n} + \&c.$$

quarum numeratores sequenti modo determinabuntur, vt sit

$$A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

$$B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$

$$C = \frac{1}{(a-c)(b-c)(d-c)} \&c.$$

Hac ergo praeparatione facta, singulae istae fractiones methodo ante exposita in suas fractiones simplices resoluentur; quae cunctae in vnam summam erunt colligendae.

421. Quodsi vero huiusmodi denominator $a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} +$ &c. non omnes factores formae $f^n + g^n x^n$ habeant reales, bini imaginarii erunt coniungendi. Ponamus ergo huiusmodi binorum factorum productum esse:

$$f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n} x^{2n}$$

& cum haec expressio nullos habeat factores simplices reales, ponamus factores trinomiales in hac forma generali contineri:

$$ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$$

quorum numerus erit $= n$. Posito ergo $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\phi$, orietur haec aequatio:

$$1 - 2\cos\omega . \cos n\phi + \cos 2n\phi = 0.$$

De-

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin n\phi$; erit quoque:

$$-2\cos\omega . \sin n\phi + \sin 2n\phi = 0$$

quae diuisa per $\sin n\phi$ dat $\cos n\phi = \cos\omega$, sicque simul priori aequationi satisfit. Erit ergo $n\phi = 2k\pi \pm \omega$ denotante k numerum quemuis integrum, ideoque erit $\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, & factores omnes continebuntur in hac forma: $ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$

vnde sequentes habebuntur factores:

$$ff - 2fgx\cos\frac{\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi + \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi + \omega}{n} + ggxx \quad \&c.$$

quorum tot sunt sumendi, donec eorum numerus fiat $= n$.

422. Si igitur proponatur ista fractio in suas fractiones simplices resoluenda:

$$\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n} x^{2n}}$$

quoniam denominatoris factor trinomialis quicunque continetur in hac forma: $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$

 exi-

existente $\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, consideretur ista fractio:

$$\frac{x^m}{f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1}}$$

illi aequalis, ac ponatur numerator $x^m = \mathrm{P}$ ac denominator $f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1} = \mathrm{Q}$: erit

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dx} = f^{2n} - 2(n+1)f^n g^n x^n \cos\omega + (2n+1)g^{2n}x^{2n}.$$

Hinc ponendo $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\phi$; erit:

$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos m\phi$ seu $\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$ &

$\mathfrak{Q} = f^{2n}[1 - 2(n+1)\cos\omega\cos n\phi + (2n+1)\cos 2n\phi]$.

Cum autem sit $\cos n\phi = \cos\omega$, erit $\cos 2n\phi = 2\cos\omega^2 - 1$; ideoque $\mathfrak{Q} = f^{2n}(-2n + 2n\cos\omega^2) = -2nf^{2n}\sin\omega^2$.

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\phi$, fiet:

$$\mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin m\phi = \frac{f^m}{g^m}\sin\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n} \quad \&$$

$$\mathfrak{q} = -f^{2n}[2(n+1)\cos\omega\sin n\phi - (2n+1)\sin 2n\phi]$$

ob $\sin 2n\phi = 2\sin n\phi\cos n\phi = 2\cos\omega\sin n\phi$; erit $\mathfrak{q} = 2nf^{2n}\cos\omega\sin n\phi$. Cum autem sit $n\phi = 2k\pi \pm \omega$, erit $\sin n\phi = \pm\sin\omega$ & $\mathfrak{q} = \pm 2nf^{2n}\sin\omega.\cos\omega$.

His inuentis erit: $\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = 4n^2 f^{4n}\sin\omega^2$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(\pm\cos m\phi.\sin\omega.\cos\omega + \sin m\phi.\sin\omega)^2$$

siue $\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin\omega.\cos(m\phi \mp \omega)$ seu

$\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ —

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}=\pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin\omega.\cos\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(-\cos m\phi\sin\omega^2\pm\sin m\phi.\sin\omega\cos\omega)$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin\omega.\sin(m\phi\mp\omega). \quad \text{seu}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin\omega.\sin\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}.$$

Hinc ex denominatoris factore: $ff-2fgx\cos\frac{2k\pi\pm\omega}{n}+ggxx$ nascitur ista fractio simplex:

$$\frac{\pm f\sin\frac{2k\pi\pm\omega}{n}\cos\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}\pm\sin\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{2k\pi\pm\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{2k\pi\pm\omega}{n}+ggxx\right)}$$

seu

$$\frac{\pm gx\sin\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}\pm f\sin\frac{2k(m-1)\pi\pm(m-n-1)\omega}{n}}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{2k\pi\pm\omega}{n}+ggxx\right)}.$$

EXEMPLUM.

Resoluere hanc fractionem $\frac{x^{m-1}}{f^{2n}-2f^ng^nx^n\cos\omega+g^{2n}x^{2n}}$ *in suas fractiones simplices.*

Istae fractiones simplices quaesitae ergo erunt:

$$\frac{+f\sin\frac{\omega}{n}\cos\frac{(m-n)\omega}{n}+\sin\frac{(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$-f$

$$\frac{-f\sin\frac{2\pi-\omega}{n}\cos\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}-\sin\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{2\pi-\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{+f\sin\frac{2\pi+\omega}{n}\cos\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}+\sin\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{2\pi+\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{-f\sin\frac{4\pi-\omega}{n}\cos\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}-\sin\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{4x-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi-\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{+f\sin\frac{4\pi+\omega}{n}\cos\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}+\sin\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi+\omega}{n}+ggxx\right)}$$

&c.

sicque eousque erit progrediendum, quoad harum fractionum numerus fuerit n. Si m fuerit numerus vel maior quam $2n-1$ vel numerus negatiuus, priori casu partes integrae, posteriori vero fractiones insuper sunt adiiciendae, quae modo ante exposito facile inueniuntur.

BEROLINI
EX OFFICINA MICHAELIS.

